

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

• Siebers, G.: Die kausale Notwendigkeit und das kausale Werden. München: Beck 1951. 102 S. DM 8,50.

• Grammel, R.: Aus der Werkstatt des Denkens. (Deutsches Museum. Abhandl. u. Berichte, 19. Jahrg., Heft 3.) München: R. Oldenbourg Verlag 1951. 28 S. DM 1.—.

Considérations générales et sommaires, illustrées de quelques exemples classiques empruntés à l'histoire des mathématiques, de l'astronomie et de la physique, sur la valeur de la pensée exacte, acquise plutôt qu'innée selon l'auteur; sur ses rapports avec une autre sorte de pensée, celle des sciences morales et de la philosophie; sur les paresse et les égarements du simple bon-sens.

Fiala.

• Henle, Paul, Horace M. Kallen and Susanne K. Langer, edited by: Structure, method and meaning. — Essays in honor of Henry M. Sheffer. With a foreword by Felix Frankfurter. New York: The Liberal Arts Press 1951. XVI, 306 p. \$ 4,50.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

• Freytag gen. Loringhoff, Bruno Baron v.: Philosophical problems of mathematics. New York: The Philosophical Library, Inc., 1951. 88 p. \$ 2,75.

• Laplace, P. S.: Saggio filosofico sulla probabilità. — Trad. di S. Oliva, Introd. di F. Albergamo. Bari: Laterza 1951. 242 p.

• Tarski, Alfred: Einführung in die Logik und die Methodologie der deduktiven Wissenschaften. — Übersetzt von T. R. Bachiller und J. R. Fuentes. Buenos Aires and Mexico City: Espase-Calple Argentina 1951. 237 p. [Spanisch.]

• Carnap, Rudolf: The nature and application of inductive logic, consisting of six sections from: Logical foundations of probability. Chicago: The University of Chicago Press 1951. I—VIII, 161—202, 242—279.

Grzegorzczuk, Andrzej: The pragmatic foundations of semantics. Synthese 8, 300—324 (1951).

Carruccio, Ettore: Sulle dimostrazioni di coerenza dei sistemi ipotetico-deduttivi. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 10, 97—110 (1951).

This paper consists of a series of informal remarks on proofs of consistency of deductive systems. [A system being defined to be consistent if it is impossible to deduce two propositions of the form A and \bar{A} (negation of A).] The author begins by saying that the discovery of the antinomies emphasises the importance of such proofs. He then goes on to discuss the limitations inherent in such demonstrations. In § 2 he states Gödel's main result as „If a system is consistent then its consistency is not demonstrable by the means provided by the system itself“. He maintains that this result can be established by the following simple argument: „A demonstration in S is valid only if it is established that S is consistent. But in this case the thesis to be proved is „ S is consistent“. Hence in order to prove this thesis it is necessary to have it already. So a demonstration of our thesis reduces to a vicious circle and hence is impossible“. As Church has pointed out [J. symbolic. Logic 14, 142 (1949)] in a review of one of the author's earlier papers this argument is „(at most) an objection against the importance of a consistency proof of a system S carried out within S itself“ and clearly does not prove that such a demonstration is formally impossible, which was the content of Gödel's theorem. The author refers to this review of Church's and although he admits that his result does not exhaust the content of Gödel's argument yet he still believes that Church's comment does not invalidate this proof of the fundamental result of Gödel. It may therefore be worth repeating here that Gödel's result was a purely syntactic one to the effect that a certain „arithmetic“ proposition (namely that $A \ \& \ \bar{A}$ is not provable in S) could not be derived by the formal rules of S . It was not concerned with whether such a derivation was in any sense „valid“ or „true“. It seems to the reviewer that the author is confusing two different kinds of consistency — the „formal“ consistency as defined above, and consistency in the sense that the theorems of the system are „true“ with

respect to a certain interpretation. The remainder of the paper is marred by this same confusion. *Shepherdson.*

Lyndon, R. C.: Identities in two-valued calculi. Trans. Amer. math. Soc. **71**, 457—465 (1951).

Das Problem, für jede endliche Algebra (im Birkhoffschen Sinne) ein Axiomensystem aus Identitäten zu finden, wird für 2-elementige Algebren gelöst. Nach E. Post (Two-valued iterative systems of mathematical logic, Princeton 1941) lassen sich alle Typen dieser Algebren übersehen, die Existenz endlicher Axiomensysteme ist aber bemerkenswerterweise nicht trivial. *Paul Lorenzen.*

Rose, Alan: Systems of logic whose truth-values form lattices. Math. Ann. **123**, 152—165 (1951).

Die klassische Aussagenlogik beruht auf einer Matrix mit zwei Wahrheitswerten, die eine Boolesche Algebra bilden. Seit Łukasiewicz wurden allgemeiner logische Systeme betrachtet, deren Wahrheitswerte eine geordnete Menge (Kette) bilden, wobei die Disjunktion \vee durch das Maximum und die Konjunktion \wedge durch das Minimum der Wahrheitswerte interpretiert werden. G. Birkhoff hat vorgeschlagen, noch allgemeiner die Wahrheitswerte einem Verbande L zu entnehmen. Verf. weist hin auf die mögliche Bedeutung der entstehenden aussagenlogischen Systeme für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Quantenmechanik. \vee wird durch die verbandstheoretische Vereinigung, \wedge durch den Durchschnitt interpretiert. Die Interpretation von \rightarrow und \odot (Negation) und weiterer aussagenlogischer Verknüpfungen $\bar{\wedge}_i$ erhält Verf. durch Verallgemeinerung von Funktionen, die Słupecki [Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska **1**, Nr. 3, Sect. F 193 (1946)] eingeführt hat. Der als endlich vorausgesetzte Verband L bestehe aus den Elementen $0, I, a_1, \dots, a_{m-2}$. Die aussagenlogischen Verknüpfungen $\rightarrow, \odot, \bar{\wedge}_i$ ($i = 1, \dots, m-2$) sollen der Reihe nach interpretiert werden durch die Matrixfunktionen $C(a, b), N(a), D_i(a)$, die wie folgt erklärt werden: $C(a, b) = b$ für $a = I$, sonst $= I$; $N(a) = 0$ für $a = I$, sonst $= I$; $D_i(a) = a_i$ für $a = I$, $= I$ für $a = a_i$, sonst $= a$. Mit Hilfe eines Theorems von Post [Amer. J. Math. **43**, 163 (1921)] wird gezeigt, daß man mit $\rightarrow, \odot, \bar{\wedge}_1, \dots, \bar{\wedge}_{m-2}$ jede Matrixfunktion darstellen kann (Lösung des Repräsentantenproblems; functional completeness). Nimmt man I als ausgezeichnetes Matricelement, so wird eine Menge von Identitäten definiert. Für diese Menge wird eine Axiomatisierung mit Hilfe von endlich vielen Axiomenschemata angegeben, wobei als einzige Schlußregel die Abtrennungsregel zugelassen ist. Der Beweis verwendet die bekannte Axiomatisierung der zweiwertigen Logik von Łukasiewicz, sowie entscheidend ein Ergebnis von Rosser und Turquette [J. symbolic Logic **10**, 61 (1945)]. Charakteristisch für die Beweise für die Lösung des Repräsentantenproblems und für die Axiomatisierbarkeit ist die Zwischenschaltung einer einfach geordneten Matrix. — Adjungiert man eine Nichtidentität zu den Axiomen, so wird jeder Ausdruck ableitbar (strong completeness). — Zum Schluß gibt Verf. eine Interpretation eines solchen Systems mit Hilfe gewisser geordneter Elementetripel einer Booleschen Algebra. *Hans Hermes.*

Yonemitsu, Naoto: On systems of strict implication. Tôhoku math. J., II. Ser. **3**, 48—58 (1951).

Durch eine leichte Modifikation ($p < q \cdot \diamond p : < \cdot \diamond q$ wird durch $\sim \diamond (p \cdot \sim q) \cdot \diamond p : < \cdot \diamond q$ ersetzt) des Systems von Vredenduin (dies. Zbl. **21**, 98) entsteht ein System (V_2) , das Lewis' System S_2 nahesteht, in dem aber eine Reihe von Aussagen „paradoxen“ Charakters nicht gelten, so z. B. nicht die sogar in S_1 ableitbaren: $\sim \diamond p \cdot \odot \cdot p < q, \sim \diamond \sim p \cdot \odot \cdot q < p$. — Vergleich mit einem System von Emch (dies. Zbl. **14**, 193). Erweiterungen von V_2 , in denen ebenfalls die Paradoxien nicht ableitbar sind. *Gisbert Hasenjaeger.*

Crespo Pereira, Ramón: Über die Schrödersche Algebra der Logik. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. **11**, 222—239 (1951) [Spanisch].

Exposé de notions élémentaires classiques sur l'algèbre de Boole d'après le tome I de l'Algebra der Logik de Schröder (1890). *Jacques Riguet.*

Beth, E. W.: A topological proof of the theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **54**, 436—444, Indagationes math. **13**, 436—444 (1951).

A. Mostowski gab in seiner Darstellung (dies. Zbl. **34**, 148) des Gödelschen Beweises [Monatsh. Math. Phys. **37**, 349—360 (1930)] außer kleineren Abänderungen in der Anordnung folgende wesentliche Variante: der Schluß von der Unerfüllbarkeit

einer „unendlichen Konjunktion“ von freien Ausdrücken, die der zu widerlegenden Formel A zugeordnet ist, auf die Unerfüllbarkeit einer endlichen Konjunktion, deren Negation als Ausgangspunkt für die Widerlegung von A dient, ist eine Anwendung der Kompaktheit (in der Form des Cantorsche Durchschnitssatzes) des Raumes der Attribute (Relationen) mit der schon früher (dies. Zbl. 29, 100) eingeführten Topologie. Genauer ist ein Punkt dieses Raumes bestimmt durch eine Menge von Primformeln $F^i z_1 \cdots z_i$, wo z_1, \dots, z_i Ziffern sind. — Verf. betrachtet nun auch mit \forall beginnende geschlossene Formeln als Primformeln (\exists wird definiert). Dann entspricht der Unerfüllbarkeit einer Menge M von geschlossenen Formeln (die keine Ziffern enthalten) die „aussagenlogische Unerfüllbarkeit“ von $M \cup Q_1 \cup Q_2$, wo Q_1 die Menge aller geschlossenen Formeln der Form $\forall x H_i(x) \rightarrow H_i(z)$ (z eine beliebige Ziffer) und Q_2 die Menge aller „Formeln“ $\bigwedge_z H_i(z) \rightarrow \forall x H_i(x)$ ist. Es sei $s(i)$ eine geeignet zu wählende zahlentheoretische Funktion und Q'_2 die Menge der Formeln $H_i(s(i)) \rightarrow \forall x H_i(x)$; dann ist mit $M \cup Q_1 \cup Q_2$ erst recht $M \cup Q_1 \cup Q'_2$ aussagenlogisch unerfüllbar. Die Anwendung des Heine-Borelschen Satzes liefert endliche Teilmengen M^* von M , Q_1^* von Q_1 , Q_2^* von Q_2 , so daß $M^* \cup Q_1^* \cup Q_2^*$ aussagenlogisch unerfüllbar. Ersetzt man nun jede Ziffer z durch die Variable x_z , so erhält man den Ansatz zur Ableitung eines prädikatenlogischen Widerspruchs in M^* , also in M .

Korrigenda: Nach einer Mitteilung des Verf. an den Ref. sind die Mengen Q_1 und Q_2 abzuändern in: Q_1 = Menge aller geschlossenen Formeln $\forall x_n H_i(x_n) \rightarrow H_i(z)$, Q_2 = Menge aller geschlossenen „Formeln“ $\bigwedge_z H_i(z) \rightarrow \forall x_n H_i(x_n)$, für alle Paare i, n , so daß x_n nicht gebunden in $H_i(x)$. [Hierdurch wird berücksichtigt, daß für $m \neq n$ $\forall x_m H_i(x_m)$ und $\forall x_n H_i(x_n)$ verschiedene „Primformeln“ sind. Ref.] Jede Ziffer z ist zu ersetzen durch x_{z+z} (statt durch x_z), wobei Z so bestimmt wird, daß keine der Variablen an diesen Stellen gebunden ist.

Gisbert Hasenjaeger.

Kalmár, László: Contributions to the reduction theory of the decision problem.

III. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 2, 19—37 und russische Zusammenfassg. 38 (1951).

[Part I. see this Zbl. 39, 246 and II. Surányi, Acta math. Acad. Sci. Hungar. 1, 261—270 (1950).] Kalmár and Surányi (this Zbl. 29, 99) have shown that any formula of the first order predicate calculus is equivalent, as far as satisfiability is concerned, to a formula containing only a single, binary, predicate and with a prefix $(x_1)(x_2)(x_3)(E x_4) \dots (E x_n)$. Kalmár has proved in Part I (this Zbl. 39, 246) that a similar result holds for the prefix $(x_1)(x_2)(E x_3) \dots (E x_{n-1})(x_n)$. In this paper he shows that the same is true for the prefix $(x_1)(E x_2)(E x_3) \dots (E x_{n-2})(x_{n-1})(x_n)$, in which the order of the existential quantifiers, (i. e. the number of universal quantifiers preceding them) is 1. The same result cannot be true for the prefix $(E x_1)(E x_2) \dots (E x_{n-3})(x_{n-2})(x_{n-1})(x_n)$, in which the order of the existential quantifiers is zero, since there is a recursive algorithm for deciding whether such a formula is satisfiable while there is demonstrably no recursive algorithm for deciding the satisfiability of all formulae of the first order predicate calculus. However the author points out that the order of some of the existential quantifiers can be reduced to zero; a slight modification of his proof of the above theorem giving the result that for any formula A it is possible to construct a formula B , satisfiable if and only if A is satisfiable, containing a single, binary, predicate and with a prefix of the form $(E x_1) \dots (E x_n)(y_1)(E x_{n+1}) \dots (E x_{n+48})(y_2)(y_3)$, i. e. with only 48 existential quantifiers of order 1. He conjectures that 48 is probably much larger than the best possible value. As a corollary of the main theorem the author proves that if the fixed identity predicate $x = y$ is allowed to figure in the final formula as well as a single, binary, predicate variable then the prefix can be taken as $(x_1)(E x_2) \dots (E x_{n-1})(x_n)$, with only two universal quantifiers. An arithmetic method is used for the proof of the theorem; the domain of individuals is taken as the set of non-negative integers divisible by 3, integers of the form $3k - 1$ are used for ordered pairs and triples of individuals and integers of the form $3k + 1$ replace the predicates of the original formula. In formalising the recursion equations for the arithmetic functions involved considerable subtlety is required to avoid the use of more than three universal quantifiers or of existential quantifiers of order higher than 1.

Shepherdson.

Kreisel, G.: On the interpretation of non-finitist proofs. I. J. symbolic Logic 16, 241—267 (1951).

Verf. beschäftigt sich mit zahlentheoretischen Formalismen, die eine abzählbare Reihe von Symbolen für bestimmte Zahlen, für individuelle Prädikate (darunter das Gleichheits-

zeichen) und zahlentheoretische Funktionen, sowie Zahlenvariable, evtl. auch Funktionsvariable und die Hilbertsche ε -Funktion enthalten. Die Aussagen der Theorie sollen in der üblichen Weise unter Benutzung der Aussageverknüpfungen und der Zahlenquantoren gebildet sein. Ferner soll ein Verfahren existieren, das jedem konstanten Term eindeutig ein Zahlzeichen und jeder Formel ohne freie Variable, bei Formeln mit Aussageverknüpfungen in Übereinstimmung mit der Theorie der Wahrheitsfunktionen, den Wert „richtig“ oder „falsch“ zuordnet. Die letzte Zuordnung soll so sein, daß $a = b$ den Wert „richtig“ oder „falsch“ erhält, je nachdem a und b dieselben Zahlzeichen entsprechen oder nicht. Ferner sollen zwei Formeln \mathfrak{A} und \mathfrak{A}' den gleichen Wahrheitswert erhalten, wenn \mathfrak{A}' aus \mathfrak{A} durch Ersetzung eines Terms a durch b entsteht und $a = b$ den Wert „richtig“ erhält. Formalismen in diesem Sinne wären also die bekannten der reinen Zahlentheorie. Die Formulierung in der Arbeit bezieht sich noch auf etwas allgemeinere Formalismen, die sich aber auf die angegebenen zurückführen lassen. — Eine Formel, die an Variablen nur freie Zahlenvariable (und evtl. freie Funktionsvariable) enthält, heißt verifizierbar, wenn sie für jedes System von eingesetzten Zahlentermen (und evtl. berechenbaren, also quasirekursiven Funktionen) den Wert „richtig“ ergibt. Unter Formeln, die einen unmittelbaren „finiten“ Sinn haben, versteht der Verf. solche, die keine Variablen enthalten oder verifizierbar sind. (Mit dem Gebrauch des Wortes „finit“ in der Hilbertschen Beweistheorie würde sich das nicht decken, obwohl Beziehungen bestehen.) Das Ziel der Abhandlung ist, Formeln, die in einem System der obigen Art bewiesen werden (wobei es natürlich auf die Art der Grundformeln und der Schlußregeln ankommt), durch „finite“ Formeln zu interpretieren. Genauer wird unter der Interpretation eines derartigen Systems Σ folgendes verstanden: Es liegt eine berechenbare Funktion $\varphi(n, a)$ vor, die jeder Formel \mathfrak{A} von Σ mit der Gödel-Nummer a eine Reihe von Formeln A_n ohne gebundene Variable mit den Gödel-Nummern $\varphi(n, a)$ zuordnet und folgende Eigenschaften besitzt: Wenn \mathfrak{A} in Σ beweisbar ist, läßt sich aus dem Beweis ein n finden, so daß A_n verifizierbar ist. Wenn \mathfrak{A} in Σ beweisbar ist, läßt sich für jedes n eine Substitution für die freien Variablen von A_n finden, so daß A_n falsch wird. Wenn sich \mathfrak{B} aus \mathfrak{A} in Σ ableiten läßt, finden wir eine Funktion $g(n)$, so daß $B_{\varphi(g(n))}$ verifizierbar ist, wenn A_n verifizierbar ist. — Als triviale Interpretation gibt Verf. für ein widerspruchsfreies System mit Deduktionstheorem für eine Formel \mathfrak{A} die Interpretation $\text{Prov}_\Sigma(m, e(a))$. Hierbei ist $e(a)$ die Nummer von \mathfrak{A} , wenn a die von \mathfrak{A} ist. $\text{Prov}_\Sigma(m, n)$ ist dann und nur dann richtig, wenn m die Nummer eines Beweises ist, dessen Endformel die Nummer n hat. — Die Bezeichnung „trivial“ wird nicht weiter erklärt, scheint sich aber darauf zu beziehen, daß bei dieser Interpretation eine verifizierbare Formel nicht sich selbst als Interpretation hat, oder etwa $(E x) \mathfrak{A}(x)$ nicht durch eine Disjunktion von Formel $A(a_i)$ interpretiert wird. Interpretationen, die die letzte Eigenschaft haben, werden für einen Formalismus der reinen Zahlentheorie ohne vollständige Induktion angegeben und zwar 1. auf Grund des Herbrandschen Satzes unter Benutzung der Ausführungen in Hilbert-Bernays II, § 3,3, 2. unter Benutzung der in Hilbert-Bernays II, § 1 und § 2 angegebenen Methoden der ε -Elimination. Es schließt sich ein entsprechendes Verfahren für einen weiteren zahlentheoretischen Formalismus, der auch die vollständige Induktion enthält, an. Hierbei wird die vom Ref. angegebene Methode der ε -Elimination für diesen Formalismus (dies. Zbl. 22, 292) gebraucht. Das Verfahren wird skizziert, während zusätzliche genauere Ausführungen in einem zweiten Teile der Abhandlung folgen sollen.

Wilhelm Ackermann.

Algebra und Zahlentheorie.

Allgemeines. Kombinatorik:

● Maennchen, Ph.: „Geheimnisse“ der Rechenkünstler. 5. Aufl. (Math.-Phys. Bibl. I 13.) Leipzig: Verlagsgesellschaft B. G. Teubner 1951.

● Lietzmann, W.: Riesen und Zwerge im Zahlenreich. 4. Aufl. (Math.-Phys. Bibl. I 25.) Leipzig: Verlagsgesellschaft B. G. Teubner 1951.

Saxena, P. N.: A simplified method of enumerating latin squares by Mac Mahon's differential operators. I: The 6·6 latin squares. II: The 7·7 latin squares. Indian Soc. Agricultural Statistics 2, 161—188 (1950); 3, 24—79 (1951).

Un carré latin $n \cdot n$ est une matrice carrée telle que chacun des éléments 1, 2, 3, ..., n figure une fois et une seule dans toute ligne et dans toute colonne. Si la première ligne et la première colonne sont dans l'ordre naturel le carré est dit réduit. MacMahon, Combinatory analysis, Cambridge 1915, a donné une méthode générale pour l'énumération des carrés réduits de côté n . Mais celle-ci entraînerait, à partir du 5^e ordre, des calculs impraticables. L'A. simplifie la méthode de MacMahon en introduisant des sousensembles „equinumeriques“. Deux théorèmes permettent de les prospecter. Dans la première partie on retrouve ainsi le résultat, 9408, de Frolov pour $n = 6$. Dans une seconde partie les mêmes réductions permettent de ramener notamment de 663 à 40 (page 27) le nombre des termes engendrées par un même opérateur. Ce „tour de force“ rend abordable la détermination de l'effectif des carrés 7·7. Mais les cal-

culs, développés sur 55 pages, représentent une somme de travail considérable. L'A. retrouve la valeur $L_7 = 16942080$ déjà obtenue par le rapporteur en 1948 (ce Zbl. 35, 289), mais n'explique pas l'omission de 14112 carrés dans les listes de Norton (Sade, ce Zbl. 42, 248). La valeur L_7 , également retrouvée, en suivant une autre voie, par M. Yamamoto, peut être regardée comme définitivement acquise.

Albert Sade.

Hall, Marshall and H. J. Ryser: Cyclic incidence matrices. Canadian J. Math. 3, 495—502 (1951).

Es sei $0 < \lambda < k < v$. Aus v Elementen bilde man v Mengen S_1, \dots, S_v von je k verschiedenen Elementen; je zwei Mengen sollen λ Elemente gemeinsam haben; dann ist $\lambda = k(k-1)/(v-1)$. Das Schema wird durch eine v -reihige quadratische Inzidenzmatrix eindeutig dargestellt, in der jedem S_i eine Zeile, jedem Element eine Spalte entspricht, Inzidenz durch 1 und Nicht-Inzidenz durch 0 ausgedrückt wird. Zunächst wird der Fall zyklischer Inzidenzmatrizen behandelt und bewiesen: Ein Schema der verlangten Art kann nur dann bestehen, wenn für jeden positiven Teiler e von v die Gleichung $x^2 = (k-\lambda)y^2 + (-1)^{\frac{1}{2}(e-1)}ez^2$ nicht-triviale ganzzahlige Lösungen besitzt. Für den Beweis werden die Eigenschaften der Funktion $\theta(x) = x^{d_1} + \dots + x^{d_k}$ herangezogen, wobei d_1, \dots, d_k ein „difference set“ zum Modul v ist (Definition des Begriffes bei S. Chowla, dies. Zbl. 32, 266). Weiterhin werden „Multiplikatoren“ eines difference set wie folgt definiert: Wenn für ein geeignetes s die Restklassen $d_1 + s, \dots, d_k + s$ mod v sich von den Restklassen $t d_1, \dots, t d_k$ nur durch ihre Anordnung unterscheiden, so heißt t ein „Multiplikator“ von d_1, \dots, d_k . Bewiesen wird: 1. Ist eine Primzahl p Teiler von $k-\lambda$ und ist $p > \lambda$, so ist p Multiplikator. 2. Ist t Multiplikator, $t-1$ zu v teilerfremd, q eine ungerade in v enthaltene Primzahl und t eine primitive Einheitswurzel mod q , so ist $k-\lambda$ ein Quadrat. 3. Ist t ein Multiplikator, der mod v zum Exponenten e gehört, so wird das zugehörige „difference set“ durch die Abbildung $z \rightarrow zt - s$ so permutiert, daß die Längen der Zyklen der Permutation Teiler von e sind. Die Anwendbarkeit der Sätze wird an fünf Beispielen demonstriert.

Friedrich Wilhelm Levi.

Lineare Algebra. Polynome:

Amato, Vincenzo: Richiami di analisi algebrica. Repertorio Mat. 89—114 (1951).

Dieses Kapitel aus einem Repertorium behandelt: Die einfachsten Begriffe der Kombinatorik, die Determinanten (nur die grundlegenden Sätze einschließlich der Entwicklung nach den Elementen einer Reihe), lineare Gleichungen im allg. Fall mit Beweis; Vandermondesche Det. und Satz, daß ein Polynom n -ten Grades nur n Wurzeln haben kann, Def. der mehrfachen Nullstellen, Fundamentalsatz der Algebra mit Beweis, Produktzerlegung der Polynome (auch in reelle Faktoren), die Sätze von Budan-Fourier, Descartes und Sturm über die Anzahl reeller Wurzeln in einem Intervall; elementarsymmetrische Funktionen, Newtonsche Formeln für Potenzsummen, Beweis, daß jede ganze symmetrische Funktion eine ganze Funktion der elementarsymmetrischen Funktionen ist; größter gemeinsamer Teiler von Polynomen, Resultante, Diskriminante; Auflösung der Gleichungen 3. und 4. Grades, Satz von Bézout; Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen; Interpolationsformeln von Lagrange und Newton.

Gustav Lochs.

Fréchet, Maurice: Solutions non commutables de l'équation matricielle $e^{A+B} = e^A e^B$. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1339—1340 (1951).

Verf. hat die Gesamtheit der Paare A, B zweireihiger Matrizen mit $e^{A+B} = e^A e^B$ trotz $AB \neq BA$ aufgestellt und gibt daraus ein besonders einfaches Beispiel.

Gustav Lochs.

Ostrowski, Alexandre: Sur les matrices peu différentes d'une matrice triangulaire. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1558—1560 (1951).

Es werden Sätze über n -reihige Matrizen der Gestalt $A = (a_{\mu\nu})$ mit $|a_{\mu\nu}| \leq m$

($\mu > \nu$), $|a_{\mu\nu}| \leq M$ ($\mu < \nu$) angekündigt, welche die Eigenwerte λ_κ und die Determinante D mittels m und M abschätzen. Z. B.: Sei $0 < m < M$, $\delta = (M^{1/n} - m M^{1/n}) \cdot (M^{1/n} - m^{1/n})^{-1}$. Dann liegt jedes λ_κ in mindestens einem der n Kreise $|\lambda_\kappa - a_{\nu\nu}| \leq \delta$, und δ ist die kleinste nur von m und M abhängige Schranke mit dieser Eigenschaft. Ferner werden die Bedingungen für m und M ermittelt, unter denen alle diejenigen Matrizen A der genannten Gestalt, für die außerdem $|a_{\nu\nu}| \geq 1$ ($1 \leq \nu \leq n$) ist, $D \neq 0$ haben. Weiter werden Abschätzungen von A^{-1} nach oben angegeben. Schließlich wird das zentrale Ergebnis über $D \neq 0$ auf die umfassendere Klasse der Matrizen $B = (b_{\mu\nu})$ mit $|b_{\mu\nu}| \leq m_\mu$ ($\mu > \nu$), $|b_{\mu\nu}| \leq M_\mu$ ($\mu < \nu$) verallgemeinert, wobei m_μ und M_μ $2n - 2$ gegebene Zahlen bedeuten.

Helmut Wielandt.

Silva, Joseph A.: A theorem on cyclic matrices. *Duke math. J.* 18, 821–825 (1951).

Aus den quadratischen Matrizen A_1, A_2, \dots, A_n der Ordnung $n_1 \geq 1$ mit unbestimmten Elementen sei die Matrix $A = (A_{j-i+1})$ [$i, j = 1, \dots, n$; $A_r = A_s$ für $r \equiv s \pmod{n}$] gebildet. Für $n = p^t m$, p Primzahl, $p \nmid m$, $D_r = \sum_{s=0}^{p^t-1} A_{s m+r}$ ($r = 1, 2, \dots, m$); $D = (D_{j-i+1})$ [$i, j = 1, \dots, m$; $D_r = D_s$ für $r \equiv s \pmod{m}$] beweist Verf. folgenden Determinantensatz:

$$\det A \equiv (\det D)^{p^t} \pmod{p}.$$

Als einfache Folgerung aus demselben gibt er den weiteren Satz: Für die Determinante der zyklischen Matrix $A = (a_{j-i+1})$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$) mit $a_r = a_s$ für $r \equiv s \pmod{n}$ gilt

$$\det A \equiv \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \alpha_i^{j-1} a_j \right)^{p^t} \pmod{p},$$

wobei mit α_i die m verschiedenen n -ten Einheitswurzeln in dem Galoisfeld $GF(p^k)$ für ein passendes k bezeichnet sind. Für den letzteren Satz, dessen Spezialfall $n = p$, $t = m = 1$ von Oystein Ore [*Duke math. J.* 18, 343 (1948)] bewiesen wurde, wird noch ein direkter Beweis angedeutet.

Erich Schönhardt.

Flanders, Harley: Elementary divisors of AB and BA . *Proc. Amer. math. Soc.* 2, 871–874 (1951).

1. Let A, B be $n \times m, m \times n$ matrices over a field. The nullity of $(AB - \alpha E)$ is the same as that of $(BA - \alpha E)$ if α is any number of the field ($\alpha \neq 0$). [If B is non-singular, $m = n$, this is even true when $\alpha = 0$.] 2. Let $C = AB$ have 0 for a characteristic root; let the elementary divisors of C which correspond to 0 be the (n_1, n_2, \dots) powers of t ; let $D = BA$; define (n'_1, n'_2, \dots) similarly. Then 1° the elementary divisors of C distinct from those last mentioned are the same as the elementary divisors of D distinct from those last mentioned; 2° $|n_j - n'_j| \leq 1$, where n_j, n'_j means 0 if not otherwise defined. 3. Conversely, if 1°, 2° are satisfied, there exist A, B such that $C = AB, D = BA$. 4. Let N be an $m \times m$ matrix; $NA = 0$, N nilpotent ($N^m = 0$). Then the elementary divisors of $AB + N$ which do not have 0 for a root are those AB . W. T. Reid (this Zbl. 39, 249) had proved that the matrices $AB, AB + N$ have the same characteristic polynomials.

J. L. Brenner.

Aržanyč, I. S.: Erweiterung einer Methode von A. N. Krylov auf Polynom-matrizen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 81, 749–752 (1951) [Russisch].

Let us use latin letters to denote n -rowed matrices. Consider $\Phi(\lambda) = \lambda^s I - \sum_{\sigma=1}^s \lambda^{s-1} A_\sigma$ and let its determinant be $|\Phi(\lambda)| = \lambda^{sn} + \sum_{\pi=1}^{sn} \lambda^{sn-\pi} \alpha_\pi$. Let $m = s(n-1)$ and $\Psi(\lambda) = \lambda^m I + \sum_{\mu=1}^m \lambda^{m-\mu} B_\mu$ be the adjoint matrix of $\Phi(\lambda)$. Then it is known that (*) $\Phi(\lambda) \Psi(\lambda) = |\Phi(\lambda)| I$. It can be verified that $B_\mu =$

$A^\mu + \alpha_1 A^{\mu-1} + \dots + \alpha_{\mu-1} A^1 + \alpha_\mu I$, where A^μ is defined by the recurrent formula $A^{(-p)} = 0$ for $p > 0$, $A^0 = I$, $A^\mu = A_1 A^{\mu-1} + A_2 A^{\mu-2} + \dots + A_s A^{\mu-s}$. Let $A_\sigma^\mu = A_\sigma A^\mu + A_{\sigma+1} A^{\mu-1} + \dots + A_s A^{\mu-(s-\sigma)}$, $\mu = 1, \dots, m$, $\sigma = 1, 2, \dots, s$. We deduce from (*) that

$$A_\sigma^m + \alpha_1 A_\sigma^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} A_\sigma^1 + \alpha_m A_\sigma + \alpha_{m+\sigma} I = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, s$$

which plays the main role in the paper. Next, the author applies the case $s = 2$ to the theory of oscillations of material system. Finally he passes to the form of Krylov.

Loo-Keng Hua.

Gyires, B. und O. Varga: Anwendung von p -Vektoren auf derivierte Matrizen.

Publ. math., Debrecen 2, 137—145 (1951).

Let F be any field. Let $C_p(\mathfrak{A})$ be the p -th adjugate of the matrix \mathfrak{A} over the field F . If \mathfrak{A} is nonsingular and $C_p(\mathfrak{A}) = C_p(\mathfrak{B})$, then $\mathfrak{A} = \varrho \mathfrak{B}$, where $\varrho^p = 1$. In fact, from the multiplicative property of $C_p(\mathfrak{A})$, it is enough to prove the theorem for \mathfrak{B} being the identity. Let the characteristic roots of \mathfrak{A} be $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Then those of $C_p(\mathfrak{A})$ are $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p}$. From $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p} = 1$ for all choices of i_1, \dots, i_p from $1, 2, \dots, n$, we deduce $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \varrho$ and $\varrho^p = 1$. Easily excluding the case with nonsimple elementary divisors, we have the theorem. The author proves this theorem in the real field by a different method, and he establishes also that for orthogonal \mathfrak{A} , $C_p(\mathfrak{A})$ is orthogonal and conversely. Loo-Keng Hua.

MacDuffee, C. C.: Families of Lorentzian matrices. Proc. Amer. math. Soc. 2, 794—797 (1951).

If J is a real symmetric orthogonal matrix, $J = J^T = J^{-1}$, then all matrices A for which $A^T J A = J$ constitute the Lorentzian group of J , a generalization of the orthogonal group. The main result proved is that if A is a function of the parameter t , and $dA/dt = P(t) A$, where $P(t)$ is a continuous real matrix function of t and $P(t) J$ is skew for all t in an interval (a, b) , then if A is Lorentzian with respect to J for any value t in the interval (a, b) it is Lorentzian throughout the interval.

W. W. Sawyer.

Rédei, L.: Eine Determinantenidentität für symmetrische Funktionen. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 2, 105—106 und russische Zusammenfassg. 107 (1951).

x_1, \dots, x_n seien Unbestimmte; für $i = 0, 1, \dots$ sei p_i deren i -te Potenzsumme und s_i die elementarsymmetrische Funktion i -ten Grades, $s_0 \equiv 1$, $s_i \equiv 0$ für $i > n$ und $i < 0$. Der Diskriminantenformel $(1) \det p_{i+k} = \prod_{1 \leq i < k \leq n} (x_i - x_k)^2$ wird die ähnlich gebaute Formel

$$(2) \quad \det (s_{i-k} - s_{i+k}) = \prod_{1 \leq i < k \leq n} (1 - x_i x_k) \quad (n \geq 2, \text{ ganz})$$

zur Seite gestellt. In (1) ist die Determinante n -reihig und in (2) $(n-1)$ -reihig. Sie kann formal ebenfalls n -reihig geschrieben werden, denn sie ist die zur Matrixdifferenz

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ s_1 & \searrow & & & \\ & 0 & & & \\ \cdot & & \searrow & & \\ \cdot & & & \searrow & \\ s_{n-2} \cdots s_1 & & & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_3 & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ s_n & & & 0 \end{pmatrix}$$

gehörige Determinante. — Mit den elementarsymmetrischen Funktionen S_j , $j = 1, \dots, m$, $\left[m = \binom{n}{2} \right]$ der Produkte $x_i x_k$ ($1 \leq i < k \leq n$) lautet (2):

$$(2') \quad \det (s_{i-k} - s_{i+k}) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu S_\nu, \quad (S_0 \equiv 1, \quad n \geq 2).$$

Um die S_j bequem durch die s_i ausdrücken zu können, wird (2') noch durch Einführung einer Hilfsvariablen z homogenisiert und anschließend z^2 durch z ersetzt.

Dies ergibt die Gleichung

$$\det(z^k s_{i-k} - s_{i+k}) = \sum_{v=0}^m (-1)^v z^{m-v} S_v.$$

Herbert Bilharz.

Hsu, L. C.: Some remarks on a generalized Newton interpolation formula. Math. Student 19, 25—29 (1951).

In einer früheren Note [Sci. Rep. nat. Tsing-Hua Univ. Ser. A 5, 139—149 (1948)] gab Verf. die nachstehende Verallgemeinerung ($n > 1$) der Newtonschen Interpolationsformel ($n = 1$):

$$\sum_{(m)} \prod_{i=1}^n f(x_i) = \left(\sum_{v=0}^m \Delta^v f(0) \cdot \Delta^v \right)^n \binom{x}{m}_{x=m+n-1},$$

wobei $f(x)$ für $x = 0, 1, \dots, m$ erklärt sei und auf der linken Seite über alle ganzzahligen $x_i \geq 0$ der Gleichung $\sum_{i=1}^n x_i = m$ zu summieren ist (Δ , wie üblich, der Differenzoperator zur Spanne 1). — Es wird nun gezeigt, daß diese Formel auch für die Summation homogener Produkte von Elementen eines kommutativen Ringes formuliert werden kann. Ferner wird bewiesen: Ist $f(x)$ ein Polynom k -ten Grades, dann gilt (mit dem Operator $E \equiv 1 + \Delta$)

$$\sum_{(m)} \prod_{i=1}^n f(x_i) = \left(\sum_{v=0}^k \Delta^v f(-v-1) \cdot E^v \right)^n \binom{x}{m}_{x=m+n-1}.$$

Als Anwendungen dieser Formel folgen zunächst die Beispiele

1. $f(x) = x^2$, $n = 5 \leq N$: $\sum_{\substack{x_1 + \dots + x_5 = N \\ x_i \geq 0, \text{ gZ}}} \prod_{i=1}^5 x_i^2 = (-E + 2E^2)^5 \binom{x}{N-5}_{x=N-1};$
2. $f(x) = x^3$, $n \leq N$:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x_1 + \dots + x_n = N \\ x_i \geq 0, \text{ gZ}}} \prod_{i=1}^n x_i^3 &= (E - 6E^2 + 6E^3)^n \binom{x}{N-n}_{x=N-1} \\ &= \sum_{v=0}^n 6^v \binom{n}{v} \binom{N+n+v-1}{2n+2v-1}; \end{aligned}$$

und zum Abschluß die zahlentheoretische Aussage: Ist p eine ungerade Primzahl und sind $n, N (\geq n)$ beliebige natürliche Zahlen, dann besteht die Kongruenz

$$\sum_{\substack{x_1 + \dots + x_n = N \\ x_i > 0, \text{ gZ}}} \prod_{i=1}^n x_i^{p-1} \equiv (1 - E^{p-1})^n \binom{x}{N}_{x=N+n-1} \pmod{p}.$$

Diese enthält den Fermatschen Satz [$N^{p-1} \equiv 1(p)$], denn für $n = 1$, $(N, p) = 1$ ist

$$(1 - E^{p-1}) \binom{x}{N}_{x=N} = \binom{N}{N} - \binom{N+p-1}{N} = 1 - \binom{N+p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Herbert Bilharz.

Mohr, Ernst: Der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra als Satz der reellen Analysis. Math. Nachr. 6, 65—69 (1951).

A proof is given of the theorem: Let $a(x) \equiv a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n (n > 0)$. Every polynomial $a(x)$ can be written as the product of prime factors of the form $k + x$ and $p + 2qx + x^2$, $q^2 < p$.

Evelyn Frank.

Block, H. D. and H. P. Thielman: Commutative polynomials. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 2, 241—243 (1951).

Verff. betrachten das „funktionale Produkt“ $F[G(x)]$ zweier Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ und legen sich die Frage vor, wann in einer Folge von Polynomen $p_n(x)$ [Grad von $p_n(x)$ gleich n , $n = 1, 2, \dots$] je zwei Polynome miteinander vertauschbar im Sinne dieser symbolischen Produktbildung sind. Sie zeigen: die einzigen (nicht-trivialen) Folgen mit dieser Eigenschaft sind

$$p_n(x) = A^{-1}((Ax + B)^n - B) \quad \text{und} \quad p_n(x) = A^{-1}\{\cos n \arccos(Ax + B) - B\}.$$

Wolfgang Hahn.

Amato, Vincenzo: Curve algebriche autoreciproche a gruppo di monodromia G_S . *Matematiche* 6, 113—118 (1951).

Im Anschluß an eine früher erschienene Arbeit (dies. Zbl. 39, 18) behandelt Verf. die reziproke algebraische Gleichung $f(z, u) = a_0(z) u^{2k} + a_1(z) u^{2k-1} + \dots + a_1(z) u + a_0(z) = 0$; bei passender Numerierung der Wurzeln u_i gilt $u_1 u_2 = u_3 u_4 = \dots = u_{2k-1} u_{2k} = 1$. Die Galoissche Gruppe der Gleichung ist der Normalisator G_S von $S = (u_1, u_2) \cdot (u_3, u_4) \cdot \dots \cdot (u_{2k-1}, u_{2k})$. Die Gleichung $f(z, u) = 0$ geht bei der quadratischen Transformation $y = u + u^{-1}$ in eine affektlose Gleichung $\varphi(z, u) = 0$ des Grades k in y über, und umgekehrt. *Wolfgang Gröbner.*

Parodi, Maurice: Application d'un théorème de M. Lidskii à la recherche des limites supérieure et inférieure des parties réelles des zéros d'un polynôme. *C. r. Acad. Sci., Paris* 233, 1411—1412 (1951).

Bekanntlich sind die Nullstellen des Polynoms $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ charakteristische Werte der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Die reellen Teile der Nullstellen von $f(z)$ fallen zwischen den kleinsten und größten charakteristischen Wert des symmetrischen Teiles von M . Daraus läßt sich ein Satz von Lidskij (dies. Zbl. 39, 10) folgern, daß die reellen Teile der Nullstellen des Polynoms $f(z)$ zwischen die Schranken $-\frac{1}{2}(a_1 + A_n) - \cos \frac{\pi}{n}$ und $\frac{1}{2}(-a_1 + A_n) + \cos \frac{\pi}{n}$ fallen, wo A_n die Form $A_n = \sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2 + a_3^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2}$ hat.

Gyula Sz.-Nagy.

Kuipers, L.: Note on the location of zeros of polynomials. II. *Simon Stevin* 28, 193—198 (1951).

In dieser Arbeit setzt der Verf. seine früheren Untersuchungen (dies. Zbl. 37, 9) fort und beweist 7 weitere Sätze, unter denen drei wesentliche Verallgemeinerungen eines Satzes vom Ref. (dies. Zbl. 32, 247, 2. Referat) sind. Unter den übrigen Sätzen seien ihrer Einfachheit wegen die Sätze angeführt: Liegen die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n -ten Grades im Kreise $|z - \zeta| \leq d$, so hat das Polynom $n f(z) + f'(z)$ im Falle $d < 1$ jede Nullstelle im Kreise $|z - \zeta| \leq d + 1$, im Falle $d > 1$ mindestens eine Nullstelle im Kreise $|z - \zeta| \leq d - 1$. Der letzte Satz der Arbeit bezieht sich auf ein Polynom von der Form $1 + a_p z^p + z^{2p} + a_{2p+1} z^{2p+1} + \dots + a_n z^n$. [Es scheint, daß die allgemeineren Ergebnisse vom Ref. (dies. Zbl. 32, 247, 1. Referat) dem Verf. unbekannt waren.]

Gyula Sz.-Nagy.

Breusch, Robert: On the distribution of the roots of a polynomial with integral coefficients. *Proc. Amer. math. Soc.* 2, 939—941 (1951).

Der absolute Wert des Produkts der außerhalb des Einheitskreises liegenden Nullstellen des Polynoms $f(z) \equiv z^r + a_1 z^{r-1} + \dots + a_r$ mit ganzzahligen Koeffizienten wurde von D. H. Lehmer (dies. Zbl. 7, 179) mit $\Omega(f)$ bezeichnet, falls dieser Wert zwischen 1 und $1 + \varepsilon$ ist. Im Anschluß an Lehmersche Resultate wird die Existenz irreduzibler nichtreziproker Polynome $f(z)$ mit $\Omega(f) > 1,179 \dots$ bewiesen.

Gyula Sz.-Nagy.

Sz.-Nagy, Gyula: Realitätsgrad und Realitätsstellen von komplexen Polynomen. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* 2, 99—102 und russische Zusammenfassg. 103 (1951).

Soit $f(z)$ un polynôme à coefficients complexes, de degré n ; si $f(z)$ a p zéros situés au-dessus de l'axe réel et q zéros situés au-dessous, et enfin m zéros réels, l'A. appelle degré de réalité de f le nombre $r = m + |p - q|$. Il montre qu'il existe alors au moins r valeurs réelles pour lesquelles $f(z)$ prend des valeurs réelles.

et que la différence entre le nombre w de ces valeurs et r est paire (il faut affecter certaines de ces valeurs d'une multiplicité). Il prouve aussi que si $q = 0$ et si $f(z)$ prend des valeurs réelles distinctes en deux points u, v de l'axe réel, alors on peut définir un domaine ne dépendant que de u, v et p où se trouve au moins une racine non réelle de $f(z) = 0$.

Jean Dieudonné.

Perron, Oskar: Über die Abhängigkeit von Polynomen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1950, 117—130 (1951).

Es werden die zwischen $k + 1$ Formen $f_v(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ($v = 0, 1, \dots, k$) in k Unbestimmten x_1, \dots, x_k bestehenden algebraischen Abhängigkeiten

$$\Sigma C_{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_k} f_0^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \dots f_k^{\lambda_k} = 0$$

untersucht. Offenbar genügt dabei die Betrachtung der in x_1, \dots, x_k homogenen Abhängigkeiten, da sich alle übrigen aus diesen additiv zusammensetzen. Ist m_v der Grad von f_v , so heiße der Homogenitätsgrad $m_0 \lambda_0 + m_1 \lambda_1 + \dots + m_k \lambda_k$ der Abhängigkeit ihre „Höhe“. Verf. beweist über die Höhe: 1. Sind die Koeffizienten der f_v Unbestimmte, so gibt es, wenn man von Normierungsfaktoren absieht, genau eine Abhängigkeit der Höhe $M = m_0 m_1 \dots m_k / d$ und keine von kleinerer ($d =$ größter gemeinsamer Teiler der m_v). — Für die in dieser Abhängigkeit auftretenden Koeffizienten gilt: 2. Bei geeigneter Normierung sind die Koeffizienten $C_{\lambda_0 \dots \lambda_k}$ (teilerfremde) ganzzahlige Polynome dieser Unbestimmten; insbesondere ist dann der Koeffizient $C_{0 \dots 0 M/m_v 0 \dots 0}$ bei f_v^{M/m_v} (bis auf einen nichtverschwindenden Zahlenfaktor) gleich der m_v / d -ten Potenz der Resultante der übrigen Formen $f_0, \dots, f_{v-1}, f_{v+1}, \dots, f_k$ ($v = 0, 1, \dots, k$). — Schließlich wird die Gesamtheit der Abhängigkeiten beschrieben durch: 3. Jede Abhängigkeit entsteht aus der genannten durch Multiplikation mit einem Polynom in den f_v . — Die Beweise stützen sich auf Eigenschaften der u -Resultante und den Satz von Bézout. Wesentliches Hilfsmittel sind genau dosierte Spezialisierungen von Unbestimmten; dabei wird die Verschiedenheit der m_v -ten Einheitswurzeln benutzt, so daß die Schlüsse bei Primzahlcharakteristik im allgemeinen nicht gelten. — Sind die Koeffizienten der f_v irgendwie spezialisiert, so bleiben die Aussagen 1 und 3 bestehen, sofern nur die weitergehende Spezialisierung $f_v = x_v^{m_v}$ noch möglich ist. Eine Abhängigkeit der Höhe M gibt es sogar in jedem Falle. — Die Aussage 2 beleuchtet die Bedeutung dieser Untersuchungen für die Eliminationstheorie, insbesondere für die zu erhoffende Auffindung eines Resultantensystems der Formen f_v in Gestalt von Koeffizienten algebraischer Abhängigkeiten.

Heinz Orsinger.

Ueno, Masato: On the normalization of bi-quadratic form. Kodai math. Sem. Reports 1951, 45—48 (1951).

Unter der „Normalform“ einer n -ären Form $f(x, y) = \sum_{ijkl} c_{ijkl} x_i x_j y_k y_l$, quadratisch in zwei Veränderlichen-Reihen x_1, \dots, x_n und y_1, \dots, y_n , versteht der Verf. die Form $g(x, y) = \sum e_{ik} x_i^2 y_k^2$, in der also nur die Quadrate der x und y auftreten. Es werden die Bedingungen dafür angegeben, daß $f(x, y)$ durch orthogonale Transformationen $x \rightarrow P(x')$ und $y \rightarrow Q(y')$ in $g(x', y')$ überführbar ist. Sie bestehen in der Vertauschbarkeit von Matrizen mit n Reihen, die aus der Koeffizientenmatrix $C = \|c_{ijkl}\|$ (mit n^2 Reihen) herausgegriffen werden.

Roland W. Weitzenböck.

Gruppentheorie:

Ellis, David and Roy Utz: Remarks on quasigroups and n -quasigroups. Publ. math., Debrecen 2, 110—114 (1951).

Zur Untersuchung einer Quasigruppe Q werden die zugeordneten Quasigruppen eingeführt; das sind diejenigen Quasigruppen, welche dieselben Elemente wie Q , aber als Verknüpfung die Links- bzw. die Rechtsdivision von Q besitzen. — In Verallgemeinerung des Quasigruppenbegriffes wird eine algebraische Struktur mit einer als Multiplikation geschriebenen Verknüpfung als n -Quasigruppe bezeichnet, wenn sie mindestens n Elemente enthält und zu je zwei n -tupeln (a_1, \dots, a_n) , (b_1, \dots, b_n) mit $a_i \neq a_k$, $b_i \neq b_k$ für $i \neq k$ genau ein x und genau ein y mit $a_i x = b_i = y a_i$ ($i = 1, \dots, n$) vorhanden ist. Für $n > 1$ gibt es keine endlichen n -Quasigruppen mit mehr als zwei Elementen. Alle Isotope einer n -Quasigruppe sind wieder n -Quasigruppen. Jede assoziative n -Quasigruppe mit $n > 1$ ist eine abelsche Gruppe. Die Verff. erwähnen „die zwei 2-Quasigruppen mit zwei Elementen“.

en: man sieht jedoch sofort, daß alle 2-Quasigruppen mit zwei Elementen isomorph sind.

Günter Pickert.

Bruck, R. H.: Loops with transitive automorphism groups. *Pacific J. Math.* 1, 81—483 (1951).

Eine Quasigruppe mit neutralem Element (loop), in der die normalen Unterquasigruppen die 0-Kettenbedingung (Maximalbedingung) erfüllen und deren Automorphismengruppe transitiv ist, d. h. jedes vom neutralen verschiedene Element in jedes derartige Element überführt, ist einfach, d. h. ohne echte normale Unterquasigruppen, oder aber eine endliche abelsche Gruppe vom Typ (p, \dots, p) mit Primzahl p . Umgekehrt folgt aber aus der Einfachheit nicht die Transitivität der Automorphismengruppe, da eine endliche einfache Gruppe mit transitiver Automorphismengruppe zyklisch ist. Die kleinste Ordnung, welche bei den nichtabelschen Quasigruppen mit neutralem Element und transitiver Automorphismengruppe vorkommt, beträgt 5.

Günter Pickert.

Parker, E. T.: On a question raised by Garrett Birkhoff. *Proc. Amer. math. Soc.* 2, 901 (1951).

Garrett Birkhoff a montré (Lattice theory 2^e ed. New York 1950, p. 98) que le treillis des sousgroupes d'un groupe dont l'ordre est le produit de $k \leq 4$ nombres premiers non nécessairement distincts a une longueur égale à k . L'A. résout le problème 39 de l'ouvrage cité en montrant que le groupe simple G d'ordre $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$, étudié par Burnside, n'a pas de sousgroupe d'indice premier. La proposition précédente ne s'étend donc pas à $k = 5$ ni, du reste, à aucune valeur de $k \geq 5$, car dans le produit direct de G et d'un groupe résoluble, tout sousgroupe d'indice premier contient G .

Jacques Riguet.

Zappa, Guido: Sulla risolubilità dei gruppi finiti in isomorfismo reticolare con un gruppo risolubile. *Giorn. Mat. Battaglini*, IV. Ser. 80, 213—225 (1951).

It is well known that two groups may have isomorphic subgroup-lattices without being isomorphic [see e. g. A. Rottländer, *Math. Z.* 28, 641—653 (1928)]. G. Birkhoff has raised the question (Lattice theory, 2nd ed., p. 99, Problem 40; cf. this Zbl. 33, 101) whether a group whose subgroup-lattice is isomorphic to that of a soluble group must itself be soluble. This question is answered by the author in the affirmative, provided that the groups under consideration are finite. The proof uses the well known Sylow complement properties of soluble groups (Ph. Hall, this Zbl. 16, 392). The same result has also been obtained by M. Suzuki (this Zbl. 43, 25).

Kurt A. Hirsch.

Sato, Shoji: Note on lattice-isomorphisms between Abelian groups and non-Abelian groups. *Osaka math. J.* 3, 215—220 (1951).

Using the characterization due to K. Iwasawa [*Japan. J. Math.* 18, 109—128 (1943)] the author constructs for each non-abelian modular group G which contains at least one element of infinite order, an abelian group which is lattice isomorphic with G .

D. G. Higman.

Szele, T.: On a theorem of Pontrjagin. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* 2, 121—122 und russische Zusammenfassg. 13 (1951).

Pontrjagin has proved [Topological Groups, Princeton 1946, 168—169] that a torsion-free discrete Abelian group with maximal condition for subgroups of fixed finite rank is free, i. e. direct sum of cyclic groups. The author proves the equivalent theorem: A countable torsion-free Abelian group is direct sum of cyclic groups if and only if every subgroup of finite rank is finitely generated.

Kurt A. Hirsch.

Takahasi, Mutuo: Note on chain conditions in free groups. *Osaka math. J.* 3, 221—225 (1951).

F sei eine freie Gruppe und H eine Untergruppe von F , die den endlichen Rang r hat. Es wird gezeigt, daß es nur endlich viele Untergruppen $U \supset H$ von F gibt, die keinen H enthaltenden freien Faktor $\neq U$ haben. Daraus folgt, daß jede ab-

steigende Kette $H_1 \supset H_2 \supset \dots$ von Untergruppen $H_n \supset H$, in der jedes H_n den Rang r hat, endlich sein muß. Ferner folgt, daß in einer unendlichen absteigenden Kette, deren Durchschnitt $\neq 1$ ist, fast alle Kettenglieder einen gemeinsamen freien Faktor $\neq 1$ haben. Von diesem Satze kann man frühere Resultate von M. Hall [Ann. of Math., II. Ser. 52, 127—139 (1950)], K. Iwasawa [Proc. Imp. Acad. Tokio 19, 272—274 (1943)], W. Magnus (dies. Zbl. 16, 294) und des Ref. (dies. Zbl. 6, 246) ableiten.

Friedrich Wilhelm Levi.

Krasner, Marc et Léo Kaloujnine: *Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes. II.* Acta Sci. math. 14, 39—66 (1951).

Referat s. dies. Zbl. 41, 158.

Jaffard, Paul: *Théorie axiomatique des groupes définis par des systèmes de générateurs.* Bull. Sci. math., II. Sér. 75_r, 114—128 (1951).

The author defines a group given by its generators and relations as quotient (semi-)group of the semigroup M of all formal „words“ (including the empty word) in the generators and their formal inverses as „letters“, with respect to a subsemigroup R with the following properties: $xx^{-1} \in R$ for all $x \in M$; from $xy \in R$ and $z \in R$ follows $xzy \in R$; from $xzy \in R$ and $z \in R$ follows $xy \in R$. He then formulates the word problem in these terms. The solution of the word problem in free groups, and in free products with one amalgamated subgroup, without the use of normal forms, serve as an illustration of this approach. *Hanna Neumann.*

Takahasi, Mutuo: *Note on word-subgroups in free products of groups.* J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 2, 13—18 (1951).

Let P be a set of words, G a group. The totality of elements of G obtained by substituting elements of G for the variables of words in P generates a fully invariant subgroup $P(G)$ of G , called the word subgroup defined by P in G . The terms of the derived series and the lower central series of G are word subgroups. The author proves the following results for $P(G)$ in case G is the free product $G = A * B$ of subgroups A and B . First $P(G) \cap A = P(A)$ and $P(G) \cap B = P(B)$. Hence by the author's formulation of the subgroup theorem for free products [Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, 539—594 (1945)] $P(G)$ has a decomposition into free factors of the form $P(G) = F * \prod_i s_i P(A) s_i^{-1} * \prod_j t_j P(B) t_j^{-1}$, where F is a free subgroup and $\{s_i\}$ and $\{t_j\}$ are respectively systems of representatives for the double coset decompositions of G with respect to the moduli $(P(A), A)$ and $(P(B), B)$. An analogous result holds in case the number of free factors of G is greater than 2. For X a subgroup of G , denote by \bar{X} the intersection of all normal subgroups of G which contain X . The totality of commutators $[a, b]$, a in A and b in B constitute a free system of generators for $M = \bar{A} \cap \bar{B}$ [so that $G/M = A \times B$]. The subgroup F in the decomposition of $P(G)$ may be chosen as a subgroup of M . In case $P(G) = G'$, the commutator subgroup of G , $\{s_j\}$ and $\{t_k\}$ may be taken as systems of representatives $\{b_\tau\}$ and $\{a_\sigma\}$ for B over B' and A over A' respectively, and F as the subgroup having the commutators $[a_\sigma, b_\tau]$ as a free system of generators. *G. Higman.*

Takahasi, Mutuo: *Primitive locally free groups.* J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 2, 1—11 (1951).

A group is called locally free if any finite subset of its elements generates a free subgroup. Every subgroup of a locally free group is locally free. If there is a positive integer r such that each finite subset of the locally free group G is contained in a free subgroup generated by r elements, then the minimum such r is called the rank of G . Otherwise G has infinite rank. The rank of a free group is the number of elements of a free generator system. In an earlier paper the author has given necessary and sufficient conditions for a countable locally free group to be free (this Zbl. 41, 8). The present paper is concerned with the study of completely reducible locally free groups, i. e. free products of locally free groups of rank 1. The main result is the following: A countable locally free group of finite rank n is completely reducible if and only if it is primitive, i. e. contains at least one free subgroup H of rank n with the property that if K is any free subgroup of rank n which contains H , then there exists a free generator system a_1, \dots, a_n and positive integers m_1, \dots, m_n such that $a_1^{m_1}, \dots, a_n^{m_n}$ are in H . *G. Higman.*

Clifford, A. H.: A noncommutative ordinally simple linearly ordered group. Proc. Amer. math. Soc. 2, 902—903 (1951).

The group with generators $g(\varrho)$ and with defining relations $g(\varrho)g(\varrho + \pi) = g(\varrho + 2\pi)g(\varrho)$, where ϱ ranges over all rational numbers and π over all positive rational numbers, can be fully ordered in such a way that $1 < g(\varrho) \ll g(\varrho + \pi)$, for all ϱ and π . It then has no proper convex normal subgroups, hence is ordinally simple.

Bernhard H. Neumann.

Michiura, Tadashi: Remark on a representation of simply ordered groups. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 386—387, Indagationes math. 13, 386—387 (1951).

The paper is devoted to deriving a result of F. Loonstra from H. Cartan's theorem according to which an archimedean ordered group is isomorphic to a subgroup of the additive group of the real numbers. Loonstra's theorem in question states that a continuously ordered group is isomorphic to the additive group of all real numbers [Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 49, 41—46 (1946)].

Ladislav Fuchs.

Ito, Noboru: Note on (LM)-groups of finite orders. Kōdai math. Sem. Reports 1951, 1—6 (1951).

Es handelt sich hier um eine Reihe locker zusammenhängender Untersuchungen über gewisse Typen endlicher Gruppen. Obwohl keines der Resultate eine größere selbständige Bedeutung zu haben scheint, sind sie doch als Hilfsmittel zur Arbeit für den Gruppentheoretiker recht nützlich. Teilweise sind sie auch schon bei anderen Autoren aufgetreten, wenn auch manchmal in etwas anderer Form. Die Beweise sind im einzelnen gut durchgearbeitet und lehnen sich methodisch an die einschlägigen Arbeiten von P. Hall an (Verf. zitiert allerdings nur die in dies. Zbl. 16, 393 referierte Arbeit von Hall). Die interessantesten Ergebnisse des Verf. seien hier angeführt: Prop. 4: Eine endliche Gruppe \mathfrak{G} ist auflösbar, wenn sie höchstens $n - 1$ nicht-isomorphe nicht-nilpotente eigentliche Untergruppen besitzt, wobei n die Primfaktorenanzahl der Ordnung von \mathfrak{G} ist. — Prop. 6: Diejenigen endlichen Gruppen \mathfrak{G} , welche eine Hauptreihe mit lauter Faktorgruppen von Primzahlordnung besitzen, können durch die folgende Eigenschaft charakterisiert werden: Jede maximale Untergruppe einer Untergruppe von \mathfrak{G} besitzt in dieser Untergruppe Primzahlindex. — Gruppen mit der letztgenannten Eigenschaft werden vom Verf. (C)-Gruppen genannt; sie sind hauptsächlich von O. Ore untersucht worden (dies. Zbl. 21, 211). Verf. bezeichnet fernerhin eine endliche Gruppe \mathfrak{G} als (LM)-Gruppe, wenn der Durchschnitt je zweier maximaler verschiedener Untergruppen einer Untergruppe von \mathfrak{G} wiederum maximal in jeder dieser maximalen Untergruppen ist. Prop. 8: Jede (LM)-Gruppe ist eine (C)-Gruppe; die Umkehrung gilt jedoch nicht allgemein. — Prop. 12: Eine auflösbare Gruppe ist genau dann eine (C)-Gruppe, bzw. eine (LM)-Gruppe, wenn die Faktorgruppe nach ihrem Hyperzentrum eine (C)- bzw. (LM)-Gruppe ist (Hyperzentrum ist das letzte Glied der aufsteigenden Zentralreihe). — Prop. 15: Mit \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 ist auch das direkte Produkt $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ eine (LM)-Gruppe. — Prop. 16 (im Text irrtümlicherweise als Prop. 15 bezeichnet): Die Φ -Untergruppe einer beliebigen Untergruppe \mathfrak{H} in einer (LM)-Gruppe \mathfrak{G} ist in der Φ -Untergruppe von \mathfrak{G} enthalten: $\Phi(\mathfrak{H}) \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$. Genauer ist der Durchschnitt einer maximalen Untergruppe von \mathfrak{G} mit \mathfrak{H} entweder gleich \mathfrak{H} selbst oder maximal in \mathfrak{H} . — Schließlich stellt Verf. noch Untersuchungen über die Struktur der voll-irreduziblen (LM)-Gruppen an.

Peter Roquette.

Azleckij, S. P.: Über Systeme von Sylowklassen einer endlichen Gruppe. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 581—586 (1951) [Russisch].

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 42, 23). Von den zahlreichen Sätzen seien nur einige typische genannt. Mit Σ werde die Menge aller derjenigen Sylowklassen bezeichnet, die nicht im Durchschnitt Θ aller maximalen Normalteiler der endlichen Gruppe \mathfrak{G} enthalten sind. Die Sylowklassen aus Σ erzeugen schon \mathfrak{G} . Jedes minimale System von Sylowklassen ist in Σ enthalten oder fällt mit Σ zusammen. Letzteres ist dann und nur dann der Fall, wenn Θ die Kommutatorgruppe von \mathfrak{G} enthält. In entsprechender Weise, wie $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{G})$ für die Gruppe \mathfrak{G} gebildet wird, werde $\Sigma(\mathfrak{U})$ für eine Untergruppe \mathfrak{U} definiert, nämlich als Menge aller Sylowklassen von \mathfrak{U} , die nicht im Durchschnitt aller maximalen Normalteiler von \mathfrak{U} enthalten sind. Die auflösbaren Gruppen \mathfrak{G} sind dann durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet:

Für \mathcal{G} und für jede echte Untergruppe \mathcal{U} von \mathcal{G} bilden $\Sigma(\mathcal{G})$ bzw. $\Sigma(\mathcal{U})$ ein minimales System von Sylowklassen. — In der Ordnung von \mathcal{G} mögen k verschiedene Primzahlen aufgehen, und \mathcal{G} habe den Sylowrang $k - l$. Jede Untergruppe \mathcal{U}_i von \mathcal{G} , in deren Ordnung k_i verschiedene Primzahlen aufgehen, habe einen Sylowrang $r_i \geq k_i - l$. Dann heißt \mathcal{G} eine Gruppe vom Typ $k - l$. Die Gruppen vom Typ k sind spezielle Gruppen. Die Gruppen vom Typ $k - 1$ sind auflösbar. Eine Gruppe vom Typ $k - 2$ mit einem eindeutig bestimmten minimalen System von Sylowklassen, in der jede Untergruppe \mathcal{U}_i vom Sylowrang $k_i - 2$ ebenfalls ein eindeutig bestimmtes minimales System von Sylowklassen hat, ist auflösbar.

Rudolf Kochendörffer.

Douglas, Jesse: On finite groups with two independent generators. II. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 677—691 (1951).

Douglas, Jesse: On finite groups with two independent generators. III. Exponential substitutions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 749—760 (1951).

Für im folgenden verwendete Bezeichnungen und Begriffe sei auf Teil I (dies. Zbl. 43, 24) verwiesen, an den Verf. unmittelbar anknüpft. — In II werden eine Reihe von Eigenschaften der spez. R. P. als Strukturaussagen über die den Untersuchungen zugrunde liegenden Gruppen Γ interpretiert: Die R. P. $\Theta \bmod m$ und $\Phi \bmod n$ mit den Ordnungen s bzw. t seien wie in I durch Γ induziert. Ist $\Theta(f) \equiv f \bmod m$, so liegt A' im Normalisator von $\{B\}$. Die Untergruppen von $\{A'\}$ und nur sie sind die in $\{A\}$ enthaltenen invarianten Untergruppen von Γ . $\{A', B^s\}$ ist eine invariante abelsche Untergruppe von Γ . $\Gamma/\{A'\}$ und $\Gamma/\{A', B^s\}$ sind Gruppen, die wie Γ durch zwei Elemente erzeugt werden. Die durch sie induzierten R. P. sind Φ und ihre Derivierte Φ_1 bzw. die vertauschten Derivierten Φ_1, Θ_1 . Bei festen δ, ε ist die Menge der Elemente $A^{\varepsilon x} B^{\delta y}$, x, y ganz., (a) eine abelsche Untergruppe von Γ , wenn $\Theta^\varepsilon(\delta) \equiv \delta \bmod m$ und $\Phi^\delta(\varepsilon) \equiv \varepsilon \bmod n$, (b) dann und nur dann eine invariante Untergruppe von Γ , wenn 1. bei geeigneter Wahl von $\delta \bmod m$, $\varepsilon \bmod n$, $\delta \mid \Theta(\delta x)$, $\varepsilon \mid \Phi(\varepsilon y)$ für alle x, y , 2. bei Zyklendarstellung von Θ^ε die zu gleichem Zyklus gehörigen Restklassen $\bmod \delta$ kongruent sind und Entsprechendes für Φ^δ gilt. — Verf. nennt eine spez. R. P. vom Typ k , wenn bei Iteration der Deriviertenbildung die k -te Derivierte eine R. P. $\bmod 1$ ist. Es werden die spez. R. P. $\Theta \bmod m$ vom niedrigsten nicht-trivialen Typ 2 untersucht. Sie sind linear (lin.), d. h. sie lassen sich darstellen $\Theta(x) \equiv \alpha x \bmod m$, und jede lin. R. P. ist speziell und vom Typ 2. Eine R. P. $\bmod p$, p Primzahl, ist stets lin. Zwei lin. R. P. $\Theta(x) \equiv \alpha x \bmod m$, $\Phi(x) \equiv \beta x \bmod n$ sind dann und nur dann konjugiert, wenn $\alpha^\varepsilon \equiv 1 \bmod m$, $\beta^\delta \equiv 1 \bmod n$, $\delta = (\alpha - 1, m)$, $\varepsilon = (\beta - 1, n)$. — In III wird allgemein und an Beispielen beschrieben, wie man zu vorgegebener lin. R. P. alle konjugierten bestimmen kann. Sie sind von einem Typ ≤ 3 . — Das Problem zu gegebener spez. R. P. Θ eine sogen. Antiderivierte R. P. Φ mit $\Phi_1 = \Theta$ zu bestimmen, wird skizziert. — Abschließend wird die Frage behandelt, wann für eine spez. R. P. Θ der Ordnung s auch Θ^λ spez. ist. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn $d \mid \Theta_1(dx)$, $d = (\lambda, s)$, für alle x ist. Ist Θ vom Typ 3 (sogen. exponentielle R. P.), also $\Theta_1(x) \equiv \beta x \bmod s$, so ist Θ^λ für beliebige λ spez. und vom Typ 3, wenn $\beta \equiv 1 \bmod s/d$, vom Typ 2, wenn $\beta \not\equiv 1 \bmod s/d$. — Für eine Reihe weiterer elementar-zahlentheoretischer Eigenschaften der spez. R. P. muß auf die beiden Noten verwiesen werden. — Die Beweise sind nur z. T. durchgeführt.

Wolfgang Gaschütz.

Douglas, Jesse: On finite groups with two independent generators. IV. Conjugate substitutions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 808—813 (1951).

Zu den Bezeichnungen vgl. dies. Zbl. 43, 24 und vorsteh. Referat. — Verf. behandelt die Aufgabe der Bestimmung konjugierter R. P. $\Theta \bmod m = tu$ zu einer vorgegebenen spez. R. P. $\Phi \bmod n$ von der Ordnung t . Dazu wird ein kompliziertes System von Kongruenzen $\bmod u$ für die R. P. $\psi \bmod u$ aufgestellt, die sich aus $\Theta(y) \equiv \Phi_1(y) \bmod t$ (s. Kriterium in Teil I) gemäß $\Theta(x) \equiv \Phi_1(x) + t\psi(x) \bmod m$ ergibt. Soll Θ insbesondere eine Antiderivierte von Φ sein, so tritt zu diesem System noch ein Inkongruenz $\bmod u$ hinzu. Es gelingt jedoch nicht, damit zu entscheiden, ob stets Antiderivierte zu vorgegebener spez. R. P. existieren. Nach Ansicht des Verf. ist dieses Problem von großer Wichtigkeit für seine Theorie, da hierdurch die Frage beantwortet wird, ob es spez. R. P. von beliebig hohem Typ gibt. Er bemerkt, daß jedenfalls spez. R. P. vom Typ 6 existieren.

Wolfgang Gaschütz.

Itô, Noboru: A theorem on the alternating group \mathfrak{A}_n ($n \geq 5$). Math. Japon. 2, 59—60 (1951).

Verf. beweist folgenden interessanten Satz: „Jedes Element A einer alternierenden Permutationsgruppe \mathfrak{A}_n vom Grade $n \geq 5$ kann als Kommutator zweier Elemente aus \mathfrak{A}_n dargestellt werden. Falls das Element A nicht ein Zyklus dritter Ordnung [$A = (a, b, c)$] ist, so kann A als Kommutator zweier Permutationen aus \mathfrak{A}_n dargestellt werden, die nur auf die in A vorkommenden Symbole operieren.“ Der Beweis stützt sich auf ein Induktionsverfahren, da die Gültigkeit für $n = 5$ leicht einzusehen ist. — Verf. bemerkt am Schluß der Arbeit, daß der Satz auch für jedes Element einer Sylowgruppe der symmetrischen Gruppe von beliebigem Grade gilt.

Zacher.

Redei, L.: Die Einfachheit der alternierenden Gruppe. Monatsh. Math. 55, 328—329 (1951).

Kurzer, sehr übersichtlicher Beweis für die Einfachheit der alternierenden Permutationsgruppe A von einem Grade ≥ 5 : In einem Normalteiler N von A wird als Kommutator ein Element mit Zyklendarstellung $(a\ b)(c\ d)$ konstruiert. Durch Transformation mit Elementen aus A läßt sich aus diesem jedes Element $(r\ s)(x\ y)$ gewinnen. Auf Grund der Identität $(r\ s)(r\ t) = (r\ s)(x\ y) \cdot (x\ y)(r\ t)$ und der Tatsache, daß die Elemente aus A Produkte einer geraden Anzahl von Transpositionen sind, folgt sodann $A = N$.

Wolfgang Gaschütz.

Itô, Noboru: Remarks on factorizable groups. Acta Sci. math., Szeged 14, 83—84 (1951).

Verf. verallgemeinert zwei Resultate von Ref. (dies. Zbl. 39, 255; 43, 254). 1. Ist $G = S \cdot A$ eine endliche Gruppe, wo S eine nilpotente und A eine abelsche Gruppe sind, so ist G auflösbar. 2. Ist $G = S \cdot P$ eine endliche Gruppe, wo S eine nilpotente- und P eine p -Gruppe sind, so ist G auflösbar. Weitere Verallgemeinerung s. H. Wielandt, (dies. Zbl. 43, 258).

Jenő Szép.

Mattioli, Ennio: Sopra un'altra proprietà di gruppi abeliani finiti. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser 5, 121—141 (1951).

Verf. verallgemeinert seine früheren Ergebnisse. Sei G eine Abelsche Gruppe vom Typus $(1, 1, \dots, 1)$ mit der Ordnung p^n und den Basiselementen R_1, R_2, \dots, R_n . Ist dann $n = (p^k - 1)/(p - 1)$, $k \geq 2$, so hat G eine Untergruppe $\Gamma(G)$ der Ordnung p^{n-k} mit der Eigenschaft: $A) G = \Gamma + \Gamma R_1 + \dots + \Gamma R_1^{p-1} + \Gamma R_2 + \dots + \Gamma R_n^{p-1}$ (dies. Zbl. 37, 12). Die Hauptergebnisse sind: 1. Ist k eine gerade Zahl, so ist $G = G_1 G_2 \dots G_N$, wo G_i [vom Typus $(1, 1, \dots, 1)$ und $i = 1, 2, \dots, N$] die Ordnungen p^{p+1} haben und $N = n/(p + 1)$, ferner $\pi = \Gamma(G_1) \Gamma(G_2) \dots \Gamma(G_N) \subset \Gamma(G)$. 2. Der Index von π in Γ ist $p^{2(N-h)}$ wo $h = k/2$. Ist $\pi\gamma$ eine Nebengruppe von π in Γ , so ist $\pi\gamma = \Gamma_{1, r_1} \Gamma_{2, r_2} \dots \Gamma_{N, r_N}$ wo Γ_{j, r_j} die r_j -te Nebengruppe von $\Gamma(G_j)$ in der Zerlegung von G_j von Art A) ist. 3. (Anwendung). Bezeichne μ die Menge der Variationen N -ter Klasse von P Elementen mit Wiederholung (die Anzahl der Variationen ist P^N), wo $P = p^2$ (p eine Primzahl) und $N = (P^h - 1)/(P - 1)$, $h \geq 2$. Dann können wir aus diesen ausgewählten sich nur in einem einzigen Element unterscheidet. In der Arbeit spielen die sog. T - und B -Komplexe eine wichtige Rolle: $T = (a, b, a\ b, a^2\ b, \dots, a^{p-1}\ b)$, $B = (a\ b, a^2\ b, \dots, a^{p-1}\ b)$, $a, b \in G$.

Jenő Szép.

Meier-Wunderli, H.: Metabelsche Gruppen. Commentarii math. Helvet. 25, 1—10 (1951).

This paper determines the order of the metabelian group which has n generators and is such that every element ($\neq 1$) has order p (a fixed prime). For the structure of the metabelian group with n generators, see O. Schreier, Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. 4, 321—346 (1926). If $n = 2$, the order is p^a , $a = 2 + \sum d_i$.

$2 \leq w \leq p-1$, where $d_w = (w-1) \binom{n+w-2}{w}$; for $n > 2$, the order is p^b ,
 $b = 2n + \sum d_w - \binom{n+p-1}{p}$, $2 \leq w \leq p$. The number of groups in the lower
 central series (l. c. s.) is $p-1$ when $n=2$, and is p when $n > 2$. The result
 is based on calculations concerning the structure of the w -th quotient group M_w/M_{w+1}
 in the l. c. s. of the free metabelian group with n generators [free = order of ele-
 ments not restricted to be p].
 J. L. Brenner.

Hughes, N. J. S.: The use of bilinear mappings in the classification of groups
 of class 2. Proc. Amer. math. Soc. 2, 742—747 (1951).

A regular bilinear mapping of a group H into a group K is a function $f(x, y)$ defined for
 all ordered pairs x, y of elements of H , taking values in K , satisfying: (1) $f(xx', y) =$
 $f(x, y)f(x', y)$, (2) $f(x, yy') = f(x, y)f(x, y')$, (3) $f(x, x) = e$, (4) $f(x, y) = e$ for fixed x and all
 y implies $x = e$, (5) the values $f(x, y)$ generate K . It follows that H and K are abelian. A second
 mapping f' from H' into K' is said to belong to the same family as f , written $f \sim f'$, if there
 exist isomorphisms φ and ψ of H and K onto H' and K' respectively, such that $f'(x\varphi, y\varphi) =$
 $f(x, y)\psi$. Consider in particular a group G of class ≤ 2 (i. e. the derived group Q is contained
 in the centre Z). Then $f(Zx, Zy) = {}^{-1}y^{-1}xy$ is a regular bilinear mapping of G/Z into Q ,
 denoted by $f = M(G)$. Then $M(G) \sim M(G')$ if, and only if, G and G' are isoclinic (cf. P. Hall,
 this Zbl. 23, 210); more than that: the different families of regular bilinear mappings are in
 (1,1) — correspondence to the different families of isoclinic groups of class ≤ 2 . — Next direct
 products of mappings are defined (actually for the rather more general „multilinear“ mappings):
 if the f_i are mappings of H_i into K_i — not necessarily finite in number —, then $f = \prod f_i$ is the
 mapping of $H = \prod H_i$ into $K = \prod K_i$ with the property that, for $x_i \in H_i$, $y_j \in H_j$, $f(x_i, y_j) =$
 $f_i(x_i, y_j)$ if $i = j$, but $= e$ otherwise. Then it is shown that any two direct decompositions of
 a mapping have a common refinement; hence any mapping is in at most one way a direct pro-
 duct of direct indecomposable mappings. As the family of a product depends only on the fa-
 milies of the factors, application of the first part gives Every family of isoclinic groups of class
 ≤ 2 , where either G/Z or Q is finite, is uniquely expressible as direct product of direct indecom-
 posable families.
 Hanna Neumann.

Suzuki, Michio: A characterization of simple groups $LF(2, p)$. J. Fac. Sci.
 Univ. Tokyo, Sect. I 6, 259—293 (1951).

The subgroups of the linear fractional group $LF(2, p)$ over the Galois field of
 order p are of one of the following four types: (1) a metacyclic group (i. e. a group
 containing a cyclic normal subgroup whose factor group is cyclic), (2) a tetrahedral
 group A_4 , (3) an octahedral group S_4 , (4) an icosahedral group A_5 . The author
 proves a converse, in fact more than that: A finite non-abelian simple group whose
 subgroups are all of one of the following types, (1) a metacyclic group, (2) an A_n ,
 (3) an S_n , (4) a semi-simple group (i. e. a group with no proper solvable normal
 subgroups), is isomorphic to an $LF(2, p)$ for suitable $p > 3$. The proof uses results
 on p -factor groups by O. Grün (this Zbl. 12, 341) and H. Wielandt (this Zbl. 23,
 209), the author's results on completely decomposable groups (this Zbl. 40, 7), and
 in particular R. Brauer and H. F. Tuan's characterization of the groups $LF(2, p)$
 obtained from the theory of group-characters [cf. e. g. Brauer-Tuan, Bull. Amer.
 math. Soc. 51, 756—766 (1945); and Tuan, Ann. of Math., II. Ser. 45, 110—140
 (1944)].
 Hanna Neumann.

Rickart, C. E.: Isomorphisms of infinite-dimensional analogues of the classical
 groups. Bull. Amer. math. Soc. 57, 435—448 (1951).

Article d'exposition où l'A., après avoir donné des définitions très générales
 des groupes classiques, valables pour des espaces de dimension infinie sur des corps
 non commutatifs, esquisse les grandes lignes de la méthode qu'il a développée dans
 deux travaux récents (ce Zbl. 37, 201, 42, 257) pour déterminer les automorphismes
 de ces groupes, et plus généralement leurs isomorphismes les uns sur les autres.
 Les résultats des deux articles précités sont légèrement généralisés au cas où les
 groupes considérés peuvent contenir des transformations semi-linéaires, les méthodes
 restant tout à fait analogues, avec quelques modifications.
 Jean Dieudonné.

Kosambi, D. D.: Series expansion of continuous groups. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 2, 244—257 (1951).

On considère des groupes continus possédant un développement formel unique en série, opérant dans des espaces vectoriels, sur le champ C de nombres réels. On montre que si l'on a donné un groupe $\Phi \rightarrow T(\Phi, t)$, qui transforme chaque élément Φ de l'espace vectoriel V en un élément du même espace, pour chaque valeur du paramètre réel t appartenant à un interval ouvert contenant le point $t = 0$, la loi du groupe

$$T(T(\Phi, t), s) = T(\Phi, \psi(s, t))$$

introduit la fonction $\psi(s, t)$. En supposant cette fonction continue et développable en série, nous devons avoir

$$\psi(s, t) = s + t + a s t/2! + (b s^2 t + c s t^2)/3! + \dots$$

Pour chaque transformation doit avoir une inverse, on peut s'arranger de façon que $s = -t$ soit une solution du $\psi(s, t) = 0$, ce qui nous donne $\psi(s, t) = (s + t) \psi'$ où ψ' est elle-même développable en série. En utilisant la propriété d'associativité, il en résulte que $\psi(s, t) = \psi(t, s)$, donc le groupe est abélien. — En ce qui concerne la transformation $T(\Phi, t)$ on suppose qu'elle peut s'écrire

$$T(\Phi, t) = \Phi + t k_1 \Phi + t^2 k_2 \Phi/2! + \dots$$

La série étant ou non convergente. Les opérateurs $k_1 \Phi, k_2 \Phi, \dots$, sont des éléments de V . Ils constituent donc des opérateurs qui transforment V en lui-même. On montre que ce sont des opérateurs linéaires et $k_n (n > 1)$ peut s'exprimer par un polynôme du degré n dans k_1 , avec le coefficient du degré n égal à l'unité et sans terme constant, ce qui nous dit que la transformation $T(\Phi, t)$ du groupe est donnée dès qu'on se donne l'opérateur k_1 , qui définit la transformation infinitésimale du groupe. — On montre que par un choix convenable du paramètre t , on peut écrire

$$T(\Phi, t) = \Phi + t L \Phi + t^2 L^2 \Phi/2! + \dots = (\exp t L) \Phi$$

où L est un opérateur linéaire, ce qui revient à dire que $\psi(s, t) = s + t$, donc que le groupe par ce choix du paramètre, devient une translation. Le Ref. ajoute que pour le cas où V est l'espace X_n , ces résultats sont donnés dans son livre, Leçons de géométrie différentielle, vol. I, Bucarest, 1947, p. 69—73 (ce Zbl. 34, 249). — Dans le cas où le groupe possède n paramètres, l'A. montre que l'on peut introduire n opérateurs linéaires indépendants et les opérateurs $L_i L_j - L_j L_i (i \neq j)$ sont des combinaisons linéaires des L_1, \dots, L_n avec des coefficients en C , ce qui nous dit que chaque groupe à deux ou plusieurs paramètres donne lieu à une algèbre de Lie. — Des considérations générales sur les propriétés de l'opérateur L (l'opérateur de Lie) relatives à différents types d'espaces, terminent l'article.

G. Vranceanu.

Siebenenthal, Jean de: Sur les sous-groupes fermés connexes d'un groupe de Lie clos. Commentarii math. Helvet. 25, 210—256 (1951).

Ce Mémoire apporte des résultats sur la détermination des sous-groupes fermés connexes des groupes de Lie compacts. Soient G_1 un sous-groupe fermé connexe de rang h du groupe de Lie compact connexe G de rang l , $T^h \subset T^l$ des tores maximaux de G_1 , resp. G ; à T^h correspond un sous-espace R^h de l'espace euclidien R^l , revêtement universel de T^l et l'A. donne tout d'abord les relations entre les paramètres angulaires de G et de G_1 , ou, ce qui revient au même, étudie la situation du diagramme (au sens de E. Stiefel) de G_1 dans le diagramme de G . Il montre que tout automorphisme de R^h appartenant au groupe de Weyl $\Phi(G_1)$ de G_1 est la restriction à R^h d'une transformation de $\Phi(G)$ laissant R^h invariant, et que tout paramètre angulaire de G_1 est la restriction à R^h d'un paramètre angulaire de G ; ce dernier point le conduit à associer à tout élément q_i d'un système fondamental de paramètres de G_1 l'ensemble des paramètres α_{ij} de G dont la restriction à R^h est q_i ($i = 1, \dots, h$; $j = 1, \dots, n_i$), et à examiner les propriétés des α_{ij} ; il établit notamment des conditions nécessaires pour que G_1 ne soit pas contenu dans un sous-groupe propre de G de rang l (cas auquel on peut se borner puisque les sous-groupes de rang maximum sont connus, voir ce Zbl. 34, 307); elles sont en particulier vérifiées si la droite $q_1 = \dots = q_h$ de R^h est régulière dans R^l , c'est à dire n'annule aucun paramètre angulaire de G , et l'A. appelle sous-groupe $(H)_0$ un sous-groupe dont le diagramme vérifie cette condition. Le reste du travail est principalement consacré à la détermination des sous-groupes $(H)_0$ et donne les démonstrations de résultats annoncés antérieurement (se Zbl. 36, 156): Un groupe semi-simple compact G contient toujours des sous-groupes $(H)_0$ de rang 1 à trois paramètres, deux d'entre eux sont conjugués (ce sont les sous-groupes „principaux de rang 1“ de G), les sous-groupes $(H)_0$ de rang h ($1 < h < l$), sont exactement les sous-groupes de rang h contenant un sous-groupe principal de rang 1 de G ; ils sont déterminés pour chaque groupe simple, ce sont: $B_h, D_{h+1}, B_h \subset A_{2h}, C_h \subset A_{2h-1}, F_4 \subset E_6, G_2 \subset B_3$.

Armand Borel.

Calabi, Lorenzo: Sulla dimensione dei sottogruppi non chiusi di un gruppo di Lie. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 206—208 (1951).

Soient G de Lie simplement connexe, $K = K_1 \times \dots \times K_m$ un sous-groupe compact maximal, K_i simple de rang r_i . L'A. montre qu'un sous-groupe connexe de Lie H non fermé H de G est de dimension $\leq n - 2s - 1$, [$s = \max. (2, r)$, $r = \min (r_1, \dots, r_m)$], cette borne ne pouvant être atteinte que si deux au moins des K_i sont de rang un; la démonstration se fait tout d'abord dans le cas particulier G compact, auquel on ramène le cas général en remarquant que si H n'est pas fermé, G contient un sous-groupe compact K tel $K \cap H$ ne soint pas fermé dans K (Malcev). — [Rem.: L'égalité de la ligne 20, p. 207 est fausse en général mais cela n'influe pas sur la démonstration du théorème; le corollaire du lemme 2 peut se démontrer a priori].

Armand Borel.

Satake, Ichiro: On a theorem of E. Cartan. *J. math. Soc. Japan* 2, 284—305 (1951).

Die 1913 von É. Cartan aufgestellte Theorie der irreduziblen Darstellungen halbeinfacher komplexer Liescher Gruppen (bzw. Ringe) mit ihrer Kennzeichnung durch höchste Gewichte wird hier erneut behandelt. Die Beweise verwenden topologische Methoden, setzen aber weder die Klassifikationstheorie halbeinfacher Gruppen noch die Weylsche Charakterentheorie voraus.

Ernst Witt.

Nakamura, Masahiro and Hisaharu Umegaki: A remark on theorems of Stone and Bochner. *Proc. Japan Acad.* 27, 506—507 (1951).

La décomposition spectrale d'une représentation unitaire d'un groupe abélien localement compact est démontrée à partir de la décomposition spectrale des c^* -algèbres abéliennes.

Jean Dixmier.

Nakamura, Masahiro and Zirô Takeda: Group representation and Banach limit. *Tôhoku math. J., II. Ser.* 3, 132—135 (1951).

B. Sz.-Nagy a montré qu'un groupe cyclique uniformément borné de transformations dans un espace hilbertien est semblable à un groupe unitaire. Les AA. observent que la démonstration s'étend au cas des groupes possédant une „limite de Banach“ et par exemple aux groupes abéliens. Comme ils le signalent dans une Note ajoutée en cours d'épreuves, la même remarque a été faite simultanément par plusieurs (M. M. Day, ce Zbl. 39, 123; le rapporteur, ce Zbl. 37, 155; cf. aussi R. Sikorski, ce Zbl. 42, 361).

Jacques Dixmier.

Murakami, Shingo: On unitary representations of compact groups. *Kôdai math. Sem. Reports* 1951, 15—18 (1951).

Diese Arbeit liefert einen Beitrag zur Theorie der unendlichdimensionalen unitären Darstellungen einer lokal-kompakten Gruppe im Sinne von Gelfand und Rajkov (Verf. zitiert Yoshizawa, dies. Zbl. 37, 16). Es wird der folgende bekannte Satz neu bewiesen: Besitzt eine lokal-kompakte Gruppe G eine kompakte Untergruppe K , so läßt sich jede irreduzible unitäre (unendlichdimensionale) Darstellung von K zu einer irreduziblen unitären Darstellung von G erweitern. Zum Beweis wird vorher der ebenfalls schon bekannte Satz abgeleitet: Jede zyklische unitäre Darstellung einer kompakten Gruppe K ist in der regulären Darstellung von K enthalten. Die Beweismethoden sind nicht neu: Sie lehnen sich an die Sätze von Gelfand und Rajkov an, sowie an einen Satz von Godement über die Approximation positiver definiter Funktionen auf G (dies. Zbl. 31, 359). Der letztere Satz wird in einer schwächeren Form, wie sie hier lediglich benötigt wird, in einer bei der Korrektur eingesetzten Fußnote neu bewiesen.

Peter Roquette.

Ganea, Tudor: Du prolongement des représentations locales des groupes topologiques. *Acta Sci. math.* 14, 115—124 (1951).

By a well known theorem of O. Schreier, every local representation of a connected, locally connected and simply connected topological group G into an abstract group H can be extended uniquely to a representation of G into H . The author proves that none of these three conditions are necessary for this prolongation property by showing examples of (i) a totally disconnected group, (ii) a connected

but not locally connected group, (iii) a connected, locally connected but not simply connected group which have the required prolongation property. The construction of these examples bases on a theorem that if the completion \bar{G} of a topological group G satisfies the three conditions of Schreier then G itself has the required prolongation property.

Y. Kawada.

Gleason, A. M.: The structure of locally compact groups. Duke math. J. 18, 85—104 (1951).

A summary of the results of the present paper has appeared earlier, see this Zbl. 33, 151. Theorem 3.1. — If a topological group G has a closed normal subgroup N such that both N and G/N are Lie groups, then G is a Lie group. Hint to the proof. — Kuranishi (this Zbl. 38, 17) has given the proof of the theorem under three additional hypotheses: (a) G is locally compact. (b) N is Abelian. (c) There exists a cross-section set for the subgroup N , i. e. a closed subset of G which intersects every coset of N near the identity in exactly one point. (a) is removed by Lemma 1.10.: A topological group G having a closed subgroup H such that both H and G/H are locally compact is locally compact itself. The existence of the cross-section required in (c) has been proved previously by the author [Proc. Amer. math. Soc. 1, 35—43 (1950)] for any Abelian Lie subgroup of any topological group. N^* denoting the connected component of the identity in N , Z the centralizer of N^* , G/Z and $G/(Z \cap N)$ are shown to be Lie groups, hence the reduction to the Abelian case. A topological group G is called a generalized Lie group if and only if the following condition is satisfied: For every neighbourhood U of the identity e there is an open subgroup G' of G and a compact normal subgroup C of G' such that $C \subset U$ and G'/C is a Lie group. Theorem 3.1. is extended in 4.7. to generalized Lie groups. $H_0 = \{e\} \subset H_1 \subset \dots \subset H_k$ representing any sequence of connected closed subgroups of a topological group G such that none of the factor spaces H_i/H_{i-1} ($i = 1, \dots, k$) are compact, the height $h(G)$ of G is the least upper bound (ev. infinite) of k . Theorems: 5.2. If N is a connected closed normal subgroup of G , then $h(N) + h(G/N) \leq h(G)$. (The author does not know whether or not equality always holds). 5.3. The height of a locally compact group is finite. 5.4. Every connected locally compact group has a finite composition series such that the quotient groups are either compact, Abelian or simple. A group is termed indecomposable if it does not split into the direct product of two of its proper subgroups. § 6 contains a proof that every connected locally compact group has a largest solvable normal subgroup and that the corresponding quotient group is a direct product of indecomposable groups. In § 7 is expressed the conjecture that every locally compact group is a generalized Lie group; if it is true, the affirmative solution of Hilbert's fifth problem follows. Similar results to those in §§ 3, 4 and 6 have been given independently by K. Iwasawa (this Zbl. 34, 18).

Christian Parc.

Mostow, G. D.: On an assertion of Weil. Ann. of Math., II. Ser. 54, 339—344 (1951).

In A. Weils Buch „L'intégration dans les groupes topologiques“ (Actual. sci. industr. Nr. 869, Paris 1940) wird auf S. 129, Z. 20—17 v. u. behauptet, daß, wenn (Eigenschaft E I:) in einer topologischen Gruppe G eine bei allen inneren Automorphismen von G invariante (kurz: i. a.-invariante) abgeschlossene kompakte Umgebung der Einheit e existiert, so (E II:) gibt es in jeder Umgebung der Einheit eine i. a.-invariante Umgebung von e . Verf. zeigt durch das Gegenbeispiel der sogar Lieschen Gruppe mit den drei infinitesimalen Erzeugenden x_1, x_2, x_3 und den Klammerrelationen $[x_1, x_2] = x_3, [x_1, x_3] = 0, [x_2, x_3] = 0$, daß die Behauptung nicht allgemein richtig sein kann. Darüber hinaus beweist er, mit typisch Lieschen Begriffen operierend, einen Satz, welcher Bedingungen gibt, unter denen E I die Eigenschaft E II impliziert. Das ist z. B. der Fall, wenn G einfach zusammenhängend ist. Als notwendige und hinreichende Bedingung ergibt sich: Das Radikal von G ist Zentrum Z und G/Z ist kompakt. Ferner wird bewiesen, daß es dann eine endlich-blättrige Überlagerungsgruppe gibt, die direktes Produkt einer halbeinfachen und einer nilpotenten Gruppe ist. Schließlich werden notwendige und hinreichende Bedingungen formuliert, daß G die Eigenschaft E I hat.

H. Schwerdtfeger.

Iwasawa, Kenkichi: Topological groups with invariant compact neighborhoods of the identity. Ann. of Math., II. Ser. 54, 345—348 (1951).

Verf. untersucht, wie weit man das Studium der Eigenschaften E I, E II (vgl. vorsteh. Ref.) und der Implikation $E I \rightarrow E II$, losgelöst von den Begriffen

der Lieschen Theorie, auf allgemeinere topologische Gruppen G mit der Eigenschaft $E I$ ausdehnen kann. Als fundamental erweist sich das Lemma: Der Durchschnitt N aller abgeschlossenen i. a.-invarianten Umgebungen von e in G ist ein kompakter Normalteiler von G , derart daß G/N die Eigenschaft $E II$ hat. Als notwendige und hinreichende Bedingung für $E I$ ergibt sich im Falle eines lokal kompakten zusammenhängenden G , daß die topologische Kommutatorgruppe von G kompakt ist. Unter Benutzung früherer Ergebnisse des Verf. (dies. Zbl. 34, 18) wird für eine zusammenhängende $E I$ -Gruppe gezeigt, daß sie Produkt einer halbeinfachen Untergruppe mit dem Radikal ist, mit elementweise vertauschbaren Faktoren (vgl. oben). Für komplexe Matrixengruppen zeigt sich, daß N nur aus e besteht, so daß hier $E I \rightarrow E II$. Verf. schließt mit einer Anwendung seiner Resultate zur Bestimmung der Struktur zwei-endiger Gruppen. — Es scheint, als ob diese zwei Arbeiten zugleich die von Weil (l. c. S. 129, Z. 4 v. u. ff.) als Desideratum bezeichnete Ergänzung seiner Untersuchung bringen. H. Schwerdtfeger.

Freudenthal, H.: La structure des groupes à deux bouts et des groupes triplement transitifs. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A. 54, 288—294; Indagationes math. 13, 288—294 (1951).

Satz 1: Jede lokal kompakte, separable, zusammenhängende, zwei Enden besitzende topologische Gruppe, ist zum direkten Produkt einer kompakten, separablen, zusammenhängenden Gruppe und der multiplikativen Gruppe der positiven Zahlen, algebraisch-topologisch isomorph. Satz 2: G sei eine lokal kompakte, separable Gruppe; W sei ein lokal kompakter, separabler Raum, der nicht zusammenhangslos ist. Wirkt dann G stetig und dreifach transitiv auf W , so ist, notwendig, W die reelle oder komplexe projektive Gerade, und G die projektive Gruppe von W . — Wie Verf. bemerkt, bildet Satz 1 die Verschärfung eines Satzes von L. Zippin [Proc. Amer. math. Soc. 1, 309—315 (1950)]; frühere Ergebnisse des Verf. über fastperiodische Funktionen in Gruppen (dies. Zbl. 13, 202) werden beim Beweis stark benützt. Satz 2 hängt mit Untersuchungen von J. Tits (dies. Zbl. 42, 25) zusammen; bei seinem Beweis wird der erste Satz verwendet. Tudor Ganea.

Verbände. Ringe. Körper:

Carruth, Philip W.: Sums and products of ordered systems. Proc. Amer. math. Soc. 2, 896—900 (1951).

Eine Menge wird geordnetes System genannt, wenn in ihr eine durch \geq bezeichnet binäre reflexive Relation (also $x \geq x$ für alle Elemente x) gegeben ist. Sind R und S_r für jedes $r \in R$ geordnete Systeme, so wird das geordnete System der Paare (r, s) ($r \in R, s \in S_r$), für das $(r, s) \geq (r', s')$ als $r > r'$ oder $r = r', s \geq s'$ erklärt ist, als die geordnete Summe der S_r bezeichnet und das geordnete System der Abbildungen f von R , für die $f(r) \in S_r$ (für alle $r \in R$) gilt und $f \geq f'$ als „Zu $r \in R$ mit $f(r) \neq f'(r)$ gibt es ein $r' \geq r$ mit $f(r') > f'(r')$ “ erklärt ist, als das geordnete Produkt der S_r . Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die geordnete Summe ein Verband bzw. ein vollständiger Verband ist, sowie dafür, daß das geordnete Produkt ein vollständiger Verband ist. Für den Fall $R = \{1, 2\}$. ($2 \geq 1$) wird ein Fehler in Aufg. 2, S. 25 bei G. Birkhoff, Lattice Theory (New York 1948) festgestellt und verbessert. Günter Pickert.

Hostinsky, L. Aileen: Direct decompositions in lattices. Amer. J. Math. 73, 741—755 (1951).

Verf. benutzt die von ihr (dies. Zbl. 43, 34) entwickelte Theorie der Homomorphismen von Verbänden, um die Fittingsche Methode zum Beweise von Verfeinerungssätzen für direkte Zerlegungen auf Verbände auszudehnen. Insbesondere gelingt es, aus einer Zerfällungseigenschaft besonderer Endomorphismen den folgenden speziellen Verfeinerungssatz herzuleiten, von dem Ref. gezeigt hat, daß

er im Zentrum der Theorie steht (dies. Zbl. 34, 298, 300): Sind $p = a \oplus b = d \oplus e$ zwei direkte Zerlegungen eines Verbandselements, so gibt es Verfeinerungen $a = a' \oplus a''$, $b = b' \oplus b''$, $d = d' \oplus d''$, $e = e' \oplus e''$ derart, daß $a' \oplus b' = b' \oplus d' = d' \oplus e' = e' \oplus a'$ und $a'' \oplus b'' = b'' \oplus e'' = e'' \oplus d'' = d'' \oplus a''$ gelten. Verf. zeigt dann, daß die bekannten Resultate im wesentlichen alle in ihrem Satz enthalten sind.

Reinhold Baer.

Finkbeiner, Daniel T.: A general dependence relation for lattices. Proc. Amer. math. Soc. 2, 756—759 (1951).

Im Hinblick auf eine „arithmetische“ Theorie der Verbände im Sinne von Dilworth (dies. Zbl. 25, 102), welche auch nicht-semimodulare Verbände einschließt, untersucht Verf. die Einbettbarkeit eines beliebigen Verbandes \mathcal{L} in einen semimodularen Verband \mathcal{L}' , wobei die vereinigungs-irreduziblen Elemente in \mathcal{L} , welche also nicht als Vereinigung echter Teile in \mathcal{L} darstellbar sind, auch in \mathcal{L}' vereinigungs-irreduzibel bleiben sollen. Eine solche Einbettung soll geleistet werden mit Hilfe von „Abhängigkeitsrelationen“. Es wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß die durch eine solche Relation gelieferte Einbettung die obigen Eigenschaften besitzt. Statt der Forderung der Semimodularität verwendet Verf. jedoch das folgende, von MacLane (dies. Zbl. 19, 392) stammende stärkere Axiom: Wenn $S \cap T \subset R \subset T \subset S \cup T$ ist, dann gibt es ein S_1 derart, daß $S \cap T \subset S_1 \subseteq S$ und $(R \cup S_1) \cap T \subset T$ ist.

Peter Roquette.

Hashimoto, Junji: A ternary operation in lattices. Math. Japon. 2, 49—52 (1951).

Ein distributiver Verband mit 0 und 1 kann durch eine dreistellige Relation (abc) mit folgenden Postulaten gekennzeichnet werden: (1): $(0a1) = a$; (2): $(aba) = a$; (3): $(abc) = (bac) = (bca)$; (4): $((abc)de) = ((ade)b(cde))$. Birkhoff hat das Problem gestellt (Lattice theory, 2. Aufl., New York 1948, S. 138, Problem 64; dies. Zbl. 33, 101) ob durch eine geeignete Permutation in (4) Teile von (3) überflüssig werden. Verf. zeigt, daß in der Tat aus (1), (2) und (4'): $(d(bac)e) = ((ead)b(ecd))$ die Beziehungen (3) und (4) abgeleitet werden können. — Ferner wird gezeigt: Durch eine ternäre Relation mit (1), (2'): $(baa) = a$ und (7) $((ade)b(cde)) = (a(bed)(ced))$ ist ein modularer Verband gekennzeichnet. Dabei ist (abc) als $((b \cup c) \cap a) \cup (b \cap c)$ zu deuten. Wird außerdem $(abc) = (bac)$ gefordert, so ist der Verband distributiv.

Helmuth Gericke.

Thrall, R. M.: On the projective structure of a modular lattice. Proc. Amer. math. Soc. 2, 146—152 (1951).

Es sei L ein modularer Verband von der endlichen Dimension l . Ein Quotient a/b wird als prim bezeichnet, wenn zwischen a und b kein Element von L liegt. Ist r die Klassenzahl projektiv äquivalenter Primquotienten, $l = l_1 + \dots + l_r$, so enthält jede von 0 nach 1 aufsteigende Kette genau l_j Primquotienten der Klasse j . $l = r$ ist notwendig und hinreichend für die Distributivität von L . Der andere Extremfall, $r = 1$, tritt z. B. bei den vom Verf. als „prime projective root“ (p. p. r.) bezeichneten aus 5 Elementen bestehenden Verbänden $P = [r; s, t, u; w]$ auf, in denen $r = s \cap t = t \cap u = u \cap s$, $w = s \cup t = t \cup u = u \cup s$ gilt. Jeder nicht distributive Verband enthält ein (p. p. r.). Darüber hinaus zeigt der Verf. „Sind die Primquotienten a/b und c/d zueinander projektiv, ist ferner $k > 2$ die minimale Länge einer Folge von a/b nach c/d überführenden Transpositionen, so kann man diese Folge $a/b = x_0/y_0, x_1/y_1, \dots, x_k/y_k = c/d$ so wählen, daß für $i = 1, \dots, k-1$ 1. niemals x_{i-1}, x_i, x_{i+1} , oder y_{i-1}, y_i, y_{i+1} eine Kette bilden; 2. entweder $y_i = y_{i-1} \cap y_{i+1}$ gilt und $[y_i; x_i, x_{i+1} \cap y_{i-1}, x_{i-1} \cap y_{i+1}; x_{i-1} \cap x_{i+1}]$ ein (p. p. r.) ist, oder $x_i = x_{i-1} \cup x_{i+1}$ gilt und $[y_{i-1} \cup y_{i+1}; y_i, y_{i-1} \cup x_{i+1}, y_{i+1} \cup x_{i-1}; x_i]$ ein (p. p. r.) ist“. Zu einer beliebig gewählten von 0 nach 1 aufsteigenden Kette $L_0 \subset L$ kann man stets Unterverbände P_1, \dots, P_{l-r} vom Typus (p. p. r.) so auswählen, daß je zwei in L projektive Primquotienten aus L_0 , auch in dem von

L_0, P_1, \dots, P_{l-r} erzeugten Unterverbände projektiv sind. Die Projektivität beliebiger Primquotienten aus L läßt sich auf diesen Fall zurückführen, da der von L_0 und a/b erzeugte Unterverband distributiv ist. *Friedrich Wilhelm Levi.*

Jónsson, Bjarni: A Boolean algebra without proper automorphisms. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 766—770 (1951).

The author proves that there is an infinite Boolean algebra which has no proper automorphism. This is a solution of Problem 74 in G. Birkhoff, Lattice theory. New York 1949, p. 162, this Zbl. **33**, 101. The author constructs a simply ordered set S such that (i) S is a compact zero-dimensional Hausdorff space in the interval topology; (ii) S contains a dense subset S' such that the character $(\omega_\mu, \omega_\mu^*)$ (see Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, p. 143) of every point $p \in S'$ is different of the character of each point $q \in S - (p)$. Consequently the only homeomorphism of S onto S is the identity mapping, i. e. the Boolean algebra of all open and closed subsets of S has no proper automorphism. — It should be outlined that a similar construction of a set S with properties (i) and (ii) was given independently and simultaneously by L. Rieger at the second half-year 1950 [see L. Rieger, Fundamenta Math. **38**, 209—216 (1951)]. Another example of a Boolean algebra without proper automorphisms was found by M. Katětov in the first half-year 1950 [see M. Katětov, Colloquium math. **2**, 229—235 (1951)]. Katětov's construction is based on Čech's compactification of completely regular spaces. *Roman Sikorski.*

Iseki, Kiyoshi: A characterization of distributive lattices. Nederl. Akad. Wet. Proc., Ser. A **54**, 388—389, Indagationes math. **13**, 388—389 (1951).

A subset F of an arbitrary lattice L with 0 is called a filter if 1. $a, b \in F$ imply $a \cap b \in F$, 2. $a \in F$ and $a \leq x$ imply $x \in F$, 3. $0 \notin F$. A filter F is said to be prime if $a \cup b \in F$ implies either $a \in F$ or $b \in F$. The following characterizations of distributive lattices are obtained: A lattice L with 0 is distributive if and only if, for any two elements a, b of L , 1. there exists a prime filter containing one of a, b but not containing the other; or 2. there exists a function $m(x)$ of the elements x of L onto the numbers 0 and 1 such that (x) $m(x \cup y) + m(x \cap y) = m(x) + m(y)$. (β) $x \geq y$ implies $m(x) \geq m(y)$ and (γ) $m(a) \neq m(b)$. *Ladislav Fuchs.*

Krishnan, V. S.: Les algèbres partiellement ordonnées et leurs extensions. II. Bull. Soc. math. France **79**, 85—120 (1951).

Die Ideale eines (kommutativen) Ringes, allgemeiner eines Ringoids, bilden einen vollständigen Halbverband H mit Multiplikation. Die Untersuchungen von W. Krull [Math. Ann. **101**, 729 (1929)] über Primär- und Hauptkomponentenideale werden auf H übertragen. Die Resultate des Verf. verallgemeinern gleichzeitig die Untersuchungen von H. Stone (dies. Zbl. **18**, 3) über distributive Verbände. *Paul Lorenzen.*

Johnson, R. E.: The extended centralizer of a ring over a module. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 891-895 (1951).

Eine Methode von K. Asano (dies. Zbl. **37**, 306) wird benutzt, um zu beweisen, daß es zu einem Ring R genau dann einen regulären (Rechts-)quotientenring Q gibt, wenn es keine (rechts-)singulären Elemente a von R gibt. $a \neq 0$ heißt rechts-singulär, wenn jedes Rechtsideal $I \neq 0$ ein $x \neq 0$ mit $ax = 0$ enthält. Q wird als „erweiterter Zentralisator“ von R über dem Rechtsmodul M , der additiven Gruppe von R , konstruiert, nämlich durch einen geeigneten Homomorphismus aus der Menge aller R -Homomorphismen aus M in M . *Paul Lorenzen.*

Bruck, R. H. and Erwin Kleinfeld: The structure of alternative division rings. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 878—890 (1951).

Hier wird der Beweis für den Satz gegeben, daß jeder nichtassoziative alternative Ring ohne Nullteiler mit von 2 verschiedener Charakteristik sich in eine Cayley-Dickson-Algebra über dem Quotientenfeld seines Zentrums einbetten läßt; Verff. haben dieses Resultat 1950 dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Cambridge USA vorgelegt. Jeder alternative Di-

visionsring mit von 2 verschiedener Charakteristik ist entweder assoziativ oder eine Cayley-Dickson-Algebra über seinem Zentrum. Insbesondere ist jeder geordnete alternative Ring assoziativ. Damit ist die 1934 vom Ref. gestellte geometrische Frage (dies. Zbl. 7, 72), ob bei Hinzunahme der geometrischen Anordnungsaxiome der Satz des Desargues in der Ebene aus dem Satz vom vollständigen Vierseit beweisbar wird, bejahend beantwortet. — Der vorliegende Beweis der Einzigkeit der Cayley-Dickson-Algebra beruht auf dem Satz; daß in jedem echten alternativen Ring ohne Nullteiler mit von 2 verschiedener Charakteristik jedes Element einer quadratischen Gleichung über dem Zentrum genügt; mit Hilfe des Satzes von A. A. Albert (dies. Zbl. 33, 349), daß jeder nicht assoziative alternative Ring mit Einselement, der in seinem Zentrum einen Körper F der Charakteristik $\neq 2$ enthält, und bei dem jedes Element einer quadratischen Gleichung über F genügt, eine Cayley-Dickson-Algebra ist, folgt alsdann das Resultat der vorliegenden Arbeit. Man vergleiche zu diesem Beweis der Einzigkeit der Cayley-Dickson-Algebren auch den Beweis, den Skornjakov 1951 unabhängig davon für diesen Satz gegeben hat. — Sei $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ der Assoziator von a, b, c und $(a, b) = ab - ba$ der Kommutator von a und b . Im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß der alternative Ring nullteilerfrei ist. Der Kern K des alternativen Ringes R wird gebildet aus allen Elementen k mit $(k, R, R) = 0$, das Zentrum Z aus allen Kernelementen z mit $(z, R) = 0$. In einem alternativen Ring ist $K = Z$ oder $K = R$, also in einem echten alternativen Ring ist $K = Z$. In einem alternativen Ring P , der durch 3 Elemente a, b, c mit $(a, b, c) \neq 0$ erzeugt wird, sind die Elemente des Zentrums $Z(P)$ von P charakterisiert durch die Eigenschaften, mit jedem der Elemente a, b, c einen verschwindenden Kommutator und mit je zweien von ihnen einen verschwindenden Assoziator zu haben. Jedes der Elemente a, b, c genügt einer quadratischen Gleichung, nämlich $p^2 - qa + r = 0$ mit $p = (a, b, c)^2 \neq 0$, $q = (a, b, c)(a^2, b, c)$, $r = (a, a, b, c)^2$, deren Koeffizienten p, q, r in $Z(P)$ liegen. Durch Kombination der quadratischen Gleichung für a bzw. b folgt, daß $(a, b) \neq 0$ ist, falls die Charakteristik des Ringes von 2 verschieden ist. In einem solchen alternativen Ring R folgt also stets $(a, b, R) = 0$ aus $(a, b) = 0$. In einem alternativen Ring mit der Charakteristik 2 ist dieser Satz nicht richtig. Ist die Charakteristik von 2 verschieden, so gilt auch umgekehrt, daß $(a, b) = 0$ aus $(a, b, R) = 0$ folgt. In einem echten alternativen Ring werden die Zentrumsэлементы z allgemein charakterisiert durch die Bedingungen $(u, Z) = 0$, $(v, Z) = 0$, wo $(u, v) \neq 0$ ist. Nun folgt, daß in jedem echten alternativen Ring R ohne Nullteiler mit von 2 verschiedener Charakteristik jedes Element einer quadratischen Gleichung über dem Zentrum genügt; da R echt ist, ist $K = Z$. Für ein Element von Z ist die Behauptung trivial. Liegt a nicht in Z , so gibt es notwendig ein Paar b, c mit $(a, b, c) \neq 0$, denn aus $(a, R, R) = 0$ folgt $(a, R) = 0$ wegen $K = Z$, entgegen der Voraussetzung, daß a kein Element von Z ist. Daher genügt a der oben angegebenen quadratischen Gleichung mit Koeffizienten p, q, r aus $Z(P)$, wo P der durch a, b, c erzeugte alternative Teilring ist. Ferner ist $(a, b) \neq 0$. Da p, q, r als Elemente von $Z(P)$ mit a bzw. b vertauschbar sind, liegen p, q, r nach obigem Satz auch im Zentrum von R . $Z(R)$ enthält ein nicht verschwindendes Element, nämlich (a, b, c) . Also kann man in bekannter Weise durch einen Kalkül mit Zahlenpaaren R einbetten in einen alternativen Quotientenring $R//Z$ ohne Nullteiler, der ein Einselement besitzt und dessen Zentrum ein Körper ist. Jedes Element genügt dann einer quadratischen Gleichung mit Koeffizienten aus dem Zentrum von $R//Z$. Damit ist nach dem Satz von A. A. Albert $R//Z$ eine Cayley-Dickson-Algebra über seinem Zentrum. Ruth Moufang.

Kleinfeld, Erwin: Alternative division rings of characteristic 2. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 818—820 (1951).

In zwei kürzlich erschienenen Arbeiten haben unabhängig voneinander und mit verschiedenen Methoden R. H. Bruck-E. Kleinfeld und L. A. Skornjakow [s. vorsteh. Referat bzw. Ukrain. mat. ž. 2 Nr. 1, 70—85 (1950)] bewiesen, daß jeder echte Alternativkörper eine Cayley-Dickson-Algebra ist, falls die Charakteristik von zwei bzw. von zwei und drei verschieden ist. E. Kleinfeld beseitigt jetzt seinen Ausnahmefall der Charakteristik zwei, in dem er Betrachtungen aus der Arbeit von Skornjakow mit früheren Überlegungen der Verff. Bruck-Kleinfeld kombiniert. Es wird gezeigt, daß jeder alternative nicht-assoziative Divisionsring R mit der Charakteristik zwei eine Cayley-Dickson-Algebra über seinem Zentrum ist. In der früheren Arbeit wurde gezeigt: wenn aus $(x, y) = 0$ stets folgt $(x, y, R) = 0$, dann ist R eine Cayley-Dickson-Algebra. Wenn aus $(x, y) = 0$ nicht folgt $(x, y, R) = 0$, gibt es ein Element z aus R mit $(x, y, z) \neq 0$. Dann läßt sich zeigen, daß es in R auch drei Elemente a, b, c gibt mit $(a, b) = 0$, $(b, c) = 0$, $(a, c) = 0$ und $u = (a, b, c) \neq 0$ [dabei bezeichnet wieder (x, y) den Kommutator der Elemente x, y und (x, y, z) den Assoziator der Elemente x, y, z]. Die Elemente a, b, c erzeugen einen Unterring S von R . Sei K die Menge der Elemente von R mit $(k, S) = 0$ und $(k, S, S) = 0$. Es wird gezeigt, daß jedes p aus R mit $(p, a, c) = (p, b, c) = (p, a, b) = 0$ auch die Bedingungen $(p, a) = (p, b) = (p, c) = 0$ erfüllt, also nach einem Satz der früheren Arbeit auch zu K gehört. Ferner liegen a^2, b^2, c^2, u in K . K ist abgeschlossen gegenüber der Multiplikation und Inversenbildung. Nun wird gezeigt, daß sich jedes Element von R als lineare Kombination der 8 über K linear unabhängigen Basiselemente $1, a, b, c, ab, ac, bc, a(bc)$ darstellen läßt mit Koeffizienten aus K , und daß K mit dem Zentrum von R zusammenfällt. Daraus folgt, daß R eine Cayley-Dickson-Algebra über dem Zentrum ist. Ruth Moufang.

Asano, Keizo: Über kommutative Ringe, in denen jedes Ideal als Produkt von Primidealen darstellbar ist. J. math. Soc. Japan 3, 82—90 (1951).

Es sei \mathfrak{R} ein kommutativer Ring mit Einselement. Bezüglich solcher Ringe beweist Verf. die folgenden Sätze: 1. Ist jedes Ideal von \mathfrak{R} als Produkt von Primidealen darstellbar (Eindeutigkeit wird nicht gefordert), so ist \mathfrak{R} die direkte Summe von endlichvielen Noetherschen Integritätsbereichen und primären einreihigen Ringen, und umgekehrt (Satz von Y. Akizuki). 2. Folgt für jedes Primideal \mathfrak{p} aus $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \mathfrak{b}$ mit irgendeinem Ideal \mathfrak{b} , und ist das Nullideal als Produkt von Primidealen darstellbar, oder 3. gilt der Teilerkettensatz für die Ideale von \mathfrak{R} und gibt es zwischen keinem teilerlosen Primideal \mathfrak{p} und seinem Quadrat \mathfrak{p}^2 ein Ideal von \mathfrak{R} , so erhält man dieselbe Folgerung wie oben. Zum Schluß werden die direkten Summen von endlichvielen Noetherschen Integritätsbereichen und primären Ringen auf mannigfache Weise charakterisiert, u. a. wird als Korollar ein Satz von W. Krull erhalten, nach welchem ein Hauptidealring die direkte Summe von Hauptidealintegritätsbereichen und primären Ringen ist. *Ladislaus Fuchs.*

Nakayama, Tadas: On construction and characterization of Galois algebras with given Galois groups. J. reine angew. Math. 189, 100—117 (1951).

Wie Hasse (dies. Zbl. 39, 270—272) gezeigt hat, lassen sich die sämtlichen Typen galoisscher Algebren \mathfrak{A} mit vorgegebener Gruppe \mathfrak{G} umkehrbar eindeutig und invariant durch Klassen von Matrix-Faktorensystemen kennzeichnen, wenn alle absolut-irreduziblen Darstellungen von \mathfrak{G} bereits über dem Grundkörper Ω von \mathfrak{A} möglich sind. Bei Hasse wird dabei noch die zusätzliche Voraussetzung gemacht, daß die Charakteristik p von Ω nicht in der Ordnung g von \mathfrak{G} aufgeht: $p \nmid g$. Verf. unternimmt es nun in der vorliegenden Arbeit, von der ein Auszug bereits früher erschienen ist (dies. Zbl. 37, 160), die Hasseschen Ergebnisse auf den allgemeinen Fall, einschließlich $p \mid g$, auszudehnen. Wesentliche Abänderungen gegenüber dem Fall $p \nmid g$ ergeben sich aus der im allgemeinen komplizierteren Struktur des Gruppenringes G von \mathfrak{G} über Ω . Im allgemeinen fallen nämlich die minimalen Rechtsideale von G nicht mehr mit den direkt-unzerlegbaren Summanden von G als \mathfrak{G} -Rechtsmodul zusammen, und demgemäß sind die irreduziblen Darstellungen F_k von \mathfrak{G} und die direkt-unzerlegbaren Komponenten V_k der regulären Darstellung zu unterscheiden. Die letzteren treten in der vorliegenden Arbeit durchweg an die Stelle der irreduziblen Darstellungen im Falle $p \nmid g$ und sind daher für den vorliegenden Zweck als ihre geeigneten Verallgemeinerungen anzusehen. Demgemäß werden die Faktorbasen der galoisschen Algebra \mathfrak{A} den direkten Zerlegungen von G in unzerlegbare Rechtsideale angepaßt; sie setzen sich jedoch nicht wie im Falle $p \nmid g$ aus quadratischen, sondern im allgemeinen aus rechteckigen Matrizen zusammen. Um nun von einer Faktorbasis zum zugehörigen Faktorensystem zu gelangen, wird die bekannte, vom Verf. hier neu und einfach bewiesene Tatsache benutzt, daß das Kroneckersche Produkt zweier unzerlegbarer Komponenten V_k und V_l wiederum in lauter unzerlegbare Komponenten der regulären Darstellung von \mathfrak{G} zerfällt. Man erhält daher ein Multiplikationsschema $V_k \times V_l = P_{k,l}^{-1} V_{k,l} P_{k,l}$, wobei $V_{k,l}$ die diagonale Aneinanderreihung der in $V_k \times V_l$ enthaltenen unzerlegbaren Komponenten V_m in beliebiger, aber festgewählter Reihenfolge bedeutet, und wobei $P_{k,l}$ eine reguläre Matrix ist, welche die Zerfällung von $V_k \times V_l$ leistet. Anknüpfend an dies Multiplikationsschema der V_k erhält nun Verf. nach dem Vorbild von Hasse aus dem Kronecker-Multiplikationsschema einer Faktorbasis von \mathfrak{A} das dazugehörige Faktorensystem $A_{k,l}$, das im allgemeinen aus rechteckigen, nicht quadratischen Matrizen über Ω besteht, und durch das umgekehrt die galoissche Algebra \mathfrak{A} eindeutig festgelegt ist. Assoziativität, Kommutativität und Halbeinfachheit von \mathfrak{A} spiegeln sich in gewissen Relationen der $A_{k,l}$ wider, deren Herleitung und Formulierung jedoch recht umständlich ist, und die im Falle der Halbeinfachheit nicht einmal explizit angegeben werden. Die Abänderung des Faktorensystems bei Änderung der Faktorbasis wird besprochen, jedoch auch nicht explizit angegeben. Der Beweis der angegebenen Sätze benutzt die allgemeine Strukturtheorie eines Gruppenringes bei beliebiger Grundkörpercharakteristik, welche auf R. Brauer und seine Schüler zurückgeht; insbesondere werden die Orthogonalitätsrelationen für die Koeffizienten der irreduziblen bzw. unzerlegbaren Darstellungen benutzt. Angesichts der langen und unübersehbaren Formelreihen, welche in dieser Arbeit auftreten, besteht wohl kein Zweifel, daß die hier dargebotene Theorie noch nicht in ihrer endgültigen Form vorliegt. — Offen bleibt die Frage, wie die Ausführungen des Verf. im Falle einer p -Gruppe \mathfrak{G} mit der Artinschen Theorie der p -Erweiterungen zusammenhängen. Hierauf, sowie auf einige arithmetische Anwendungen, beabsichtigt Verf. noch anderweitig zurückzukommen. — Anhangsweise wendet Verf. die erhaltenen Ergebnisse noch auf die Algebra der Funktionen auf \mathfrak{G} mit Werten aus Ω an, welche in geeigneter Weise als galoissche Algebra mit der Gruppe \mathfrak{G} aufzufassen ist. Er beweist so ein gewisses „Dualitätstheorem“. *Peter Roquette.*

Glaeser, Georges: Dérivation des algèbres commutatives. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 1550—1552 (1951).

Es werden Paare u, D linearer Abbildungen in K einer kommutativen Algebra \mathfrak{A} über einem Körper K , Charakteristik $K \neq 2$, mit

(*) $D(fg) = u(f)D(g) + u(g)D(f)$; $f, g \in \mathfrak{A}$; D nicht Nullabbildung untersucht. Die Ergebnisse des Verf. lassen sich nach Meinung des Ref. am besten in der folgenden Weise begrifflich darstellen: Die Paare u, D mit (*) entsprechen eineindeutig den Homomorphismen (Hom.) $\sigma = \{f \rightarrow u(f)e_1 + D(f)e_2\}$ von \mathfrak{A} in Algebren \mathfrak{S} über K mit Basis e_1, e_2 und Multiplikationsschema $e_1^2 = e_1, e_2^2 = \lambda e_1, e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2$. Durch Diskussion der verschiedenen Typen \mathfrak{S} werden sie klassifiziert: (1) $\lambda = 0$: σ ist Hom. in die Algebra der dualen Zahlen über K . (2) $\lambda = \mu^2, \mu \in K$: σ ist Hom. in die direkte Summe zweier zu K isomorpher Körper und daher

$$u(f) = \frac{\sigma_1(f) + \sigma_2(f)}{2}, \quad D(f) = \frac{\sigma_1(f) - \sigma_2(f)}{2\mu}$$

mit Homomorphismen σ_1, σ_2 von \mathfrak{A} in K , für die $\sigma_1 \neq 0$ und (a) $\sigma_2 \neq 0$ oder (b) $\sigma_2 = 0$ ist. (3) $\lambda \neq \mu^2$ für alle $\mu \in K$: σ ist Hom. in $K(\sqrt{\lambda})$ und daher

$$u(f) = \frac{\sigma(f) + \bar{\sigma}(f)}{2}, \quad D(f) = \frac{\sigma(f) - \bar{\sigma}(f)}{2\sqrt{\lambda}},$$

$\bar{\sigma}(f)$ bezüglich K zu $\sigma(f)$ konjugiert. — Der Kern von D ist eine Teilalgebra \mathfrak{D} mit Kodimension 1 in \mathfrak{A} (Kodim. = $\mathfrak{A}:K - \mathfrak{D}:K$). Zu jeder Teilalgebra \mathfrak{D} mit Kodim. 1 existiert ein Paar u, D mit (*), so daß \mathfrak{D} Kern von D ist. \mathfrak{D} ist daher entweder selbst Ideal von \mathfrak{A} (Fall 2. b) oder es enthält (als Kern von σ) ein Ideal von \mathfrak{A} mit Kodim. 2.

Wolfgang Gaschütz.

Price, Charles M.: Jordan division algebras and the algebras $\mathcal{A}(\lambda)$. Trans. Amer. math. Soc. **70**, 291—300 (1951).

In einem Ring endlichen Ranges wird untersucht, unter welchen Umständen die Verknüpfung $ab + ba$ zu einem nullteilerfreien Jordanschen Ring führt.

Ernst Witt.

Jacobson, N.: General representation theory of Jordan algebras. Trans. Amer. math. Soc. **70**, 509—530 (1951).

Ein Jordanscher Ring ist charakterisiert durch die Regeln $ab = ba, (a^2b)a = a^2(ba)$. Eine lineare Abbildung $a \rightarrow R_a$ in einen assoziativen Ring wird Darstellung genannt, wenn mit der Bezeichnungsweise $[AB] = AB - BA$ die beiden Regeln

$$(1) \quad [R_a R_b c] + [R_b R_a c] + [R_c R_a b] = 0$$

$$(2) \quad R_a R_b R_c + R_c R_b R_a + R_{(a,b)c} = R_a R_b c + R_b R_a c + R_c R_a b$$

erfüllt sind. Für den Fall, daß die Regel

$$(3) \quad R_{a,b} = R_a R_b + R_b R_a$$

gilt, heißt die Darstellung speziell, aus (3) folgt dann (1) und (2). — Beispiel einer im allgemeinen nicht speziellen Darstellung ist die reguläre Abbildung $R_a(x) = ax$. Das Ziel dieser Arbeit ist eine allgemeine Darstellungstheorie. Als Anwendung werden die halbeinfachen Teilalgebren einer beliebigen endlich-dimensionalen Jordanschen Algebra der Charakteristik 0 untersucht. Dabei stellt sich die völlige Analogie heraus mit den Ergebnissen von Malcev und Harish-Chandra über die Theorie der Levischen Zerlegung einer Lieschen Algebra. — Als wichtiges Hilfsmittel werden Liesche Tripelsysteme untersucht. Das sind Systeme mit einer trilinearen Verknüpfung $[abc]$, die folgenden Regeln genügt:

$$(4) \quad [aab] = 0$$

$$(5) \quad [abc] + [bca] + [cab] = 0$$

$$(6) \quad [[abc]de] + [[bad]ce] + [ba[cde]] + [cd[abe]] = 0$$

$$(7) \quad [[abc]de] + [[bad]ce] + [[dcb]ae] + [[cda]be] = 0$$

$$(8) \quad [[abc]de]fg + [[bae]df]eg + [[bad]ce]fg + [[abd]cf]eg + Q + R = 0,$$

wobei Q und R aus den vier vorangehenden Gliedern durch zyklische Vertauschung der Paare $(a, b), (c, d), (e, f)$ entstehen. — Der Name Liesches Tripelsystem rührt daher, daß diese Regeln jedenfalls in einem Lieschen Ring erfüllt sind, wenn $[abc] = [[ab]c]$ gesetzt wird. In dieser Weise läßt sich auch jedes Liesche Tripelsystem in einen Lieschen Ring einbetten, ja es gibt ein-

deutig eine universelle Einbettung, deren Homomorphismen zu allen Einbettungen führen. — Auch zu einem Jordanschen Ringe gehört ein Liesches Tripelsystem hinsichtlich $[abc] = (bc)a - b(ca)$. Eine Darstellung des Jordanschen Ringes ist dann zugleich eine Darstellung dieses Tripelsystems. Hierdurch wird die Darstellungstheorie Jordanscher Ringe zurückgeführt auf die weit entwickelte Darstellungstheorie Liescher Ringe. Es gilt das Theorem: Jede Darstellung einer halbeinfachen Jordanschen Algebra der Charakteristik 0 erzeugt einen halbeinfachen assoziativen Ring. Hieraus folgt die vollständige Reduzibilität jeder Darstellung. Die Untersuchungen von Whitehead (dies. Zbl. 17, 200) zum Nachweis der vollständigen Reduzibilität der Darstellungen Liescher Algebren werden sinngemäß auf Jordansche Algebren übertragen.

Ernst Witt.

Dynkin, E. B.: Über die halbeinfachen Unteralegebren der halbeinfachen Lieschen Algebren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 987—990 (1951) [Russisch].

Zwei Teilmengen M_1, M_2 einer Algebra G heißen φ -konjugiert (d. h. konjugiert bez. einer Darstellung φ von G), wenn es eine Matrix C (komplex) gibt derart, daß $C\varphi(M_1)C^{-1} = \varphi(M_2)$; sie heißen L -konjugiert, wenn sie konjugiert bez. jeder Darstellung von G sind. In § 1 wird ohne Beweise eine Anzahl von Sätzen gebracht, die auf diesen Begriffen basiert sind. Der erste Satz gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für L -Konjugiertheit zweier halbeinfacher (kurz he.) Unteralegebren G', G'' einer he. Algebra G , aus der folgt, daß, wenn G' und G'' L -konjugiert sind in G , dies auch in jeder G umfassenden he. Algebra zutrifft. Im Falle eines einfachen G wird eine hinreichende Bedingung für L -Konjugiertheit angegeben, die im Falle der Algebren $G = A_n, B_n, C_n, G_2, F_4, E_6$ auf ω -Konjugiertheit hinausläuft, wo ω eine Darstellung von G im Raum kleinstmöglicher Dimension ist; im Falle $G = D_n, E_7, E_8$ tritt zu ω -Konjugiertheit die bez. ω' hinzu, wo ω' durch je eines der Schemata charakterisiert wird, die Verf. früher [Uspechi mat. Nauk 2, Nr. 4 (20), 59—127 (1947)] beschrieben hat. Für die D_n zerfällt jede Klasse von ω -konjugierten Algebren in nicht mehr als zwei Klassen von L -Konjugierten, und zwei kommen auch wirklich vor; für E_7, E_8 in nicht mehr als drei, aber ob drei vorkommen, ist nicht bekannt. Im Falle der A_n, B_n, C_n folgt aus L -Konjugiertheit zweier Unteralegebren deren Konjugiertheitschlechthin; in D_n gibt es L -konjugierte, aber nicht-konjugierte Paare von Unteralegebren, die durch äußere Automorphismen ineinander übergeführt werden können. — § 2: Eine Darstellung φ eines he. G heißt ganzzahlig, wenn die Differenz irgend zweier ihrer Gewichte eine lineare Form mit ganzen Koeffizienten in den einfachen Wurzeln der Algebra G ist. Für G_2, F_4, E_8 sind alle Darstellungen ganzzahlig. Für die andern Gruppen werden notwendige und hinreichende Bedingungen für Ganzzahligkeit einer Darstellung angegeben. § 3 handelt vom Index einer Darstellung φ eines einfachen G , d. i. der von x, y unabhängige Faktor $l = l(\varphi)$ in der Formel $(x, y) = l(x, y)_\varphi$, wo $(x, y) = \text{sp}(\varphi(x)\varphi(y))$ und $(x, y)_\varphi$ das normierte, unter den inneren Automorphismen von G invariante Skalarprodukt zweier Vektoren x, y ist. Dieser Index l ist stets eine ganze Zahl. Für A_n, \dots, D_n , sowie für die Ausnahmegruppen werden die möglichen Indizes in einer Tabelle zusammengestellt. In § 4 werden die einfachen Unteralegebren der fünf Ausnahmegruppen aufgestellt und Klassen Konjugierter mit den Werten des Index in Beziehung gesetzt.

H. Schwerdtfeger.

Moore, John T.: Division algebras over fields of formal power series. Proc. Amer. math. Soc. 2, 874—877 (1951).

The author examines when a central division algebra over the field K , of all formal power series in m variables with coefficients in an algebraically closed field of characteristic zero, would be primary. He proves first that a cyclic division algebra of degree p^e over K has also the exponent p^e . Then, using a result of O. F. G. Schilling that every algebraic extension of finite degree over K is abelian and a composite of radical fields, an induction argument leads him to the result that a central division algebra over K is primary if, and only if, it is cyclic of prime power degree; and hence every central division algebra over K is a direct product of cyclic algebras.

V. S. Krishnan.

Krull, Wolfgang: Zur Arithmetik der endlichen diskreten Hauptordnungen. J. reine angew. Math. 189, 118—128 (1951).

Verf. setzt sich zum Ziele, gewisse neue Gesichtspunkte in der Theorie der endlichen diskreten Hauptordnungen herauszuarbeiten. Von den gewöhnlichen Behandlungen abweichend, die sich entweder auf die Bewertungstheorie oder auf die Prüferschen v -Ideale bzw. den van der Waerden-Artinschen Äquivalenzbegriff stützen, benutzt Verf. den Divisorbegriff und zeigt, daß dieser einen schnellen Aufbau der Theorie der endlichen diskreten Hauptordnungen zuläßt. — Zuerst wird nach dem Vorbild der algebraischen Zahlentheorie ein Klassenbegriff der (ganzen und gebrochenen) Ideale eines beliebigen Integritätsbereichs \mathfrak{A} eingeführt, indem man zwei Ideale in die gleiche Klasse K rechnet, falls sie proportional sind. Das kleinste, alle ganzen Ideale einer Klasse K umfassende Ideal wird als das Primitivideal q_K von K bezeichnet. Mittels

dieses Begriffes kann man die Primitivität eines Polynoms über \mathbb{K} in zweckmäßiger Weise definieren und zahlreiche Resultate folgern. Divisoren werden als die Elemente einer freien Abelschen Gruppe \mathfrak{A} , insbesondere die Primdivisoren als die Erzeugenden von \mathfrak{A} , definiert; die Teilbarkeit der Divisoren wird wie üblich erklärt. Ein Homomorphismus der multiplikativen Gruppe der von 0 verschiedenen Elemente des Quotientenkörpers \mathbb{K} der Hauptordnung \mathbb{K} in die Gruppe \mathfrak{A} , bringt den Körper \mathbb{K} in Verbindung mit \mathfrak{A} ; dieser Homomorphismus soll den folgenden Bedingungen genügen: 1. Sind die Bilddivisoren der Elemente a, b beide durch den Divisor T teilbar, so gilt dasselbe für den Bilddivisor von $a + b$; 2. zu verschiedenen Primdivisoren P, Q gibt es ein Element von \mathbb{K} , das durch P , aber weder durch P^2 noch durch Q teilbar ist. Jeder Divisor A definiert ein \mathbb{K} -Ideal α (dieses heißt ein Divisorideal), verschiedene A ergeben verschiedene α , aber die Summe zweier Divisorideale braucht nur dann wieder ein solches zu sein, wenn man es mit einem Noetherschen Fünf-Axiome-Ring zu tun hat. Der Zusammenhang zwischen speziellen \mathbb{K} -Idealen und Divisoren wird ausführlich untersucht und u. a. werden interessante Kriterien nachgewiesen, wann die Divisorideale einer endlichen diskreten Hauptordnung eine Gruppe bilden.

Ladislav Fuchs.

Samuel, Pierre: La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique.

J. Math. pur. appl., IX. Sér. 30, 159—205, 207—274 (1951).

Verf. definiert die Multiplizität eines Primärideals q , das zum Primideal p gehört, auf folgende Weise: es bedeute $q^{(n)}$ die symbolische Potenz von q , d. h. die zu p gehörige Primärkomponente von q^n ; $P_q(n)$ sei die Ideallänge des Primärideals $q^{(n)}$ über p . Verf. beweist, daß $P_q(n)$ für genügend große Werte von n ein Polynom ist in n des Grades d , wo d die Dimension von q und p ist; das erste Glied dieses Polynoms sei $e(q) \cdot n^d/d!$; dann ist $e(q)$ eine natürliche Zahl, welche Verf. die Multiplizität des Primärideals q nennt. Analog ist die Multiplizität eines Stellenringes mit dem maximalen Ideal m gleich $e(m)$. Verf. zeigt, daß diese Definition eine Verallgemeinerung derjenigen von C. Chevalley [Trans. Amer. math. Soc. 57, 1—85 (1945)] ist. Diese Multiplizität $e(q)$ weicht bedeutend von der Ideallänge $l(q)$ ab, und zwar ist unter gewissen Voraussetzungen $e(q) \leq l(q)$; andererseits sieht man z. B., daß die Primärideale $(x_1^7, x_1^6 x_2, x_1^5 x_2^2, x_1^4 x_2^3) \supset (x_1^7, x_1^6 x_2, x_1^5 x_2^2) \supset (x_1^7, x_1^6 x_2^2, x_1^5 x_2^3) \supset (x_1^7, x_1^6)$, welche der Reihe nach die Ideallängen 6, 7, 8, 9 haben, sämtlich dasselbe $e(q) = 9$ besitzen. (Dem Ref. erscheint es noch fraglich zu sein, ob ein Multiplizitätsbegriff, der diese Unterschiede verwischt, in zweckmäßiger Weise den geometrischen Verhältnissen Rechnung trägt.) — Die Multiplizität $i(M; U \cdot V)$ zweier algebraischer Mannigfaltigkeiten U und V längs eines isolierten Bestandteiles M ihres Schnittes wird nach dem Vorgang von A. Weil definiert. Verf. gibt dafür auch die folgende idealtheoretische Fassung: seien u, v und m die definierenden Polynomideale von U, V und M in $\Omega[X_1, X_2, \dots, X_n]$; es bedeuten u' und v' in naheliegender Weise die entsprechenden Erweiterungs Ideale in $\Omega[X_1, \dots, X_n, X_1', \dots, X_n']$, $\mathfrak{D} = (X_1 - X_1', \dots, X_n - X_n')$; dann ist $i(M; U \cdot V)$ gleich der Multiplizität $e(q)$ der zu $(m + \mathfrak{D})/(u + v')$ gehörigen Primärkomponente von $(u + v' + \mathfrak{D})/(u + v')$ im Ringe $\Omega[X; X']/(u + v')$. Verf. wendet diese Definition besonders auf Schnittkomponenten von übernormaler Dimension an, indem er in diesen Fällen, einem Gedanken von Severi folgend, $i(M; U \cdot V) = i(M_p; U_p \cdot V_p)$ setzt, wo der Index p eine passende allgemeine Projektion andeuten soll. In etwas anderer Weise wird dasselbe von E. A. Behrens [Math. Z. 55, 199—215 (1952)] versucht, aber auch hier stellt sich derselbe schwerwiegende Nachteil ein, daß diese Definitionen nicht dem fundamentalen Assoziativgesetz für die Durchschnittsbildung $U \cap (V \cap W) = (U \cap V) \cap W$ genügen. — Bezüglich der vielen weiteren interessanten Untersuchungen und Resultate dieser reichhaltigen Arbeit muß hier auf das Original verwiesen werden.

Wolfgang Gröbner.

Moys, B. N.: The structure of valuations of the rational function field $K(x)$. Trans. Amer. math. Soc. 71, 102—112 (1951).

Let V_0 be a valuation of a field K with the value group Γ_0 and the residue class field \mathcal{K} . The author discusses the problem of constructing valuations V of a simple transcendental extension $L = K(x)$ of K with a given value group Γ and residue class field \mathcal{L} . The restriction to a simple transcendental extension implies that the transcendence degree $T(\mathcal{L}/\mathcal{K})$ and the rational rank $R(\Gamma/\Gamma_0)$ of the factor group Γ/Γ_0 are limited by the inequality $T(\mathcal{L}/\mathcal{K}) + R(\Gamma/\Gamma_0) \leq 1$. Under certain additional assumptions on Γ and \mathcal{L} such as Γ and \mathcal{L} are at most denumerably generated over Γ_0 and \mathcal{K} , several results and existence statements are obtained. The main tool is MacLane's method of augmented valuations and key polynomials (this Zbl. 15, 58, 292). This method has the advantage over Ostrowski's theory of pseudo-convergent sequences that it does not necessitate the previous completion of the base field K to an algebraically closed field.

Ladislav Fuchs.

Monna, A. F.: *P-adische Zahlen.* Simon Stevin **28**, 40—54 (1951) [Holländisch].

Extract of a lecture on this subject, containing an account of the most important theorems of *p*-adic numbers. W. Verdenius.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Hasse, Helmut: *Allgemeine Theorie der Gaußschen Summen in algebraischen Zahlkörpern.* Abh. Deutsche Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. **1951**, Nr. 1, 23 S. (1951).

Systematische Behandlung der Gaußschen Summen (G. S.) in algebraischen Zahlkörpern in Analogie zu dem in Verf.s Buch „Vorlesungen über Zahlentheorie“ (dies. Zbl. **38**, 177) behandelten rationalen Spezialfall. Bezeichnungen: K ein endlich-algebraischer Zahlkörper mit dem reziproken Differentendivisor $\tilde{1}$; S die Spur in K ; $e(x) = e^{2\pi i S(x)}$ für $x \in K$; χ ein Kongruenzcharakter der Divisorengruppe von K vom Führer f (u unendlicher Bestandteil); für zu f nicht prime ganze Divisoren sei $\chi(\tau) = 0$; m w ein Erklärungsmodul von χ (w unendlicher Bestandteil); a ein Hilfsdivisor; $a \tilde{a} = \tilde{1}$; $n \neq 0$ aus K ein Parameter mit $n \cong \tilde{a} \frac{n}{m}$ (n ganzer Divisor). Die zu χ, m, w, a, n gehörige allgemeine G. S. ist definiert durch

$$\tau_{n,n}(\chi, m|w|a) = \sum_x \chi(p) e(xn),$$

wobei über alle $x \bmod^+ m a$ mit $x \equiv 0 \bmod^+ a$, $x \equiv 1 \bmod w$, $x \cong p a$, $(p, m) = 1$ zu summieren ist. Verf. untersucht ausführlich die Abhängigkeit von den Bestimmungsstücken a, m, w, n und n und beweist die Reduktionsregel

$$\tau_{n,n}(\chi, m|w|a) = \frac{\Phi(m)}{\Phi(m_0)} \mu\left(\frac{m_0}{f}\right) \chi\left(\frac{m_0}{f}\right) v(n) \bar{\chi}(n_0) \tau(\chi).$$

Die normierte G. S. $\tau(\chi) = \tau_{1,1}(\chi, f|\tilde{f})$ hängt nur noch von χ ab; Φ bedeutet die Eulersche Funktion in K ; $\frac{n_0}{m_0}$ mit $f|m_0$, $\left(\frac{n_0}{m_0}, \frac{m_0}{f}\right) = 1$ ist die bis auf den Nennerfaktor f reduzierte Darstellung von $\frac{n}{m}$; μ die Möbiussche Funktion für Divisoren; $v(n) = \chi(t)$ mit $t \equiv 1 \bmod m$, $t \equiv n \bmod w$ bedeutet einen unabhängig von $t \in K$ bestimmten Vorzeichencharakter $\bmod w$. Bei der Herleitung treten als wichtige Zwischenstufen die primitiven G. S. $\left(\frac{n}{m}\right.$ wie eben reduziert) und die eigentlichen G. S. (Erklärungsmodul = Führer) auf. Eine allgemeine G. S. ist verschieden von Null (echte G. S.) genau dann, wenn $(n_0, f) = 1$, $\left(\frac{m_0}{f}, f\right) = 1$ und $\frac{m_0}{f}$ quadratfrei ist. — Durch seine Werte für Hauptdivisoren von K läßt sich χ als Zahlcharakter in der Multiplikativgruppe von K erklären. Es sei $\chi = \chi_0 v$ ($\chi_0 \bmod m$, $v \bmod w$ erklärbarer Zahlcharakter). Dann gilt $\tau_{n,n}(\chi, m|w|1) = \tau_{n,n}(\chi_0, m|1)$. Für die letzteren G. S. beweist Verf. folgende Komponentenzerlegung: Ist $m = \prod m_i$ eine Zerlegung von m in ganze, paarweise teilerfremde Divisoren m_i und $\chi = \prod \chi_i$ die ihr entsprechende Zerlegung des $\bmod m$ erklärbaren Zahlcharakters χ in $\bmod m_i$ erklärbare Zahlcharakter χ_i , so gilt $\tau_{n,n}(\chi, m|1) = \prod \tau_{n_i, n_i}(\chi_i, m_i|1)$ mit $n_i \cong 1, \frac{n_i}{m_i}$ (1_i orthogonale Idempotente des Restklassenringes $\bmod m$). — Der Betrag einer normierten G. S. errechnet sich aus $|\tau(\chi)|^2 = \Re(f)$. — Die Arbeit schließt mit einer Untersuchung der echten eigentlichen G. S. zu Primdivisorpotenzführern p^e , die für $q = 1$ mit G. S. in endlichen Körpern identisch sind.

H. L. Schmid.

Nakayama, Tadasi: *Determination of a 3-cohomology class in an algebraic number field and belonging algebra-classes.* Proc. Japan Acad. **27**, 401—403 (1951).

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper, K ein galoisscher Oberkörper mit der Galoisgruppe $\mathfrak{G} = \{\sigma, \tau, \dots\}$. I_k sei die Gruppe der Chevalleyschen Ideale, P_k die Hauptidele und $C_k = I_k/P_k$ die Idelklassengruppe von K . Nach A. Weil (nachsteh. besprochen) und Verf. [J. Math. Soc. Japan 3, 52—58 (1951)] kann man jeder solchen Erweiterung K/k in invarianter Weise ein Faktorensystem $\alpha(\sigma, \tau)$ in C_K zuordnen. Wählt man für $\alpha(\sigma, \tau)$ Vertreter $a(\sigma, \tau)$ in I_K und wendet auf sie den Korandoperator δ an, so erhält man wegen $\delta a = 1$ einen Kozyklus $\delta a(\varrho, \sigma, \tau) = a(\sigma, \tau) a(\varrho, \sigma, \tau)^{-1} a(\varrho, \sigma\tau) a(\varrho, \sigma)^{-\tau}$ in P_K und damit eine 3-Kohomologieklassse α von \mathfrak{G} in K . Andererseits hat Teichmüller (dies. Zbl. 23, 198) jeder einfachen Algebra A mit dem Zentrum K und der Eigenschaft, daß sich jeder Automorphismus von K über k zu einem Automorphismus von A fortsetzen läßt (d. h. daß die Invarianten $\left(\frac{A}{\mathfrak{P}}\right)$ und $\left(\frac{A}{\mathfrak{P}'}\right)$ für zwei Primteiler \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' in K desselben Primdivisors \mathfrak{p} in k übereinstimmen) eine 3-Kohomologieklassse β_A zugeordnet. Verf. gibt den folgenden Zusammenhang zwischen α und β_A an: Es sei \mathfrak{P} in K ein Primteiler des Primdivisors \mathfrak{p} in k , $n_{\mathfrak{P}} = [K_{\mathfrak{P}}:k_{\mathfrak{P}}]$ der \mathfrak{p} -Grad von K/k , n' das kleinste gemeinsame Vielfache aller $n_{\mathfrak{P}}$ und $n = [K:k]$; dann und nur dann ist $\beta_A = \alpha$, wenn $\sum_{\mathfrak{P}} \left(\frac{A}{\mathfrak{P}}\right) \frac{n'}{n_{\mathfrak{P}}} \equiv -\frac{n'}{n} \pmod{1}$ ist.

Martin Kneser.

Weil, André: Sur la théorie du corps de classes. J. math. Soc. Japan 3, 1—35 (1951).

Verf. stellt und löst das Problem, für eine galoissche Erweiterung K/k eines algebraischen Zahlkörpers k mit der Galoisgruppe g eine durch vier Eigenschaften invariant ausgezeichnete Gruppenerweiterung $G_{K,k}$ der Idelklassengruppe $C_K = I_K/P_K$ (I_K = Idelgruppe von K , P_K = Gruppe der Hauptidele von K) zur Faktorgruppe $g = G_{K,k}/C_K$ zu konstruieren, und verwendet die Ergebnisse zu einer Verallgemeinerung der Heckschen \mathfrak{L} -Funktionen und deren Faktorzerlegung im Sinne der Zerlegung der Artinschen \mathfrak{L} -Funktionen. Die Möglichkeit einer derartigen Verallgemeinerung hatte schon Artin [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 8, 292—306 (1930)] bemerkt. — Im Teil I führt Verf. eine gegenüber der von Chevalley (dies. Zbl. 15, 151) verwendeten Topologie verfeinerte Topologie auf der Idelgruppe I_k eines algebraischen Zahlkörpers oder algebraischen Funktionenkörpers k vom Transzendenzgrad 1 mit endlichem Konstantenkörper k_0 ein. Die Verfeinerung besteht darin, daß zusätzlich zu den Chevalleyschen „Überkongruenzforderungen“ an den nichtarchimedischen Primstellen im Fall der Zahlkörper noch Annäherungsforderungen an den unendlichen Primstellen hinzutreten. Während im Fall der Funktionenkörper der Isomorphiesatz der Klassenkörpertheorie darin besteht, daß die Idelklassengruppe $C_k = I_k/P_k$ vermöge des Chevalleysymbols $[\ast, A_k/k]$ (s. obiges Zitat) topologisch isomorph auf eine gewisse Untergruppe \mathfrak{G}_k der Galoisgruppe \mathfrak{G}'_k der maximal-abelschen Erweiterung A_k/k von k abgebildet wird, wird im Fall der Zahlkörper nur die Faktorgruppe $C'_k = C_k/D_k$ (D_k = Zusammenhangskomponente der 1 von C_k) topologisch isomorph auf \mathfrak{G}'_k abgebildet. Verf. sieht es als eine der Hauptaufgaben der modernen Zahlentheorie an, auch im letzteren Fall eine „Interpretation“ von C_k zu geben, die möglicherweise den Schlüssel zur Riemannschen Vermutung liefern könne, eine Bemerkung, die Ref. nicht verständlich wurde. — In Teil II wird die Problemstellung gegeben. Für eine endliche galoissche Erweiterung K/k ist die Galoisgruppe $\mathfrak{G}'_{K,k}$ von A_K über k eine Gruppenerweiterung $\mathfrak{G}'_{K,k} = (\mathfrak{G}'_K, \alpha)$ von \mathfrak{G}'_K zur Faktorgruppe $g = \{\sigma, \tau, \dots\}$ mit einem Faktorensystem $\alpha = \{\alpha_{\sigma, \tau}\}$ in \mathfrak{G}'_K . Die Gruppe g kann als Automorphismengruppe von C_K aufgefaßt werden, und C_k in C_K in kanonischer Weise topologisch isomorph eingebettet werden. Dann wird für jedes Körperpaar K, k mit K/k galoissch gesucht eine Gruppenerweiterung $G_{K,k}$ von C_K zur Faktorgruppe g und ein stetiger Homomorphismus $\varphi_{K,k}$ von $G_{K,k}$ auf $\mathfrak{G}'_{K,k}$, der auf C_K gerade den Chevalleyhomomorphismus: $C_K \rightarrow [C_K, A_K/K] = \mathfrak{G}'_K$ induziert, derart, daß folgende Bedingungen erfüllt sind: (A) Die „reduzierte“ Verlagerung $v_{K,k}$ von $G_{K,k}$ in C_K induziert einen Isomorphismus der Faktorkommutatorgruppe $G_{K,k}/G_{K,k}^{(e)}$ ($G_{K,k}^{(e)}$ = abgeschlossene Hülle der Kommutatorgruppe von $G_{K,k}$) auf die Untergruppe C'_k von C_K . (B) Ist k' ein Zwischenkörper von K/k , so ist $G_{K/k'} \subseteq G_{K,k}$ und $\varphi_{K,k} = \varphi_{K,k'}$ auf $G_{K,k'}$. (C) Ist k'/k sogar galoissch, so existiert ein Isomorphismus η von $G_{K,k}/G_{K,k}^{(e)}$ auf $G_{k',k'}$, der auf $G_{K,k'}/G_{K,k'}^{(e)}$ gerade den Verlagerungsisomorphismus $v_{k',k'}$ auf $C_{k'}$ im Sinn von (A) induziert. Ferner soll für die Abbildungsketten $G_{K,k} \xrightarrow{\varphi} G_{K,k}/G_{K,k}^{(e)} \xrightarrow{\eta} G_{k',k'} \xrightarrow{\varphi_{k',k'}} \mathfrak{G}'_{k',k'}; G_{K,k} \xrightarrow{\varphi_{K,k}} \mathfrak{G}'_{K,k} \xrightarrow{\varphi'} \mathfrak{G}'_{K,k}/\mathfrak{G}'_{K,k'} \xrightarrow{\eta'} \mathfrak{G}'_{k',k'}$ stets gelten: $\varphi_{k',k'} \circ \eta \circ \varrho = \eta' \circ \varrho' \circ \varphi_{K,k}$. (D) Ist s beliebig aus $G_{K,k}$, so ist $[v_{K,k}(s), A_k/k]$ gerade derjenige Automorphismus,

der von $s' = \varphi_{K,k}(s)$ auf A_k induziert wird. — Im Fall der Funktionenkörper ist (A) für eine gewisse Untergruppe $\mathfrak{G}_{K,k}$ der Galoisgruppe $\mathfrak{G}'_{K,k}$ von A_K/k an Stelle von $G_{K,k}$ der Verlagerungssatz der Klassenkörpertheorie (s. nachfolgendes Referat über eine Arbeit von Chevalley), während (B) und (C) hier auf Grund der galoisschen Theorie trivial sind. — Im Teil III werden Hilfssätze bewiesen, die die Struktur von D_K betreffen. Durch Bestimmung der topologischen Struktur von D_K/D'_K (D'_K = maximal-kompakte Untergruppe von D_K) zeigt Verf. unter Verwendung eines kohomologietheoretischen Satzes von Nakayama-Hochschild (erscheint in Ann. of Math.), daß die Kohomologiegruppe $C^{(d)}(D_K, g)$ der Dimension d von g in D_K im Fall eines ungeraden d gleich = 1, und im Fall eines geraden d direktes Produkt von r_0 (r_0 = Anzahl der reellen Primstellen von k , die in K verzweigt sind) Zyklen der Ordnung 2 ist. Dieser Satz wird an drei wichtigen Stellen für die Dimension $d = 0$ (Struktur von $C_k \cap D_K$), $d = 2$ (Struktur der Faktorensystemklassen von g in D_K), $d = 3$ (jedes 3-Faktorensystem von g in D_K zerfällt) angewendet. — Die in Teil V durchgeführte Lösung des Problems besteht in der Konstruktion einer Erweiterung $G_{K,k} = \langle C_K, \{a_{\sigma, \tau}\} \rangle$ und eines Homomorphismus $\varphi_{K,k}$ von $G_{K,k}$ auf $\mathfrak{G}'_{K,k}$, die (B) und (D) erfüllen und dadurch auch eindeutig bestimmt sind; $G_{K,k}$ und $\varphi_{K,k}$ erfüllen dann auch (A) und (C). Die Konstruktion verwendet dabei wesentlich die in Teil IV auf Grund des Verschiebungssatzes der Klassenkörpertheorie und einer elementaren Formel für Faktorensysteme durchgeführte Reduktion der Bedingung (D) auf die Bedingung (F), die in der Forderung (D) für alle Körperpaare K, k' besteht, wo k' alle Teilkörper von K/k mit $[K:k'] = 2$ durchläuft. [Bemerkung der Ref.: Die Konstruktion der kanonischen Erweiterung $G_{K,k}$ von C_K bzw. des kanonischen Faktorensystems $\alpha = \{a_{\sigma, \tau}\}$ von g in C_K kann nach Nakayama {J. math. Soc. Japan 3, 52–58 (1951); Ann. of Math., II. Ser. 55, 73–84 (1952)} auch rein arithmetisch-algebraisch durchgeführt werden. Siehe dazu auch eine demnächst in den Hamb. Abh. erscheinende Arbeit des zweiten Ref.] — Für die Anwendungen auf die \mathfrak{L} -Funktionen wird in Teil VI zunächst ein Abriß der Hilbertschen Theorie für unendliche galoissche Erweiterungen Ω/k gegeben, der sich mit Zerlegungs- und Trägheitskörpern bzw. -gruppen von Ω/k für eine nichtarchimedische Bewertung v von Ω befaßt. Diese Begriffe werden dabei in organischer Weise aus den entsprechenden Begriffen „im Kleinen“ definiert, die für endliche Erweiterungen bekannten Tatsachen hergeleitet und mit der lokalen Klassenkörpertheorie in Verbindung gesetzt. Verf. definiert dann in geeigneter Weise eine Zerlegungsgruppe H_v , Trägheitsgruppe $H_i = H_v$ (p die Primstelle von k , die der von v auf k induzierten Bewertung entspricht) und Frobeniusklasse F_p von v in $G_{K,k}$, wobei diese Gruppen nur bis auf Transformation mit einem beliebigen Element aus $G_{K,k}$ durch p bestimmt sind. Auf der kompakten Gruppe H_v kann für jede stetige, bei inneren Automorphismen von $G_{K,k}$ invariante Funktion φ von $G_{K,k}$ mit Hilfe des Haarschen Maßes ein invariantes Integral definiert werden, das sich durch „Translation“ auch auf die Klassen F_p^n ($n \geq 1$) nach H_p überträgt. Verf. definiert dann als \mathfrak{L} -Funktion für φ mit dem Integral $M(\varphi, p^n)$ von φ auf F_p^n die Funktion

$$\log \mathfrak{L}(s, \varphi; K/k) = \sum_{p, n} \frac{M(\varphi, p^n)}{n \cdot \mathfrak{N}(p)^{n \cdot s}} \quad (s \text{ komplexe Variable}),$$

wo die Summe über die endlichen p von k und alle $n \geq 1$ erstreckt ist. Die Funktionen sind in der Form $\mathfrak{L}(s, \chi, k/k)$ mit Charakteren χ von C_k mit den Heckeschen \mathfrak{L} -Funktionen mit „Größencharakteren“ χ identisch, während die Artinschen \mathfrak{L} -Funktionen mit solchen irreduziblen Charakteren von $G_{K,k}$ gebildet sind, die zugleich als Charaktere von $\mathfrak{G}_{K,k}$ aufgefaßt werden können. Verf. erwähnt, daß seine \mathfrak{L} -Funktionen die analogen formalen Eigenschaften wie die Artinschen besitzen, und beweist auf Grund des R. Brauerschen Satzes über induzierte Charaktere, daß sich seine \mathfrak{L} -Funktionen für Charaktere χ als Potenzprodukte von Heckeschen \mathfrak{L} -Funktionen darstellen lassen, also insbesondere meromorph sind.

Helmut Hasse — Wolfram Jehne.

Chevalley, Claude: Deux théorèmes d'arithmétique. J. math. Soc. Japan 3, 36–44 (1951).

Beweis zweier arithmetischer Sätze über algebraische Zahlen, die in der vorstehend referierten Arbeit von A. Weil angewendet werden. — Der erste Satz ist verwandt mit dem von Artin [Abh. math. Sem Univ. Hamburg 5, 354 (1927)] beim Beweis seines Reziprozitätsgesetzes herangezogenen, dort analytisch bewiesenen Hilfssatz, der später vom Verf. (dies. Zbl. 8, 53) rein-arithmetisch bewiesen und von v. d. Waerden (dies. Zbl. 9, 6) verallgemeinert wurde. Diese Verallgemeinerung stellt fest, daß zu einer gegebenen multiplikativen Gruppe A im rationalen Zahlkörper P mit endlicher Basis a_i (Ordnungen $n_i = 0$ oder 2) und gegebenem natürlichen Exponenten k eine zyklische Kongruenzklasseneinteilung in P derart existiert, daß bei ihr die Basiselemente a_i jeweils von durch (k, n_i) teilbarer Ordnung sind

[also von durch k bzw. $(k, 2)$ teilbarer Ordnung]. Verf. betrachtet allgemeiner eine Gruppe A der angegebenen Art in einem beliebigen endlich-algebraischen Zahlkörper K , spezialisiert die gesuchte Klasseneinteilung in K zu der in die primen Restklassen mod. m mit natürlichem m und beweist rein-arithmetisch — sowie in einer Beweisvariante auch analytisch —, daß man m (prim zu einer vorgegebenen Zahl $\neq 0$) so wählen kann, daß jede Zahl $a \equiv 1 \pmod{m}$ aus A eine k -te Potenz in A ist. Der rein-arithmetische Beweis stützt sich auf folgenden, auch an sich interessanten körpertheoretischen Satz: Ist l^v eine Primzahlpotenz, K ein Körper mit Charakteristik $\neq l$, der zudem im Spezialfall $l = 2$ die $\sqrt{-1}$ enthält, und K_{l^v} der Körper der l^v -ten Einheitswurzeln über K , so ist jedes in K_{l^v} ausziehbare l^v -te

Radikal $\sqrt[l^v]{a}$ (a in K) bereits in K ausziehbar. Diesen Satz bewies zur selben Zeit Ref. (dies. Zbl. 39, 31 u. zwar S. 48—50 der Arbeit) unabhängig von Verf. und gab darüber hinaus noch die Modifikation für den Spezialfall $l = 2$ an, wenn $\sqrt{-1}$ nicht in K liegt. — Der zweite Satz ist eine Verallgemeinerung des Verschiebungssatzes der lokalen Klassenkörpertheorie. Sei Ω die p -adische Hülle eines endlich-algebraischen Zahlkörpers (oder auch Funktionenkörpers vom Transzendenzgrad 1) zu einem Primdivisor p . Sei ferner N/Ω ein Normalkörper endlichen Grades mit der Galoisgruppe \mathfrak{G} und dem maximal-abelschen Teilkörper Ω'/Ω , sowie N/K ein Faktornormalkörper ($\Omega \leq K \leq N$) mit der Untergruppe \mathfrak{U} und dem maximal-abelschen Teilkörper K'/K . Dann gilt für das Normsymbol die Verlagerungsregel

$$\left(\frac{x, K'/K}{q}\right) = \mathfrak{B}_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{U}} \left(\frac{x, \Omega'/\Omega}{p}\right), \quad (x \not\equiv 0 \text{ in } \Omega),$$

wo $\mathfrak{B}_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{U}}$ die gruppentheoretische Verlagerung und q den Primdivisor von K bezeichnet. Verf. gibt einen rein lokalen Beweis dieses Satzes und bemerkt, daß der Satz in engem Zusammenhang mit Resultaten von Nakayama (dies. Zbl. 12, 390), Akizuki (dies. Zbl. 13, 293) und Šafarevič [C. r. (Doklady) Acad. Sci. URSS, n. Ser. 53, 15—16 (1946)] steht und sich vermutlich aus ihnen herleiten läßt. Verf. bemerkt ferner, daß sich der entsprechende globale Verlagerungssatz über das Chevalley-Symbol (Artin-Symbol im Bereich der Ideale) ganz entsprechend beweisen läßt, daß jedoch der Beweis hierfür sich einfacher aus dem Verlagerungssatz für den Frobenius-Automorphismus von Artin [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 7, 46 (1930)] ergibt. Umgekehrt läßt sich übrigens nach einer mündlichen Mitteilung von M. Kneser an Ref. aus dem so bewiesenen globalen Satz leicht die folgende globale Verlagerungsformel für das Normsymbol folgern:

$$\prod_{q|p} \left(\frac{x, K'/K}{q}\right) = \mathfrak{B}_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{U}} \left(\frac{x, \Omega'/\Omega}{p}\right) \quad (x \not\equiv 0 \text{ in } \Omega),$$

wo Ω ein endlich-algebraischer Zahlkörper, p ein Primdivisor von Ω ist und q dessen Primdivisoren in K durchläuft (Situation im übrigen analog wie oben).

Helmuth Hasse.

Tamagawa, Tuneso: On unramified extensions of algebraic function fields. Proc. Japan Acad. 27, 548—551 (1951).

Sei K ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 und Geschlecht g mit algebraisch-abgeschlossenem Konstantenkörper von Primzahlcharakteristik p , und sei L ein unverzweigter zyklischer Erweiterungskörper vom Grade n über K . Nach der Hurwitzschen Formel hat L das Geschlecht $G = (g-1)n + 1$. Verf. untersucht die Struktur derjenigen Darstellung D vom Grade G der zyklischen Galoisgruppe \mathfrak{G} von L/K , die durch den Modul der ganzen Differentiale von L vermittelt wird, eine Aufgabe, die bei Charakteristik 0 von Chevalley-Weil (dies. Zbl. 9, 160) für beliebige galoissche Erweiterungen L/K vollständig gelöst wurde. Für $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ überträgt sich das dortige Ergebnis nebst Beweis. Für $n = p^r$ zieht Verf. die für den unverzweigten zyklischen Fall von Hasse-Witt (dies. Zbl. 13, 341) entwickelte Methodik heran. In beiden Fällen, und damit

dann auch für beliebige n , stellt sich folgendes Ergebnis heraus: D ist die direkte Summe von $g - 1$ regulären und einer identischen Darstellung von \mathcal{G} . Verf. vermutet, daß dies allgemeiner für unverzweigte galoissche Erweiterungskörper L/K gilt.

Helmut Hasse.

Zahlentheorie:

Ricci, Giovanni: Elementi di teoria dei numeri. Repertorio Mat. 1—61 (1951).

In diesem Repertorium gibt Verf. eine Einführung in die elementare Zahlentheorie. Am Anfang steht eine Diskussion der Axiomensysteme der natürlichen Zahlen, insbesondere das von Peano. Bei der kurzen Erklärung von Summe und Produkt erschiene es Ref. jedoch angebracht, auf die an dieser Stelle zutage tretende Schwierigkeit hinzuweisen (vgl. E. Landau, Grundlagen der Analysis, Leipzig 1930). Im Anschluß wird der Ring aller ganzen Zahlen definiert. Es folgen die gängigen Sätze und Begriffsbildungen bis zum Kongruenzbegriff (ausschließlich quadratischer Reste), ferner endliche Kettenbrüche. Am Schluß werden die Pythagoreischen Zahlen behandelt mit einem daran anknüpfenden kurzen Referat über das Fermat-Problem.

Hans-Heinrich Ostmann.

Thébault, Victor: Sur certaines puissances entières des nombres consécutifs. Mathesis 60, 248—251 (1951).

Wahlgreen, Agne: Einige magische Quadrate. Elementa 34, 27—33 (1951) [Schwedisch].

Ankeny, N. C. and C. A. Rogers: A conjecture of Chowla. Ann. of Math., II. Ser. 53, 541—550 (1951).

The authors prove that if a is an integer such that the congruence $x^n = a \pmod{p}$ is solvable for all sufficiently large prime numbers p , n being a fixed positive integer, then either there exists an integer b such that $a = b^n$ or $8 \mid n$ and there exists an integer b such that $a = 2^{n/2} b^n$. They have overlooked the fact that this result was obtained earlier by E. Trost (this Zbl. 9, 298).

Paul T. Bateman.

Brandt, Heinrich: Über das quadratische Reziprozitätsgesetz. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 99, Nr. 1, 17 S. (1951).

Aus dem „Gefühl“, daß sich das quadratische Reziprozitätsgesetz im rationalen Zahlkörper „noch besser formulieren lassen“ müsse, gibt Verf. eine an Euler, Gauß, Kronecker anknüpfende „neue Formulierung“ dieses Gesetzes, nebst einem sich an den zweiten Gaußschen anlehnenden Beweis, und behandelt zum Schluß in dieser neuen Formulierung kurz folgende Gegenstände: (1.) Beweis für die Produktrelation zwischen den Geschlechtsinvarianten binärer quadratischer Formen, (2.) Aufstellung der Linearformen für die durch ein Geschlecht darstellbaren Zahlen, (3.) Beweis des Satzes, daß die Anzahl der Diskriminantenprimteiler (einschl. -1) einer rationalen Quaternionenalgebra gerade ist (mittels ternärer quadratischer Formen), (4.) Explizite Ausdrücke für die Geschlechtscharaktere, die den Darstellungen eines quadratischen Zahlkörpers durch eine rationale Quaternionenalgebra zugeordnet sind. — Die beiden vom Verf. als neu hervorgehobenen Züge sind die Verwendung des normierten $|a| = (-1)^{(a-1)/2} a$ zu ungeradem a und die Einbeziehung des Wertes $(d/-1) = \text{sgn. } d$ in den Wertebereich des Kroneckerschen Symbols. Beides sind ganz geläufige Ausgestaltungen der Theorie des quadratischen Reziprozitätsgesetzes; Ref. hat sie als solche in seinen Zahlentheoriebüchern verwendet. — Die „neue Formulierung“ ist eine diese Ausgestaltungen benutzende Reziprozitätsformel mit der begrifflichen Deutung: die durch eine quadratische Form mit Stammdiskriminante d darstellbaren Primzahlen p haben positiven, die nicht darstellbaren negativen Charakter, wobei der Charakter durch das Kroneckersche Symbol (d/p) gegeben ist. Dies ist in moderner Ausdrucksweise einfach das Zerlegungsgesetz für die Primzahlen in quadratischen Zahlkörpern. *Helmut Hasse.*

Skolem, Th.: Existenz eines n -ten Nichtpotenzrestes mod p kleiner als \sqrt{p} . Norsk mat. Tidsskr. 33, 123—126 (1951) [Norwegisch].

Verf. beweist nach der Abzählung primitiver Gitterpunkte in einem Rechteck, d. s. solche (x, y) mit $1 \leq x, y \leq m$, $(x, y) = 1$, mit Hilfe des Ein- und Ausschaltungsprinzips den bekannten Satz, daß es für jede hinreichend große Primzahl p stets einen quadratischen Nichtrest q mit $1 \leq q \leq \sqrt{p}$ gibt. Hieraus folgt dann: Zu beliebigem n und jeder hinreichend großen Primzahl p gibt es einen n -ten Potenznichtrest q mit $1 \leq q \leq \sqrt{p}$, wenn nur mindestens ein n -ter Potenznichtrest mod p existiert.

H. E. Richert.

Aucoin, A. A.: Systems of diophantine equations. Proc. Amer. math. Soc. 2, 760—765 (1951).

In this paper are proved three theorems concerning diophantine equations. The first theorem deals with the solution of the system

$$\prod_{j=1}^n \sum_{k=1}^q a_{ijk} x_k = f_i(y_i) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

where a_{ijk} are integers, $f_i(y_i) = f_i(y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ia})$ are homogenous polynomials of degree m , with integral coefficients, and m and n are relatively prime. It is supposed that integers $p_k^{(h)}$ exist such that

$$\sum_{k=1}^q a_{ijk} p_k^{(h)} = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n-1).$$

Then it is proved that every integral solution $x_k, y_{ir}, r = 1, 2, \dots, g$, where x_k do not satisfy certain linear relations, is equivalent (in a sense defined) to an explicit given solution, depending in a complicated manner upon $a_{ijk}, p_k^{(h)}$ and $q + ng$ parameters. The second theorem has to do with the integral solution of the system $f_1(x) = g_1(u), f_2(x) = g_2(v)$, where $f_1(x) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_p), f_2(x) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_q)$ are homogenous polynomials of degree n with integral coefficients. It is further supposed that integers $x_i = a_i$ exist such that all the partial derivatives of f_1 , as well as those of f_2 , of all orders less than $n-1$ vanish for $x_i = a_i$. The functions $g_1(u) = g_1(u_1, u_2, \dots, u_k)$ and $g_2(v) = g_2(v_1, v_2, \dots, v_h)$ are homogenous polynomials with integral coefficients of degree m , where m and n are relatively prime. The author derives a theorem analogous to the first one. Exception is made from solutions satisfying a special condition. The third theorem treats a system for which there is no typical problem. The method is illustrated by a particular system. Single equations of the type mentioned in the first two theorems have been solved earlier by two different methods. See A. A. Aucoin and W. V. Parker (this Zbl. 21, 10). and A. A. Aucoin (this Zbl. 24, 248). *Wilhelm Ljunggren.*

Skolem, Th.: Ein einfacher Beweis für die Lösbarkeitsbedingung der diophantischen Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$. Norsk mat. Tidsskr. 33, 105—112 (1951) [Norwegisch].

Für die bekannten Lösbarkeitsbedingungen der im Titel genannten Gleichung gibt Verf. einen neuen einfachen Beweis. Der Beweis stützt sich zur Hauptsache auf den folgenden Spezialfall eines Satzes von A. Brauer u. R. L. Reynolds (dies. Zbl. 42, 268), den man leicht mit Hilfe des Dirichletschen Schubfachschlusses erhält: Es seien P, Q, R reelle Zahlen, sämtlich $< m$, $PQR = m$, m natürlich, > 1 . Dann hat die Kongruenz $ax + by + cz \equiv 0 \pmod{m}$ stets eine Lösung in ganzen Zahlen x, y, z , nicht sämtlich $\equiv 0 \pmod{m}$, so daß $|x| \leq P, |y| \leq Q, |z| \leq R$. Für die Schranken der minimalen Lösung der Gleichung erhält Verf. ein etwas schwächeres Resultat als L. Holzer (dies. Zbl. 37, 26), wo allerdings wesentlich höhere Hilfsmittel herangezogen werden. Mit derselben Methode wird schließlich der folgende Satz bewiesen: Es seien $a(t), b(t), c(t)$ drei gegebene Polynome aus dem Ring R der rationalzahligen Polynome in t , deren Produkt quadratfrei ist.

Dann ist für die Lösbarkeit der Gleichung $a(t) f^2(t) + b(t) g^2(t) + c(t) h^2(t) = 0$ in nicht identisch verschwindenden Polynomen $f(t), g(t), h(t)$ aus R notwendig und hinreichend, daß a, b, c für keinen reellen Wert von t dasselbe Vorzeichen besitzen und in $R - b c, -c a, -a b$ beziehentlich quadratische Reste von a, b, c sind.

H. E. Richert.

Mordell, L. J.: On the equation $a x^2 + b y^2 - c z^2 = 0$. Monatsh. Math. 55, 323—327 (1951).

This paper contains a very simple proof of the following theorem of Legendre: Let a, b, c be positive integers, which are square free, relatively prime in pairs. Then the equation $f(x, y, z) = a x^2 + b y^2 - c z^2 = 0$ has a solution in integers, not all zero, if and only if, $-a b$ is a quadratic residue of c , $b c$ of a and $c a$ of b . The proof is made by a lemma on homogeneous linear forms of a well known type, which gives that $f(x, y, z) \equiv 0 \pmod{4 a b c}$ has an integer solution, not $(0, 0, 0)$ with $|x| \leq \sqrt{2 b c}$, $|y| < \sqrt{2 c a}$, $|z| < 2 \sqrt{a b}$. — The author gives also an interesting observation on the proof of L. Holzer (this Zbl. 37, 26) of the theorem that there exists an integer solution, not $(0, 0, 0)$ of $f(x, y, z) = 0$, with $|x| < \sqrt{b c}$, $|y| < \sqrt{c a}$, $|z| < \sqrt{a b}$, provided $a b > 1$.

W. Verdenius.

Oblath, Richard: Une équation diophantienne de M. Segre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 199—204 (1951). Addition. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 378 (1951).

Verf. zeigt zunächst mit einfachen, auf dem Begriff der Teilbarkeit beruhenden Überlegungen, daß die diophantische Gleichung $(1) y^2 = 3 x (x^2 + x + 1)$ nur die ganzzahligen Lösungen $x = 0, y = 0$; $x = 1, y = \pm 3$ und daß $y^n = 3 x (x^2 + x + 1)$ ($n > 2$) nur die triviale ganzzahlige Lösung $x = 0, y = 0$ hat. Ein Versehen, das dabei in einer Hilfsüberlegung vorkommt, wird in der „Addition“ behoben. Dann beschäftigt sich Verf. mit der Unmöglichkeit von rationalen Lösungen von (1). (Über den Beweis von Errera siehe dies. Zbl. 41, 18.)

N. Hofreiter.

Duarte, F. J.: Sur l'équation $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$. Ann. Soc. Sci. Bruxelles. I. Sér. 65, 87—92 (1951).

The author attempts to give a new proof of the fact that there are no solutions of the indicated equation in non-zero rational integers (cf. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig 1927, Satz 901). In the reviewer's opinion he is unsuccessful.

Paul T. Bateman.

Pall, Gordon: Sums of two squares in a quadratic field. Duke math. J. 18, 399—409 (1951).

Let $r(n)$ denote the number of representations of a natural number n as a sum of two squares of rational integers. Let q denote the quadratic form $h x^2 + 2k x y + l y^2$, where h, k , and l are rational integers with greatest common divisor d . The author remarks that if q is expressible as a sum of the squares of two linear forms with rational integral coefficients, then q is positive definite or positive semi-definite, $h l - k^2$ is a square, and $r(\cdot) > 0$. He proves that if these three conditions are satisfied, then the number of representations of q as a sum of the squares of two linear forms with rational integral coefficients is $r(\cdot)$ or $2r(\cdot)$, according as q is semi-definite or definite. He uses this result to derive formulas for the number of representations of an integer in one of the quadratic fields $R(\sqrt{-1})$, $R(\sqrt{2})$, $R(\sqrt{5})$ as a sum of two squares of integers in the same field.

Paul T. Bateman.

Rai, T.: The number of representations of numbers as sums of powers. Math. Student 19, 33—36 (1951).

Bezeichnet $\varrho_{s_1, s_2, k}(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von s_1 positiven und s_2 negativen k -ten Potenzen (unter Berücksichtigung der Anordnung aller Terme), so beweist

Verf. die Existenz positiver Konstanten C , so daß für unendlich viele n

$$\varrho_{3,2,6}(n) > C \frac{\log n}{\log \log n}, \quad \varrho_{6,5,7}(n) > C \frac{\log n}{\log \log n}, \quad \varrho_{4,4,8}(n) > C \frac{\log n}{\log \log n}$$

ist; ferner wird $r'_{6,8}(n) \geq 2$ für unendlich viele n bewiesen, wobei $r'_{s,k}(n)$ die Anzahl derjenigen Darstellungen von n als Summe von s k -ten Potenzen bezeichnet, die sich nicht nur in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden (d. h. Partitionenanzahl). — Die Beweise sind elementar und beruhen auf gewissen Identitäten; z. B. wird für die Betrachtung von $\varrho_{3,2,6}(n)$ die — wohl auf Chowla zurückgehende — Identität

$$360^2 = (720 y^5 - 1/y)^6 + (360 y^5 + 2/y)^6 + (360 y^1)^6 - (720 y^5 + 1/y)^6 - (360 y^5 - 2/y)^6$$

gewählt und $y - 1 = 1/(m + \lambda)$, $\lambda = 1, 2, \dots, n$ eingesetzt. Da die Klammerausdrücke für verschiedene $y \geq 1$ paarweise (einschließlich sich selbst) verschiedene Werte liefern, ist somit 360^2 auf n verschiedene Weisen rational in der Form $r_1^6 + r_2^6 + r_3^6 - r_4^6 - r_5^6$, also, indem man

simultan bez. aller n Darstellungen den Hauptnenner, das ist $H = \prod_{\lambda=1}^n \{(m + \lambda)^5 (m + \lambda + 1)\}^6$,

bestimmt, $N = 360^2 H$ in der gewünschten Form dargestellt. Eine leichte Abschätzung ergibt die Behauptung. Die beiden weiteren Behauptungen werden analog bewiesen. $r'_{6,8}(n) \geq 2$ folgt aus

$$\begin{aligned} x^8 + 436x^8 + 11857x^8 + 20449x^8 + 20669x^8 + 23750x^8 \\ = 12^8 + 11881^8 + 20855^8 + 20231^8 + 23738^8 + x^8 \text{ für alle } x \end{aligned}$$

unmittelbar. (Die angegebene numerische Identität läßt sich aus der zum Tarry-Escott-Problemkreis gehörenden Theorie „mehrgadiger“ Gleichungen gewinnen.) *Hans-Heinrich Ostmann.*

Kuipers, L.: On the representation of integers by sums of polynomials. *Proc. Amer. math. Soc.* **2**, 750—752 (1951).

By means of the method of finite differences, the author establishes two theorems about the „easier Waring problem“. He proves that every integer can be expressed as a sum of 4^k values of $\Phi(x) = \frac{(x+k)(x+k-1)\cdots(x-k)}{(2k+1)!} + gx + c$, for integral values of x . For $k \geq 3$, the results obtained in the paper are inferior than these known for Waring problem, however the method here used is far much simpler. (Cf. Maitland-Wright, this Zbl. **10**, 103.) *Loo-Keng Hua.*

Halberstam, H.: On the representation of large numbers as sums of squares, higher powers, and primes. *Proc. London math. Soc.*, II. Ser. **53**, 363—380 (1951).

Beweis des folgenden Satzes: Bezeichnet $r_1(n)$ die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n als eine Summe von r Quadraten und s Primzahlen ($r \geq 1$, $s \geq 1$), wo $r + 2s > 4$, und ist

$$a_1(n) = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_s \\ y_1, \dots, y_r \\ x_1 + \dots + x_s + y_1 + \dots + y_r = n}} (\log x_1 \cdots \log x_s)^{-1} \frac{\Gamma(y_1 + \frac{1}{2})}{y_1!} \cdots \frac{\Gamma(y_r + \frac{1}{2})}{y_r!},$$

so gilt für beliebig großes (aber festes) c_1

$$r_1(n) = 2^{-r} a_1(n) \mathfrak{S}_1(n) + O(n^{s+r/2-1} \log^{-c_1} n)$$

sowie

$$a_1(n) = \frac{\pi^{r/2}}{\Gamma(s+r/2)} \frac{n^{s+r/2-1}}{\log^s n} + O\left(\frac{n^{s+r/2-1} \log \log n}{\log^{s+1} n}\right).$$

Hier bezeichnet $\mathfrak{S}_1(n)$ die zugehörige singuläre Reihe, die gleichmäßig in n positiv ist. Dieser Satz war bisher, von Spezialfällen abgesehen, nur unter Annahme der Richtigkeit der erweiterten Riemannschen Vermutung bewiesen worden. (Cf. K. Stanley, *Proc. London math. Soc.*, II. Ser. **29**, 122—144 (1929)). Der Beweis erfolgt mit einigen eigenen Kunstgriffen nach der Vinogradovschen Kreismethode. Parallel werden noch zwei asymptotische Lösungsformeln für die Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summe einer k -ten Potenz und zwei r Primzahlen, sowie als Summe einer k -ten Potenz, zwei r Quadrate und einer Primzahl gewonnen. Druckfehler: Auf den Seiten 370—372 und 379 ist an 13 Stellen $K = 2^{k-1}$ statt k zu lesen. *H. E. Richert.*

Roth, K. F.: A problem in additive number theory. Proc. London math. Soc., II. Ser. 53, 381—395 (1951).

Verf. beweist mit Hilfe der Kreismethode den folgenden Satz: Bezeichnet für positiv-reelles n $E(n)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen $u \leq n$, die nicht in der Form $(1) u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ mit natürlichen x_1, x_2, x_3, x_4 darstellbar sind, so gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$ $E(n) = O(n^{1-1/10+\varepsilon})$, d. h. fast alle natürlichen Zahlen sind in der Gestalt (1) darstellbar. Der Merkwürdigkeit des Problems entsprechend treten bei konsequenter Anwendung der Kreismethode eigentümliche Schwierigkeiten auf, und daher scheint auch der Nachweis der Darstellbarkeit aller hinreichend großen natürlichen Zahlen in der Form (1), selbst bei größerer Summandenzahl, der Methode nicht zugänglich zu sein. Immerhin wird mit Hilfe des obigen Satzes elementar gezeigt: Jede hinreichend große natürliche Zahl n ist in der Form $n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{49}^{50} + x_{50}^{51}$ mit natürlichen Zahlen x_s darstellbar.

H.-E. Richert.

Cheo, Luther: On the density of sets of Gaussian integers. Amer. math. Monthly 58, 618—620 (1951).

A Gaussian integer is a complex number of the form $a + a' i$ where a and a' are integers. Q is the set of those Gaussian integers $a + a' i$ with $a \geq 0$, $a' \geq 0$ and $a + a' > 0$. Let A be a subset of Q and $A(x + y i)$ the number of Gaussian integers of A with $a \leq x$ and $a' \leq y$. The density of A is then defined to be

$$\text{g. l. b. } \frac{A(x + y i)}{x y + x + y}.$$

The sum $A + B$, where A and B are subsets of Q is defined to be the set C consisting of all elements $a + a' i$, $b + b' i$ and $a + b + (a' + b') i$. Let α, β and γ be the densities of A, B and C respectively. Then the author proves the following two theorems: 1. If $\alpha + \beta \geq 1$ then $\gamma = 1$. 2. If B contains all numbers $j i$, $j = 1, 2, 3, \dots$, then $\gamma \geq \alpha_0 + \beta - \alpha_0 \beta$, where $\alpha_0 = \text{g. l. b. } \frac{A(x + 0 i)}{x}$. The last part of the paper contains an example to show that the extension of „the $\alpha + \beta$ hypothesis“ to Gaussian integers fails.

Sigmund Selberg.

Niven, Ivan: The asymptotic density of sequences. Bull. Amer. math. Soc. 57, 420—434 (1951).

The paper outlines recent work on the asymptotic or limit density of sets of positive integers, and gives some further details of some newer results by the author.

Sigmund Selberg.

Erdős, P.: Some problems and results in elementary number theory. Publ. math., Debrecen 2, 103—109 (1951).

Let $u_1 = 1 < u_2 < u_3 < \dots$ be the sequence of integers of the form $x^2 + y^2$. It is immediate, as shown by Bambah and Chowla, that $u_{i+1} - u_i < c u_i^{\frac{1}{2}}$. The conjecture $u_{i+1} - u_i = o(u_i^{\frac{1}{2}})$ is still improved. Turan observed to Erdős that $u_{i+1} - u_i > c \log u_i / \log \log u_i$ for infinitely many i . — In this paper the author improves Turan's result to: $u_{i+1} - u_i > c \log u_i / (\log \log u_i)^{\frac{1}{2}}$. More generally he proves that if $p_1 < p_2 < \dots$ is a sequence of primes such that $\sum_{p_i \leq x} \frac{1}{p} = f(x) \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow \infty$, and $v_1 < v_2 < \dots$ denote the integers which

either are not divisible by p_i or are divisible by p_i^2 , then for infinitely many i $v_{i+1} - v_i > c e^{f(\log v_i)} \log v_i / \log \log v_i$. In the last part of the paper the author gives some results concerning consecutive squarefree numbers. The relations (5), (10), (11) and (28) contain some misprints.

Sigmund Selberg.

Vlaardingen, M. v.: Über eine Formel von Eisenstein. Simon Stevin 28, 55—59 (1951) [Holländisch].

Extract of a lecture on the proof by Eisenstein [J. reine angew. Math. 27, 28 (1844)] of the theorems: Every prime of the form $4n + 1$ is the sum of two squares. Every prime of the form $3n + 1$ can be written as $a^2 - ab + b^2$. *W. Verdenius.*

Cugiani, Marco: Un problema di aritmetica. Periodico Mat., IV. Ser. 29, 212—219 (1951).

Ist $A(N; \Theta)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen $n \leq N$, welche einen Primfaktor $> n^\Theta \left(\frac{1}{2} \leq \Theta < 1 \right)$ besitzen, so zeigt Verf. $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(N; \Theta)}{N} = \log \frac{1}{\Theta}$.

Edmund Hlawka.

Niven, Ivan: Functions which represent prime numbers. Proc. Amer. math. Soc. 2, 753—755 (1951).

Verf. beweist: 1. Zu jedem $c > 8/3$ gibt es unendlich viele reelle Zahlen A , derart, daß die größte in A^{c^n} enthaltene ganze Zahl $[A^{c^n}]$ eine Primzahl ist für jedes positive ganze n ; 2. Zu jedem $A > 1$ gibt es umgekehrt unendlich viele reelle c derart, daß $[A^{c^n}]$ eine Primzahl ist für jedes positive ganze n .

Hendrik Douwe Kloosterman.

Wright, E. M.: A prime-representing function. Amer. math. Monthly 58, 616—618 (1951).

Using only Bertrand's Postulate, the author demonstrates the existence of a positive real number α such that if we define an infinite sequence by putting $g_0 = \alpha$ and $g_{n+1} = 2^{g_n}$ for $n \geq 0$, then $[g_n]$ is a prime number for $n \geq 1$.

Paul T. Bateman.

Sierpiński, W.: Sur l'existence des nombres premiers avec une suite arbitraire de chiffres initiaux. Matematiche 6, 135—137 (1951).

The author remarks that there are infinitely many prime numbers having any preassigned sequence of initial digits (in the decimal notation). This follows from the fact that for any positive number ε there is a prime number between x and $(1 + \varepsilon)x$ if x is sufficiently large (cf. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig 1909, § 20).

Paul T. Bateman.

Blij, F. van der: The function $\tau(n)$ of S. Ramanujan. Math. Student 18, 83—99 (1951).

Verf. gibt eine erweiterte und auf den neuesten Stand gebrachte Darstellung seines Berichtes über die Ramanujansche Funktion (dies. Zbl. 32, 268). Von besonderem Interesse ist die Vermutung $\tau(n) = O(n^{11/2 + \epsilon})$. Verf. gibt eine Mitteilung von R. A. Rankin wieder, nach der $\tau(n) = O(n^{23/4 + \epsilon})$ ist. Dies dürfte die bisher beste Schranke sein.

Edmund Hlawka.

Nanjundiah, T. S.: Certain summations due to Ramanujan and their generalizations. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 34, 215—228 (1951).

The author establishes four types of formulas which are generalizations of certain summation formulas due to Ramanujan. As a typical example, we select one of them

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2q+1}} [\alpha^q \operatorname{sech}(2n+1)\beta + (-\beta)^q \operatorname{sech}(2n+1)\alpha]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi(2q)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+2} \sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{2q}{2k} E_{2k} E_{2q-2k} \alpha^{q-k} \beta^k, & \text{for } q \geq 0 \\ 0 & \text{for } q < 0, \end{cases}$$

where $\alpha\beta = \pi^2/4$ and E_{2k} are Euler numbers. The proofs mainly depend on the „partial fraction“ expression of certain function e. g., $\operatorname{sech} \frac{\pi x}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}$.

Loo-Keng Hua.

Subba Rao, M. V.: Ramanujan's trigonometrical sum and relative partitions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 57—64 (1951).

Let m be a positive integer and $n \equiv n_1 + \dots + n_k \pmod{m}$. Then n is said to be relatively partitioned mod m into k parts. Put $\varrho = e^{2\pi i/m}$. The author proves the following main theorem: Let $\lambda \neq 0$ be a real number, S the set of r integers $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_r < m$. Let $0 \leq n < m$ and λ^k the weight attached to a relative partition of $n \pmod{m}$ into k parts. Let $f_\lambda(n, m)$ denote the weighted sum of all the partitions of $n \pmod{m}$ into parts chosen from the set S and none of them repeated more than ν times. Then

$$f_\lambda(n, m) = m^{-1} \sum_{k=1}^m P_\lambda(\varrho^k) \varrho^{-kn}$$

where $P_\lambda(x) = \prod_{i=1}^r (1 + \lambda x^{a_i})^\nu$. — If $P_\lambda(\varrho^k)$ depends on k only through its greatest

common divisor with m then $f_\lambda(n, m)$ has the simple expression $f_\lambda = \frac{1}{m} \sum_{\delta|m} Q_\lambda(\delta) C_{m/\delta}(n)$

where $C_m(n) = \sum_{(k,m)=1} \varrho^{kn}$ is Ramanujan's trigonometrical sum and $Q_\lambda(\delta) = P_\lambda(\varrho^{\delta})$, $(k, m) = \delta$. By specializing the set S (for instance S is the set of integers between 0 and m or S is the set of integers less than and prime to m etc.) and the weight $\lambda (= \pm 1)$ the author obtains expressions, in terms of Ramanujan's sum, for various arithmetical functions associated with relative partitions. These contain as special cases some results of the reviewers [Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 20, 62 (1945)].

K. G. Ramanathan.

Turán, P.: On Carlson's theorem in the theory of the zeta-function of Riemann. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 2, 39—72 und russische Zusammenfassg. 73 (1951).

Bezeichnet, wie üblich, $N(\sigma_0, T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(\sigma + it)$ in $\sigma_0 \leq \sigma \leq 1$, $0 < t \leq T$, so folgt nach Ingham (dies. Zbl. 17, 389) aus jeder Abschätzung (1) $N(\sigma_0, T) = O(T^{\lambda(1-\sigma_0)} \log^\kappa T)$, die mit festen positiven Werten λ, κ gleichmäßig in $\frac{1}{2} \leq \sigma_0 \leq 1$ gilt, (2) $p_{n+1} - p_n < p_n^{1-1/\lambda+\varepsilon}$ für beliebiges $\varepsilon > 0$, wo p_n die n -te Primzahl bezeichnet. Wegen $N(\frac{1}{2}, T) = \Omega(T \log T)$ ist sicher $\lambda \geq 2$. Andererseits gilt (1) nach Ingham (dies. Zbl. 25, 27), falls $\zeta(\frac{1}{2} + it) = O(t^\alpha)$, mit $\lambda = \min(2 + 4\alpha, 3/(2 - \sigma_0))$, $\kappa = 5$, so daß unter Annahme der Lindelöfschen Vermutung (3) $p_{n+1} - p_n < p_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ ist. (Das beste nicht unbewiesene Resultat erhält man aus der Abschätzung von Min, dies. Zbl. 33, 269: $\alpha = \frac{15}{92} + \varepsilon$). Verf. verschärft (1) nun in der Nähe von $\sigma = 1$: Es gibt zwei hinreichend große Konstanten C_1, C_2 und ein hinreichend kleines B , so daß für $1 - B \leq \sigma_0 \leq 1$ und $T > C_1$ (4) $N(\sigma_0, T) < C_2 T^{2(1-\sigma_0) + 600(1-\sigma_0)^{1.01}} \log^6 T$ gilt. Er kündigt an, daß er in einer späteren Arbeit die nach einem Vergleich von (1) und (4) naheliegende Frage, ob aus (4) bereits (3) folgt oder nicht, untersuchen will. Wegen der Einzelheiten des komplizierten Beweises muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Ohne Beweis wird weiter der folgende Satz, ein Analogon zum obengenannten Satz von Ingham, mitgeteilt: Gibt es ein θ mit $\frac{1}{2} \leq \theta < 1$, so daß für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ für $\sigma \geq \theta$, $t \geq D_1(\varepsilon)$ die Abschätzung $|\zeta(\sigma + it)| \leq t^\varepsilon$ gilt, so ist für passendes $D_2(\varepsilon)$ in $T \geq 2$, $\sigma_0 \geq \theta + \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $N(\sigma_0, T) < D_2 T^{2(1+3\varepsilon^{1/6})(1-\sigma_0)} \log^6 T$.

H.-E. Richert.

Ankeny, N. C. and C. A. Rogers: A condition for a real lattice to define a zeta function. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 159—163 (1951).

Let $x_i = \sum_{j=1}^n a_j^i \omega_j$, ($i = 1, \dots, n$) be n linear forms in $\omega_1, \dots, \omega_n$ with real coefficients a_j^i so that $\Delta = |a_j^i| \neq 0$. Let δ denote the absolute value of Δ and Γ the lattice generated by the set of x_1, \dots, x_n with rational integral $\omega_1, \dots, \omega_n$. The authors prove the following theorem: Let $x_1 x_2 \dots x_n = P(x) = 0$ have the

only solution $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 0$ in Γ and let $P(x)$ assume only a finite number of distinct values α in $-\delta \leq \alpha \leq \delta$. Then $P(x) = \omega \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_j^i \omega_j \right)$ where a_1^1, \dots, a_n^1 are algebraic integers and $a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1$ their algebraic conjugates. The proof depends on the wellknown theorem of Minkowski on linear forms. The last line on page 160 should be a sum instead of product and the hypothesis $\Delta > 0$ is unnecessary.

K. G. Ramanathan.

Vinogradov, I. M.: Eine arithmetische Methode in Anwendung auf Fragen der Verteilung der Zahlen mit einer gegebenen Eigenschaft des Index. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 15, 297—308 (1951) [Russisch].

Let q be an odd prime and $1 < n | (q-1)$. Ind x denotes the index of x with respect to a fixed base, mod q . The aim of the paper, as an application of the author's method for estimation of double sums, is to study the distribution of ind x , mod n . Let $0 \leq M < M+Q < q$, $\sqrt{q} \leq Q \leq \frac{1}{2}q$. Theorem 1: Let T_r be the number of integers $x = M+1, \dots, M+Q$ such that $\text{ind } x \equiv r \pmod{n}$. Then $\left| T_r - \frac{1}{n}Q \right| < \sqrt{q} ((2 \log h / \log 27) + 2.5)$, where $h = Q/\sqrt{q}$. Theorem 2: Let D be the number of integers $x = M+1, \dots, M+Q$ such that the index of x is congruent to one of the integers $N+1, \dots, N+Z$, mod n . Then $\left| D - \frac{1}{n}QZ \right| < \sqrt{q} \left(\frac{2 \log h}{\log 27} + 2.5 \right) \cdot \left(\frac{2 \log t}{\log 27} + 2.5 \right)$, where $h = \frac{Q}{\sqrt{q}}$ and $t = \frac{Z}{\sqrt{n}}$. Theorem 3: Let $N \geq 55$. Let V_r be the number of primes $p \leq N$ such that $\text{ind}(p+k) \equiv r \pmod{n}$. Then $V_r = \frac{1}{n} \pi(N) + O(N^{1+\epsilon}G)$, where $G = \sqrt{q^{-1} + q} N^{-1} + N^{-1/6}$.

Loo-Keng Hua.

Hammersley, J. M.: The sums of products of the natural numbers. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 435—452 (1951).

Let $\Pi_{r,s}$ be the sum of the products of the first r natural numbers, taken s at a time. The author shows that, given r , the value of s which maximizes $\Pi_{r,s}$ is given by $r - \left[\varrho + \frac{1}{2} + \frac{\zeta(2) - \zeta(3)}{\varrho} + \frac{h}{\varrho r} \right]$, where $-1.1 < h < 1.5$, $\zeta(v)$ is Riemann's ζ -function, $\varrho = \log(r+1) + \gamma - 3/2$, γ is Euler's constant and $[y]$ is the greatest integer not exceeding y . Remarks are made about the problem of determining a formula for $\Pi_{r,s}$ and about the conjecture that the value of s which maximizes $\Pi_{r,s}$ for given r is unique.

Stefan Vajda.

Erdős, Paul and Harold N. Shapiro: On the changes of sign of a certain error function. Canadian J. Math. 3, 375—385 (1951).

Für die Eulersche Funktion $\varphi(n)$ seien $R(x)$ und $H(x)$ die durch

$$R(x) = \sum_{n \leq x} \varphi(n) - \frac{3}{\pi^2} x^2, \quad H(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n} - \frac{6}{\pi^2} x$$

definierten Restglieder. Die Verff. beweisen, daß für ein gewisses $c > 0$ unendlich viele ganze Zahlen x existieren, derart daß $H(x) > c \log \log \log \log x$ und ebenfalls unendlich viele ganze x mit der Eigenschaft $H(x) < -c \log \log \log \log x$. Wegen $R(x) = x H(x) + O(x)$ folgt hieraus, daß für ein gewisses $c > 0$ unendlich viele ganze Zahlen x mit $R(x) > c x \log \log \log \log x$ existieren und ebenfalls unendlich viele mit $R(x) < -c x \log \log \log \log x$. Speziell folgt, daß die Funktion $R(x)$ für unendlich viele ganze x ihr Vorzeichen wechselt. Hendrik Douwe Kloosterman.

Tsukikura, Tamotsu: On the function $t - [t] - 1/2$. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 208—211 (1951).

Verf. verallgemeinert ein Ergebnis von Chinč'in [Fundamenta Math. 6, 9—30 (1924)] [$a = 2$]. Sein Satz ist in den allgemeinen Rahmen der Untersuchungen

von Cassels, Erdős, Koksma u. a. einzuordnen. Er zeigt nämlich zum Teil mit Hilfe des Satzes vom iterierten Logarithmus: Sei $a \geq 2$, $f(t) = t - [t] - 1/2$. Dann ist f. ü. $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^N f(a^l t) / (N \log \log N)^{1/2} = \left(\frac{a+1}{6(a-1)} \right)^{1/2}$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{l=0}^N f(a^l t) \right| \leq \frac{1}{a-1} \cdot (|f(t)| + 1/2)$. Ein schwächeres Resultat hatte schon Koksma [Nieuw Arch. Wiskunde 21, 242–267 (1943)]. Verf. beweist noch: Sei $X(N) = o(1)$. Für alle t bis auf eine Menge 1. Kategorie ist $\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{l=0}^N f(a^l t) / N X(N) \right| = +\infty$.

Leo Schmetterer.

Gupta, Hansraj: Analogues of some $\mu(n)$ theorems. Math. Student 19, 19–24 (1951).

Es wird mit einfachsten Hilfsmitteln gezeigt, daß einige bekannte Sätze über die Möbiussche Funktion $\mu(n)$, u. U. nach geeigneter Modifizierung, richtig bleiben, wenn man $\mu(n)$ durch die Liouvillesche Funktion $\lambda(n)$ ersetzt. Beispiele: 1. Ist $g_h(n) = \sum_{d|n} \lambda(d) \log^h d$ und k die Anzahl der ungeraden α in der kanonischen Darstellung $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, so gilt für $k > h$ $g_h(n) = 0$. Für $\mu(n)$ ist diese Aussage unter der Bedingung $r > h$ bekannt. 2. $\left| \sum_{d \leq x} \frac{\lambda(d)}{d} \right| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. H. E. Richert.

Romanov, N. P.: Hilbertscher Raum und Zahlentheorie. II. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 15, 131–152 (1951) [Russisch].

In Teil I dieser Arbeit [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 10, 3–34 (1946)] wurde gezeigt: Wenn f_1, f_2, \dots einer Folge von Elementen eines Hilbertschen Raumes ist, für die (1) $(f_n, f_m) = g((n, m))$ [wo (m, n) der g. g. T. von m, n , g eine zahlentheoretische Funktion], so ist $\gamma_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$ ein Orthogonalsystem. In Teil II werden zahlreiche Beispiele von f_n mit (1) konstruiert und zwar mittels der folgenden zwei Sätze: 1. Wenn F quadratisch integrierbar über $(0, 1)$ und $F(mx) = m^{s-1} \sum_{k=0}^{m-1} F\left(x + \frac{k}{m}\right)$, dann ist (1) erfüllt für $f_n = (1/\sqrt{C}) n^s F(nx - [nx])$, wobei noch $C = \int_0^1 F^2(\xi) d\xi$, $g(t) = t^{2s}$. 2. Sei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ ein normiertes Orthogonalsystem von Elementen eines Hilbertschen Funktionenraumes, $\omega(n)$ eine multiplikative Funktion, $\sigma = \sum_1^\infty |\omega(k)|^2 < \infty$. Dann ist (1) erfüllt mit

$$(2) \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^\infty \omega(k) \alpha_{kn}(x)$$

(k, n nicht Doppelindex!), $g(t) = |\omega(t)|^{-2}$. Das System der f_n ist vollständig auf dem von den α_i aufgespannten linearen Unterraum. — Bei 1. wird speziell gesetzt $F = -\log |2 \sin \pi x|$, $B_k(x)$ (k -tes Bernoullisches Polynom). Bei 2. wird u. a. gesetzt: $\alpha_n = \sqrt{2} \cos 2\pi n x$, $\omega(n) = 1/n$, $0 \leq x \leq 1$. $\alpha_n = \sqrt{2} \cos 2\pi n x$, $\omega(n) = \chi(n)/n^{2s}$, $0 \leq x \leq 1$ [wo χ Charakter mod. N ; k in (2) und n, m in (1) durchlaufen dabei nur die zu N primen Zahlen; die f_n können hier durch Gaußsche Summen und Bernoullische Polynome ausgedrückt werden],

$$\alpha_n = \{2\pi n^{2s} \Gamma(2s)\}^{-1/2} (\log 1/|z|)^{s-1/2} \frac{z^n}{|z|}, \quad |z| \leq 1,$$

[Hier folgt: $Q_n^{(k)} = \prod_{d|n} (1 - z^d)^{\mu(n/d) d^k}$ ist ein Orthogonalsystem in $|z| \leq 1$, wenn das Skalarprodukt so definiert wird $(f, g) = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f \cdot \bar{g} \cdot |z|^{-2} (-\log |z|)^{k-3} dx dy$. $\alpha_n = n$ -te Laguerresche Funktion, $0 \leq x < \infty$, $\alpha_{2n+1} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$ (Legendresche Polynome). Weiters

wird ein zu $f_n = \sqrt{12} n (nx - [nx] - \frac{1}{2})$ biorthogonales Funktionensystem betrachtet. Damit hängt z. B. die Entwicklung

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n} (nx - [nx] - \frac{1}{2}) \rightarrow -\frac{\sin 2\pi x}{\pi},$$

zusammen [wo \rightarrow Konvergenz in der $L^2(0, 1)$ -Metrik bedeutet] (Bem. d. Ref.: Vgl. hierzu H. Davenport, dies Zbl. 17, 391, wo die schwierige Frage der gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihe gelöst wird). Zum Schluß wird noch gezeigt: Für die Existenz einer Funktion

$\Phi \in L^2$ mit $\int_0^1 \Phi(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} \Phi(1) = a_n$ bei vorgegebenen a_n ist notwendig

und hinreichend, daß die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left| \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^2 a_d \right|^2$ konvergiert.

Karl Prachar.

Barnes, E. S.: The minimum of the product of two values of a quadratic form.

II, III. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 385—414, 415—434 (1951).

II. Es sei $Q(x, y)$ eine indefinite binäre quadratische Form mit reellen Koeffizienten und der Diskriminante D . Ferner seien x, y, u, v ganze Zahlen, die die Bedingung (1) $|xv - uy| = 1$ befriedigen. Die Null werde durch $Q(x, y)$ nur trivial dargestellt. Während in der Arbeit (I.) (dies. Zbl. 43, 276) symmetrische Ungleichungen für die untere Grenze M von $|Q(x, y) Q(u, v)|$ erzielt wurden, z. B. $M \leq D/5$, werden nun asymmetrische Ungleichungen für $Q(x, y) Q(u, v)$ abgeleitet. So gibt es ganze Zahlen x, y, u, v , die (1) und $-D/8 \leq Q(x, y) Q(u, v) \leq D/5$ befriedigen. Ferner gibt es ganze Zahlen x, y, u, v , die (1) und $-D/2(\sqrt{10} + 1) \leq Q(x, y) Q(u, v) \leq 6D/(13\sqrt{10} + 3)$ befriedigen, sofern $Q(x, y)$ nicht äquivalent mit einem Vielfachen der (in der Arbeit angegebenen) Formen $f_n(x, y)$ ($n = -1, 0, 1, \dots$) oder $\psi_n(x, y)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ist. Weiter werden Aussagen gemacht, falls $Q(x, y)$ nicht äquivalent einem Vielfachen von $f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_{2k}$ oder $\psi_0, \psi_2, \psi_4, \dots, \psi_{2l}$ ist. Der Beweis ist von dem in (I.) ganz verschieden. Es sei $\dots, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \dots$ die Kette der zu $Q(x, y)$ äquivalenten reduzierten Formen, wo $\varphi_v(x, y) = (-1)^{v-1} a_v x^2 + b_v x y + (-1)^v a_{v+1} y^2$. Es sei $k_v = (b_v + b_{v+1})/2a_{v+1}$, $r_v = (\sqrt{D} + b_v)/2a_{v+1}$, $s_v = (\sqrt{D} - b_v)/2a_{v+1}$. Die Folge $(K) \dots k_{-1}, k_0, k_1, \dots$ ist durch $Q(x, y)$ eindeutig bestimmt und umgekehrt sind dadurch die reduzierten Formen (bis auf einen konstanten Faktor) bestimmt. Grundlegend für den Beweis ist ein Lemma, das a) hinreichende Bedingungen für die Äquivalenz von $Q(x, y)$ mit einer Form $\Phi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ mit $\kappa < \sqrt{D}/|b| < \tau$ ($0 < \kappa < 1, \tau \geq 1$) und b) notwendige Bedingungen für $\kappa \geq 1/\sqrt{2}$ ergibt. Die Bedingungen sind vier Ungleichungen, die neben κ, τ nur noch die Größen k_v, r_v und s_v enthalten. Bei Äquivalenz ist wenigstens eine Ungleichung für gewisse v falsch. Hierauf werden die Folgen (K) untersucht, und es kommt darauf an, ob sie aus einer der Formen f_n oder ψ_n hervorgehen. Dementsprechend sind die 4 Ungleichungen des Lemmas erfüllt bzw. nicht alle erfüllt. — III. In dieser Arbeit werden die positiven und negativen Werte des Produktes $Q(x, y) Q(u, v)$ untersucht. So ergeben sich die Ungleichungen $-D/5 \leq Q(x, y) Q(u, v) < 0, 0 < Q(x, y) Q(u, v) \leq D/4$. Sie sind Spezialfälle von 2 allgemeinen Sätzen, von denen der eine Aussagen über die negativen Zahlen, der andere über die positiven Zahlen des Produktes macht. Es sei $h_1 = x^2 + xy - y^2, f_n(x, y) = p_{n+1}x^2 - p_{n+3}y^2$ ($n = 1, 3, 5, \dots$), wo p_n die n -te Fibonaccische Zahl ist. Ist $Q(x, y)$ nicht äquivalent mit einem Vielfachen von $h_1, f_1, f_3, f_5, \dots$, so gibt es ganze Zahlen x, y, u, v , die (1) und $-D/2(\sqrt{5} + 1) \leq Q(x, y) Q(u, v) < 0$ befriedigen. Ist hingegen $Q(x, y)$ einem Vielfachen von h_1 bzw. f_1, f_3, f_5, \dots äquivalent, dann ergeben sich als untere Grenzen der negativen Werte $-D/5$ bzw. $-p_{n+1}D/4p_{n+3}$ ($n = 1, 3, 5, \dots$). Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele nicht-äquivalente Formen $Q(x, y)$, so daß für jeden negativen Wert des Produktes $Q(x, y) Q(u, v)$ $Q(x, y) Q(u, v) < -D/2(\sqrt{5} + 1) - \varepsilon$ gilt. Der zweite Satz macht ähnliche Aussagen über die positiven Werte. Die Beweismethode ist für beide Sätze die gleiche wie in der Arbeit (II). Wieder wird mit den Folgen $(K) \dots k_{-1}, k_0, k_1, \dots$ gearbeitet. Für jeden Satz wird ein grundlegendes Lemma abgeleitet, das Bedingungen für die Äquivalenz der Form $Q(x, y)$ mit einer Form $\Phi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ angibt, wenn $1 < \sqrt{D}/|b| < \tau$ bzw. $\kappa < \sqrt{D}/|b| < 1$ gilt. Die Beweise sind ziemlich lang, besonders für den zweiten Satz, da hier die Folge (K) nicht bloß aus den Ziffern 1 und 2 besteht.

N. Hofreiter.

Barnes, E. S.: The minimum of a factorizable bilinear form. Acta Math. 86, 323—336 (1951).

Es sei $M(B)$ die untere Grenze der Bilinearformen

$$|B(x, y, z, t)| = |(\alpha x + \beta y)(\gamma z + \delta t)|$$

mit reellen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ für alle ganzen Zahlen x, y, z, t mit $|xt - yz| = 1$. Die Null werde durch B nicht dargestellt. Davenport und Heilbronn haben gezeigt (dies. Zbl. 29, 111): Für $M(B), |\Delta|$ existieren zunächst drei isolierte Minima und zwar $(3 - \sqrt{5})/2\sqrt{5}$, $(2 - \sqrt{2})/4$ und $(\sqrt{2} - 1)/3$. Dann aber hört die Folge der Minima auf, denn es existiert eine unendliche Menge von nichtäquivalenten Bilinearformen, für die (1) $M(B) > ((\sqrt{2} - 1)/3 - \varepsilon)|\Delta|$ ist (ε beliebig, > 0). Während Davenport und Heilbronn beim Beweis Relationen erhalten, die zwischen den von B und ihrer assoziierten Form $Q(x, y) = (\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y)$ dargestellten Werten

bestehen, führt Verf. den Beweis mit einer Methode, die er in seiner vorstehend besprochenen Arbeit (II) benutzt hat. Er betrachtet wieder die Kette der zu $Q(x, y)$ äquivalenten reduzierten Formen $\dots \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \dots$ mit $\varphi_v = (-1)^{v-1} a_v x^2 + b_v x y + (-1)^v a_{v+1} y^2$. Es sei $k_v = (b_v + b_{v+1})/2a_{v+1}$, $r_v = (\sqrt{D} + b_v)/2a_{v+1}$, $s_v = (\sqrt{D} - b_v)/2a_{v+1}$. Dabei ist $D = \Delta^2$ die Diskriminante von $Q(x, y)$. Die Folge $(K) \dots k_{-1}, k_0, k_1, \dots$ bestimmt die Klasse der Bilinearformen, die zu B äquivalent sind. Grundlegend für den Beweis ist ein Lemma, das aus $|B(x, y, z, t)| \geq |\Delta|/\lambda$ Ungleichungen

über k_v, r_v, s_v erschließt. Dann wird gezeigt, daß $|B| < \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\lambda} |\Delta|$ für alle B mit Ausnahme

jener gilt, denen die Folgen $(K_1) = \{1_{\infty}\}$, $(K_2) = \{2_{\infty}\}$, $(K_3) = \{2_{\infty}, 1, 1, 2_{\infty}\}$ entsprechen. Diese führen zu den ersten drei Minima. Durch Approximation geeigneter Folgen, die auch nur aus den Ziffern 1, 2 bestehen, an die Folge (K_3) , ergibt sich (1). N. Hofreiter.

Coxeter, H. S. M.: Extreme forms. Canadian J. Math. 3, 391—441 (1951).

Aufbauend auf der genauen Kenntnis zahlreicher weit verstreuter Arbeiten über Bewegungsgruppen, reguläre Polytope, Liesche Gruppen, automorphe Funktionen, dichteste Lagerung von kongruenten Körpern, Minima von quadratischen Formen, Punktgitter etc. gelang es dem Verf., die Theorie der Extremformen neu zu gestalten. Manche bekannte Sätze werden auf neue Art bewiesen, neue Sätze gefunden und viele Formen neu berechnet. — Ist M der Minimalwert einer positiven quadratischen Form, Δ ihre Determinante, so heißt eine Form extrem, wenn Δ ein relatives Minimum bei festem M ist. Eine Form heißt perfekt, wenn sie durch den Minimalwert und die Minimaldarstellungen eindeutig bestimmt ist. Sie heißt eutaktisch, wenn ihre reziproke Form Summe von positiven Vielfachen der Quadrate ihrer minimalen Linearformen ist. [Unter einer minimalen Linearform versteht man die zu einer Minimaldarstellung

(m_1, \dots, m_n) gehörige lineare Form $\sum_{i=1}^n m_i x_i$]. Eine Form ist dann und nur dann extrem, wenn

sie perfekt und eutaktisch ist. Hingegen weiß man nicht, ob eine perfekte Form extrem ist. Unter Benutzung der Darstellung einer Form durch ein Gitter, ferner der Minimalvektoren, vor allem aber der Spiegelungsgruppen ergeben sich zahlreiche Sätze über extreme, perfekte und eutaktische Formen, z. B.: Eine Form ist dann und nur dann eutaktisch, wenn ihre Minimalvektoren zu den Vektoren eines eutaktischen Sternes parallel sind. Jede perfekte Form ist unzerlegbar. Jede unzerlegbare, reflexive Form ist eutaktisch. Jede eigentlich unzerlegbare Form ist extrem. — Von der Darstellung der Formen durch Graphen wird oft Gebrauch gemacht. Weit ausgewertet werden die Zusammenhänge der Formen mit Gruppen, die durch Spiegelungen entstehen, und insb. mit deren Fundamentalbereichen. Damit werden zahlreiche Formen mit n Variablen ermittelt. Zuletzt wird auf einer Tafel eine große Anzahl von Formen mit $n \leq 11$ Variablen zusammengestellt, die insb. alle nicht-äquivalenten Extremformen für $n \leq 6$ enthalten.

N. Hofreiter.

Bambah, R. P.: Non-homogeneous binary quadratic forms. I. Two theorems of Varnavides. II. The second minimum of $(x + x_0)^2 - 7(y + y_0)^2$. Acta math. 86, 1—29, 31—56 (1951).

Bekanntlich gibt es nach Minkowski für jede indefinite, binäre quadratische Form $a x^2 + b x y + c y^2$ der Determinante $d = b^2 - 4ac > 0$ zu jedem Zahlenpaar x_0, y_0 ein mod 1 kongruentes Zahlenpaar x, y ($x \equiv x_0, y \equiv y_0 \pmod{1}$), so daß $|f(x, y)| \leq \frac{1}{4} \sqrt{d}$ ist. Das Gleichheitszeichen wird dabei nur für die zu bxy äquivalenten Formen benötigt. Verf., Davenport, Varnavides und Barnes haben die Minkowskische Schranke verbessert. Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden die Ergebnisse von Varnavides für die speziellen Formen $x^2 - 7y^2$ und $x^2 - 11y^2$ auf rein geometrischem Wege gewonnen. — Davenport hat an den speziellen Formen $x^2 + xy - y^2$ und $5x^2 - 11xy - 5y^2$ gezeigt, daß es ähnlich wie bei der Approximation von Irrationalzahlen, bei dem obigen Problem mehrere sukzessive Minima des Absolutbetrages geben kann. Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit wird mit derselben geometrischen Methode unter Benutzung eines Hilfssatzes von Cassels auch für die Form $x^2 - 7y^2$ die Existenz eines zweiten Minimums $= \frac{1}{2}$ nachgewiesen. Es gilt somit für diese Form: Es gibt zu jedem Zahlenpaar x_0, y_0 ein mod 1 kongruentes Zahlenpaar x, y , so daß $|x^2 - 7y^2| \leq \frac{9}{14}$ ist. Dabei wird das Gleichheitszeichen nur für Zahlenpaare $(x_0, y_0) \equiv (\frac{1}{2}, \pm \frac{5}{14}) \pmod{1}$ benötigt. Für alle anderen Zahlenpaare gilt sogar $|x^2 - 7y^2| \leq \frac{1}{2}$. Hier ist das Gleichheitszeichen nur für die Zahlenpaare $(x_0, y_0) \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \pmod{1}$ notwendig.

Josef Heinhold.

Davenport, Harold: Sur un système de sphères qui recouvrent l'espace à n dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 571—573 (1951).

© sei ein Gitter im n -dimensionalen Raum. Jeder Gitterpunkt sei Mittelpunkt einer Kugel vom Radius r , so daß die Kugeln den Raum vollständig überdecken. $\vartheta = \vartheta(\mathcal{G}) = J_n r^n / d(\mathcal{G})$ ist die Dichte der Überdeckung. Dabei ist J_n die Oberfläche der Einheitskugel im R_n , $d(\mathcal{G})$ die Determinante des Gitters. — Verf. konstruiert ein Gitter für das $\vartheta(\mathcal{G}) < (\sqrt{\frac{1}{6}\pi e} + \varepsilon_n)^n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ist. Man kann, wie Verf. erwähnt, durch eine komplizierte Konstruktion ein Gitter erhalten, das eine noch kleinere Schranke als $(\sqrt{\frac{1}{6}\pi e})^n = (1,193 \dots)^n$ zuläßt, nämlich $\vartheta < (1,15)^n$ für genügend große n . Andererseits gilt für jede beliebige Überdeckung des Raumes $\vartheta > 4/3 - \varepsilon_n$.
Josef Heinhold.

Whitworth, J. V.: The critical lattices of the double cone. Proc. London math. Soc., II. Ser. 53, 422—443 (1951).

Let K be the double cone $\sqrt{x^2 + y^2} + |z| \leq 1$ in three-dimensional space. The author gives an extract of his Manchester Ph. D. thesis in which he proved that $\Delta(K) = \frac{1}{8} \sqrt{6}$. All the critical lattices of K are obtained by a rotation about the z -axis from the particular lattice,

$$x = -\frac{1}{8}u - \frac{1}{8}v + \frac{3}{4}w, \quad y = \frac{\sqrt{6}}{4}u - \frac{\sqrt{6}}{4}v, \quad z = \frac{3}{8}u + \frac{3}{8}v - \frac{1}{4}w,$$

where $u, v, w = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. This lattice has exactly 14 points on the boundary of K , viz.,

$$\begin{aligned} &\pm \left(-\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3}{8} \right), \quad \pm \left(-\frac{1}{8}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3}{8} \right), \quad \pm \left(\frac{3}{4}, 0, -\frac{1}{4} \right), \\ &\pm \left(\frac{5}{8}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{8} \right), \quad \pm \left(\frac{5}{8}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{8} \right), \quad \pm \left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{3}{4} \right), \\ &\pm \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

The proof is based on Minkowski's method (Ges. Abh., Bd. II, 1—42).

Kurt Mahler.

Koksma, J. F.: Sur l'approximation des nombres irrationnels sous une condition supplémentaire. Simon Stevin 28, 199—202 (1951).

Verschärfung des folgenden Resultats des Ref. (dies. Zbl. 38, 188): Ist $\theta > 0$ eine irrationale Zahl und sind $s \geq 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ gegebene ganze Zahlen, so existieren unendlich viele Paare natürlicher Zahlen p, q , welche den Bedingungen

$$(1) \quad \left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{2s^2}{q^2}, \quad (2) \quad p \equiv a \pmod{s}, \quad (3) \quad q \equiv b \pmod{s} \text{ genügen. Verf. zeigt}$$

einfacherweise unter Benutzung eines Khintchineschen Satzes über lineare inhomogene diophantische Approximationen, daß es für jedes irrationale θ , jedes Tripel ganzer Zahlen $s \geq 1, a, b$ und jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Paare ganzer

$$\text{Zahlen } p, q (q > 0) \text{ gibt, welche den Bedingungen } (1') \quad \left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{s^2(1+\varepsilon)}{\sqrt{5}q^2},$$

(2) und (3) genügen. Die Zahl $\sqrt{5}$ darf durch keine größere ersetzt werden. Unter Benutzung des klassischen Satzes von Minkowski über diophantische Approximationen wird dann bewiesen: ist θ eine irrationale Zahl und sind $s \geq 1$, a, b solche ganze Zahlen, daß nicht gleichzeitig $a \equiv 0 \pmod{s}$ und $b \equiv 0 \pmod{s}$ gilt, so sind für unendlich viele Paare ganzer Zahlen $p, q (q \neq 0)$ die Bedingungen

$$(1'') \quad \left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{s^2}{4|q(q-b)|}, \quad (2) \text{ und } (3) \text{ erfüllt.}$$

S. Hartman.

Schneider, Theodor: Zur Charakterisierung der algebraischen und der rationalen Funktionen durch ihre Funktionswerte. Acta math. 86, 57—70 (1951).

Verf. gibt notwendige und hinreichende Kriterien dafür, daß eine analytische Funktion $g(z)$ eine algebraische bzw. rationale Funktion ist, die einer Definitionsgleichung mit algebraischen Zahlkoeffizienten genügt. Ein solches Kriterium für die Algebraizität lautet so: Es sei $g(z)$ in $z = 0$ regulär und auf einem Blatt der Riemannschen Fläche nehme $g(z)$ für alle Stellen n^{-1} (n natürliche Zahl) in einer festen Umgebung um $z = 0$ als Werte algebraische Zahlen von höchstens s -tem Grade an (s fest). Es sei weiter $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\log \log H(g(n^{-1}))/\log n\} < 1$ [$H(g(n^{-1}))$ Höhe der algebraischen Zahl $g(n^{-1})$]. Dann ist $g(z)$ eine algebraische Funktion und jede algebraische Funktion erfüllt diese Eigenschaften. Verlangt man darüber hinaus, daß die $g(n^{-1})$ einem festen algebraischen Zahlkörper angehören, dann erhält man ein Kriterium für die rationalen Funktionen $g(z)$. Der Beweis verwendet die Methoden, welche von C. L. Siegel und dem Verf. in der Theorie der diophantischen Approximationen entwickelt wurden.

Edmund Hlawka.

Ricci, Giovanni: Numeri algebrici e numeri trascendenti. Repertorio Mat. 147—155 (1951).

A short and very clear account of some of the properties of algebraic and transcendental numbers. ($e + \pi$ is mentioned as an example of a transcendental number, but so far no proof of transcendency of this number has appeared.)

Kurt Mahler.

Analysis.

Mengenlehre:

Hellmich, Kurt: Stetige und halbstetige Punkt-Mengen-Funktionen. Monatsh. Math. 55, 265—296 (1951).

Eine Punkt-Mengen-Funktion, die jedem Elemente a eines Raumes E eine Teilmenge $F(a)$ eines Raumes R zuordnet, heißt oberhalb [unterhalb] stetig im engeren Sinne, wenn (1) $a\text{-}\lim F(a_n) \subset F(a)_a$ [$F(a)_o \subset o\text{-}\lim F(a_n)$] für jede Punktfolge $a_n \in E$, $a = \lim a_n$, (2) $F(a) = F(a)_{a_o}$ oder $F(a) = F(a)_{o_a}$. Die Funktion $F(a)$ heißt oberhalb [unterhalb] stetig im weiteren Sinne, wenn $(a\text{-}\lim F(a_n))_o \subset F(a)$ [$F(a) \subset (o\text{-}\lim F(a_n))_a$] für jede Punktfolge $a_n \in E$, $a = \lim a_n$. Die Funktion $F(a)$ ist stetig (in jedem Sinne), wenn sie oberhalb und unterhalb stetig ist. $a\text{-}\lim F_n$ [$o\text{-}\lim F_n$] bezeichnet hier den oberen abgeschlossenen [unteren offenen] Limes der Mengenfolge $F_n \subset R$ (s. F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin-Leipzig 1927, S. 146—147), F_a [F_o] ist die abgeschlossene Hülle [der offene Kern] einer Menge F . — Diese symmetrische Definition der Halbstetigkeit hat die Eigenschaft, daß man eine Reihe von Sätzen aus der Theorie der reellen Funktionen verallgemeinern kann. Z. B.: (I) Das Komplement einer oberhalb stetigen Funktion ist unterhalb stetig in demselben Sinne, und umgekehrt. (II) Die Summe und das Produkt zweier oberhalb [unterhalb] stetiger Funktionen ist oberhalb [unterhalb] stetig in demselben Sinne. Wenn R metrisch, kompakt und in sich dicht ist, wenn E metrisch separabel ist, und wenn jede beschränkte Teilmenge $A \subset E$ kompakt ist, dann gelten die folgenden Sätze: (III) Eine i. e. S. unterhalb [oberhalb] stetige Funktion $F(a)$ mit offenen [abgeschlossenen] Werten ist der offene [abgeschlossene] Limes einer zunehmenden [abnehmenden] Folge von i. w. S. stetigen Funktionen mit offenen [abgeschlossenen] Werten. (IV) Ist $G(a)$ eine i. e. S. oberhalb stetige Funktion mit abgeschlossenen Werten, $H(a)$ eine i. e. S. unterhalb stetige Funktion mit offenen Werten, $G(a) \subset H(a)$, so gibt es eine i. w. S. stetige Funktion $F(a)$ mit $G(a) \subset F(a) \subset H(a)$. (V) Eine auf einer abgeschlossenen Menge $A \subset E$ definierte i. e. S. stetige Funktion läßt sich zu einer auf dem ganzen Raum E definierten i. w. S. stetigen Funktion erweitern. — Aus diesen und anderen, hier nicht zitierten Sätzen kann man die wohlbekannten Sätze über halbstetige reelle Funktionen $f(a)$ als Sonderfall erhalten, wenn man jeder reellen Funktion $f(a)$ die Punkt-Mengen-Funktion $F(a) = \langle -\infty, f(a) \rangle$ zuordnet.

Roman Sikorski.

Kunugi, Kinjiro: Sur une généralisation de la coupure de Dedekind. J. math. Soc. Japan 3, 232—236 (1951).

Führt man in einem teilweise geordneten System R den Begriff des Schnittes in der üblichen Weise (MacNeille, dies. Zbl. 17, 339) ein, so bilden die Schnitte einen vollständigen Verband \mathfrak{R} . Verf. zeigt an Beispielen, daß aus der Dichtigkeit von R noch nicht die Dichtigkeit von \mathfrak{R} folgt. Zur Beseitigung dieser Besonderheit

schränkt er den Schnittbegriff durch folgende Definition ein. Ein Schnitt ist ein Paar A_1, A_2 von Untermengen von R , für die gilt: 1) A_1 und A_2 sind nicht leer. 2. Aus $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ und $a_1 \neq a_2$, folgt $a_1 < a_2$. 3. Aus $a_1, b_1 \in A_1$ und $a_2, b_2 \in A_2$ folgt die Existenz von $c_1 \in A_1$ und $c_2 \in A_2$, mit $a_1 \leq c_1, b_1 \leq c_1, a_2 \geq c_2, b_2 \geq c_2$. 4. Genügen A'_1, A'_2 gleichfalls den Bedingungen 1) bis 3), so folgt aus $A'_1 \supset A_1, A'_2 \supset A_2$, daß $A'_1 = A_1, A'_2 = A_2$ ist. Es wird bewiesen, daß, wenn R dicht ist und diese Definition zugrunde gelegt wird, \Re gleichfalls dicht ist. Hierzu sei bemerkt, daß dann aber — z. B. in den vom Verf. eingangs eingeführten Beispielen — \Re kein Verband zu sein braucht.

Friedrich Wilhelm Levi.

Mamuzitch, Zlatko: Note sur la loi d'association des transformations dans la théorie des ensembles. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 3, 75–76 und serbische Zusammenfassg. 77 (1951).

Si à tout $x \in A$ on fait correspondre un ensemble vide ou non vide $f(x)$ et si à tout $y \in fA = \bigcup_{x \in A} f(x)$ on fait correspondre un ensemble $g(y)$, alors en posant $(gf)(x) = \bigcup_{y \in f(x)} g(y)$ [$y \in f(x), x \in A$] et en associant à tout $z \in (gf)A$ un ensemble $h(z)$, on a le théorème d'association que voici $h(gf) = (hg)f$, c'est-à-dire $[h(gf)](x) = [(hg)f](x)$ ($x \in A$) [cf. R. Dedekind, Ges. math. Werke, III, Braunschweig 1932, p. 349; ce Zbl. 4, 337; Djuro Kurepa, Théorie des ensembles, Zagreb 1951, 22+444, pp. 18–20 (en serbo-croate)]. L'A. donne une démonstration simple de l'égalité $(h(gf))A = ((hg)f)A$.

Djuro Kurepa.

Fraissé, Roland: Sur la signification d'une hypothèse de la théorie des relations, du point de vue du calcul logique. C. r. Acad. Sci., Paris 232, 1793–1795 (1951).

Verf. bringt seine in früheren Noten (dies. Zbl. 32, 337; 40, 164) eingeführten Begriffe der Polyrelation (hier Multirelation genannt) und der Verwandtschaft („parenté“) mit dem Logik-Kalkül in Beziehung, wobei er dessen Darstellung in dem Buche „Grundzüge der theoretischen Logik“ von Hilbert-Ackermann zugrunde legt. Insbesondere lassen sich gewisse Folgerungen aus der früheren Hypothese [A] in die Sprache des Logik-Kalküls übertragen.

Walter Neumer.

Vagner, V. V.: Eine ternäre algebraische Operation in der Theorie der Koordinatenstrukturen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 981–984 (1951) [Russisch].

Eine Menge A von der Mächtigkeit des Kontinuums wird zu einem geometrischen Raum, wenn es eine Menge von offenen Teilmengen gibt, die A überdecken und eineindeutig in offene Teilmengen des Zahlenraumes abgebildet werden. Diese Begriffsbildung kann so verallgemeinert werden: A, B seien beliebige Mengen; es werden binäre Relationen, d. h. Teilmengen $\varphi_i \subset A \times B$ betrachtet; die Menge der eineindeutigen darunter sei $\mathfrak{M}(A \times B)$. Ist K Teilmenge von \mathfrak{M} und gilt $\bigcup_{\kappa \in K} \text{pr}_1 \kappa = A, \bigcup_{\kappa \in K} \text{pr}_2 \kappa = B$ (pr_i = Projektion), so heißt A koordinierte Menge, B Koordinatenmenge, jedes $\kappa \in K$ Koordinatensystem, K Koordinatenstruktur. — Es wird die ternäre Operation $(\varphi_3 \varphi_2 \varphi_1) = \varphi_3 \varphi_2^{-1} \varphi_1$ eingeführt. Sie ist mit der Ordnungsrelation (zwischen den Teilmengen von $A \times B$) verträglich und genügt an Stelle des assoziativen Gesetzes dem folgenden:

$$(\varphi_5 \varphi_4 (\varphi_3 \varphi_2 \varphi_1)) = ((\varphi_5 \varphi_4 \varphi_3) \varphi_2 \varphi_1).$$

\mathfrak{M} ist bezüglich dieser Operation abgeschlossen. Durch Spezialisierung lassen sich bekannte Koordinatenstrukturen ableiten. Eine binäre Operation erhält man z. B., indem man ein Koordinatensystem κ_0 festhält und $\kappa_2 \cdot \kappa_1 = (\kappa_2 \kappa_0 \kappa_1)$ definiert. — Ist K nicht multiplikativ abgeschlossen, so läßt sich eine dreifache Multiplikation definieren durch: $\langle \kappa_3 \kappa_2 \kappa_1 \rangle =$ alle κ , für die $(\kappa_3 \kappa_2 \kappa_1) \subset \kappa$. Einige Grundeigenschaften dieser Multiplikation werden kurz angegeben; auf geometrische Anwendungen wird ohne nähere Ausführungen hingewiesen.

Helmuth Gericke.

Cuesta, N.: Ein zum Kontinuumproblem äquivalentes Problem. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 11, 240—242 (1951) [Spanisch].

Se a e b sono due insiemi, $a <' b$ esprime che a fa parte di b e non coincide con b ; se si vuole indicare poi che a possa anche coincidere con b si adopera il simbolo $a \leq' b$. Se C è un insieme di insiemi, le due relazioni binarie $<'$ e \leq' danno luogo alle strutture $(C, <')$ e (C, \leq') . Linee della struttura sono i sottoinsiemi che sono messi in relazione fra di loro da $<'$ e \leq' . Sia $(M, <')$ una linea di $(C, <')$ e siano I, F , rispettivamente, la parte iniziale e finale di una decomposizione di $(M, <')$ e perciò $(M, <') \equiv (I, <') \cup (F, <')$. Indicati con i, f , gli insiemi generici rispettivamente di I, F , si otterrà $\Sigma i \leq' \Pi f$. Sia S un insieme di numero cardinale \aleph_1 e sia T il sistema formato dai sottoinsiemi di S , ognuno di numero cardinale \aleph_1 uno. La struttura parzialmente ordinata $(T, <')$ viene automaticamente determinata. L'A. pone il problema: Esiste in $(T, <')$ qualche linea densa per cui per qualche (I, F) si verifichi $\Sigma i <' \Pi f$? e fa vedere che il dare risposta affermativa al problema ora enunciato equivale a rispondere affermativamente al problema del continuo.

Landolino Giuliano.

Gustin, William: Partitioning an interval into finitely many congruent parts. Ann. of Math., II. Ser. 54, 250—261 (1951).

Let G be a dense subgroup of the additive group of all real numbers. A non-empty bounded subset $I \subset G$ is said to be an interval if $x, y \in I$, $x < z < y$, $z \in G$ imply $z \in I$. An interval is said to be pivotal if it is symmetric but does not contain its midpoint; otherwise it will be called nonpivotal. A partition of an interval is a proper decomposition of it into finitely many disjoint sets which are congruent by pairs. The following theorems are proved: (I) Every part A_i of a partition $I = A_1 + \dots + A_n$ of a nonpivotal interval I is a finite union of subintervals. (II) If a nonpivotal interval I can be partitioned into n parts, it can be also partitioned into n subintervals. — It follows from these theorems that, in the case $G =$ the set of all real numbers, no symmetric interval can be partitioned. Each asymmetric interval admits obviously many partitions, but each part of the partition is the union of a finite number of subintervals.

Roman Sikorski.

Sierpiński, W.: Sur une propriété des ensembles plans fermés et bornés. Matematyczne 6, 132—134 (1951).

Soit C_n l'espace cartésien à n dimensions. Quels que soient l'entier $k > 0$ et le point $O \in C_n$, soit $[O]_k$ l'ensemble des espaces $C_k \subset C_n$ dont chacun contient O . L'A. démontre ceci: Si E est un ensemble fermé borné non vide quelconque $\subset C_2$, alors, abstraction faite d'un sous-ensemble fini ou dénombrable de $[O]_1$, à chaque $d \in [O]_1$ on peut associer une droite $d' \subset C_2$ parallèle à d et telle que l'ensemble $d' \cap E$ soit uniponctuel. Alors que la proposition analogue pour $[O]_1$ et C_3 reste ouverte, le théorème ne subsiste pas pour $[O]_2$ et C_3 (cf. aussi S. Straszewicz, ce Zbl. 11, 130).

Djuro Kurepa.

Rényi, A., C. Rényi et J. Surányi: Sur l'indépendance des domaines simples dans l'espace euclidien à n dimensions. Colloquium math. 2, 130—135 (1951).

Die mengentheoretische Unabhängigkeit von Teilmengen E_1, E_2, \dots, E_k einer Grundmenge E [s. E. Marczewski, dies. Zbl. 38, 35] wird von Verff. für spezielle Figuren des n -dimensionalen Euklidischen Raumes $E^{(n)}$ eingeführt, und zwar für n -dimensionale offene Intervalle bzw. offene Kugeln und offene konvexe Polygone der Ebene $E^{(2)}$. Es wird gezeigt: 1. Die maximale Anzahl unabhängiger offener n -dimensionaler Intervalle bzw. Kugeln im $E^{(n)}$ ist gleich $2n$ bzw. $n+1$ für jedes $n \geq 1$. 2. Bedeutet $N(k)$ die maximale Anzahl unabhängiger konvexer offener Polygone der Ebene mit höchstens k Seiten, so gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(k)}{\log k} = \frac{1}{\log 2}$. Offen bleibt nach Verff. die Frage der Verallgemeinerung des letzten Satzes für entsprechende Figuren des $E^{(n)}$ und die exakte Berechnung von $N(k)$. Weitere offene Fragen werden von Verff. erwähnt.

Demetrios A. Kappos.

Vol'pert, A. Ja.: Über die Homöomorphie abzählbarer Mengen. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 677—698 (1951) [Russisch].

Proof of the theorem (Th. I) that for a countable set A of real numbers the condition $A \cap (A' \setminus A'') = \emptyset$ (vacuous) is equivalent with the statement that A be homeomorphic with a set X of the same order type as the set R of all rational numbers. The system of all different ordinal types of such sets A is of power 2^{\aleph_0} (Th. III). As a corollary of the Th. I one has the Th. of Sierpiński [Fundamenta Math. 1, 11—16 (1920)] according to which any two countable dense linear sets are homeomorphic (the system of all different ordinal types of such sets is of power 2^{\aleph_0} ; Th. II).

George Kurepa.

Harrington, W. J.: A note on the denumerability of the rational numbers. Amer. math. Monthly 58, 693—696 (1951).

Angabe einer Numerierung der positiven rationalen Zahlen, wobei systematisch, von 1 ausgehend, die beiden Transformationen $S\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{a+b}$ und $T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a+b}{b}$ (a, b ganz) verwendet werden. Vgl. L. S. Jonston, dies. Zbl. 29, 386.

Hans Hornich.

Pi Calleja, Pedro: Über die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums. Revista Un. mat. Argentina 15, 67—70 (1951) [Spanisch].

Viene data una nuova dimostrazione del classico teorema della non numerabilità dell'insieme dei numeri reali, basata essenzialmente sull'osservazione che ogni successione crescente di numeri reali ha limite.

Landolino Giuliano.

Sheperdson, J. C.: Well-ordered sub-series of general series. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 291—307 (1951).

Verf. untersucht die Struktur einer geordneten Menge S im Hinblick auf ihre wohlgeordneten Teilmengen. Ist $\mathfrak{D}(S)$ die Menge aller Ordnungszahlen α , zu denen eine wohlgeordnete Teilmenge $T \subset S$ existiert, so heiße die kleinste Ordnungszahl, welche alle Zahlen aus $\mathfrak{D}(S)$ übertrifft, der Index $I(S)$ von S . — Sätze: $I(S) = \omega$ findet genau dann statt, wenn die invers geordnete Menge S^* wohlgeordnet ist vom Typus $\geq \omega$. — Aus $T \subset S$ folgt $I(T) \leq I(S)$. — Ist T dichte Teilmenge von S und S konfinal mit T , so ist $I(S) = I(T)$. — Ist $S = \sum_{\eta < \alpha} T_\eta$ die

wohlgeordnete Summe von geordneten Mengen, so ist $I(S)$ die kleinste Zahl, welche alle Zahlen ϱ der Form $\varrho = \sum_{\eta < \alpha} \varphi_\eta$, $\varphi_\eta < I(T_\eta)$, übertrifft, also $I(S) \leq \sum_{\eta < \alpha} I(T_\eta) + 1$. — Anschließend

folgen Sätze über geordnete Mengen S mit nicht regulärem Index $I(S)$ der Form $\sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i} n_i$

oder $\omega^\alpha + 1$ oder ω^α , die darauf hinauslaufen, daß S eine endliche bzw. wohlgeordnete Summe vom Typus $< I(S)$ von geordneten Mengen mit Indizes $< I(S)$ sein muß. — Wenn $I(S) = \omega_\beta$ regulär ist, braucht es keine Zerlegung von S der soeben genannten Art zu geben; so hat ja die Menge der reellen oder der rationalen Zahlen den Index ω_1 , aber auch jedes Stück dieser Mengen hat denselben Index. — Für den Fall $I(S) = \omega_\beta > \omega$, ω_β regulär, wird der Satz bewiesen: Bedeutet A die Eigenschaft einer geordneten Menge, einen Index $< \omega_\beta$ zu haben, dann hat eine geordnete Menge vom Index ω_β entweder die Eigenschaft A^α für ein $\alpha > 0$ oder sie ist die Summe geordneter Mengen, von denen jede die Eigenschaft A^α für ein $\alpha > 0$ besitzt, über eine geordnete Menge, von der jedes Stück den Index ω_β hat. — Für Formulierung und Beweis dieses Satzes werden Definitionen und Sätze von A. Gleyzal benützt, u. a. die Definition: Ist $A = A^1$ eine Eigenschaft, die einer geordneten Menge zukommen kann, so hat eine geordnete Menge die Eigenschaft A^α , wenn sie die Summe von geordneten Mengen ist, deren jede die Eigenschaft A^η für ein $\eta < \alpha$ hat, über eine geordnete Menge von der Eigenschaft A . — Folgerung: Eine geordnete Menge vom Index $\omega_\beta > \omega$, ω_β regulär, und einer Mächtigkeit $< \aleph_\beta$ ist die Summe von geordneten Mengen mit Indizes $< \omega_\beta$ über eine geordnete Menge, von der jedes Stück den Index ω_β hat. — Anschließend werden gewisse Minimaleigenschaften der lexikographisch geordneten Menge Z_β bewiesen, die aus allen Folgen α_i ($1 \leq i < \omega$) von Zahlen $0 \leq \alpha_i < \omega_\beta$ besteht, von denen nur endlich viele $\alpha_i \neq 0$ sind; Z_β hat die Mächtigkeit \aleph_β und den Index $\omega_{\beta+1}$. Jede geordnete Menge vom Index $\omega_{\beta+1}$ und einer Mächtigkeit $< \aleph_{\beta+1}$ enthält eine mit Z_β ähnliche Teilmenge. Dies ist

der einzige Fall, wo eine Menge vom Index α eine Mächtigkeit $< \bar{\alpha}$ haben kann. — Es werden analog noch „symmetrische“ Mengen $Z_{\alpha, \beta}$ eingeführt. — Zum Schluß wird gezeigt, daß es zu jedem α mit $\omega \leq \alpha \leq \omega_{\beta+1}$ eine geordnete Menge der Mächtigkeit \aleph_β vom Index α gibt.

Walter Neumer.

Aigner, Alexander: Der multiplikative Aufbau beliebiger unendlicher Ordnungszahlen. Monatsh. Math. 55, 297—299 (1951).

Verf. beweist den bekannten Satz, daß sich jede transfinite Ordnungszahl in gewisser Hinsicht eindeutig als Produkt endlich vieler unzerlegbarer Faktoren darstellen läßt. Eine eingehende Behandlung dieses Themas findet sich indes bereits bei E. Jacobsthal [Math. Ann. 66, 145—194 (1909)].

Walter Neumer.

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

● Gillespie, R. P.: Integration. 5. ed. London: Oliver and Boyd 1951. 6 s.

Rimini, Cesare: Richiami di calcolo differenziale e integrale. Repertorio Mat. 421—500 (1951).

Ein Repetitorium über die klassischen Definitionen, Sätze und Anwendungen der Differential- und Integralrechnung von reellen Funktionen einer und mehrerer reeller Veränderlichen ohne Beweise. (Was z. B. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bedeutet, wird nirgends erklärt.)

Georg Aumann.

Sikorski, R.: On measures in cartesian products of boolean algebras. Colloquium math. 2, 124—129 (1951).

Referat s. dies. Zbl. 41, 178.

Shanks, M. E.: On the existence of measures. Revista Ci. 53, Nr. 1—2, 31—40 (1951).

Ist $\sigma(f, g)$ im System F aller reellen Funktionen über einer Menge X eine invariante Quasi-(Halb-) Metrik, mit der F eine topologische Gruppe bildet, so reichen die beiden folgenden Bedingungen dazu hin, daß $\psi(A) = \sigma(f_A, 0)$ (f_A bedeutet die charakteristische Funktion der Teilmenge A von X) eine (äußere) Maßfunktion darstellt: 1. Aus $0 \leq g \leq f$ folgt $\sigma(g, 0) \leq \sigma(f, 0)$; 2. Ist f_n eine Cauchysche Folge bezüglich σ und $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für jedes $x \in X$, so $f_n \rightarrow f$ bezüglich σ . Die Bedingung 1 kann aus gewissen Bedingungen über die in F durch σ erzeugte Topologie gefolgert werden. Leitet man nun aus ψ die „zu ψ gehörige schwache asymptotische Quasimetrik“ $\delta(f, g) = \inf_{y > 0} (y + \psi(\{x: |f(x) - g(x)| \geq y\}))$ ab, so erzeugt δ die

stärkste unter den Topologien mit der Eigenschaft, daß gleichmäßig beschränkte Funktionenfolgen in ihnen genau dann gegen f konvergieren, wenn sie es bezüglich σ tun. Ferner ist $\delta(f, g) = 0$ gleichwertig mit $\sigma(f, g) = 0$. — Umgekehrt ist die zu einer beliebigen endlichen Maßfunktion γ in X gehörige schwache asymptotische Quasimetrik δ invariant und formt aus F eine topologische Gruppe. Zur Vervollständigung der so hergestellten Zuordnung „Quasimetrik in $F \leftrightarrow$ Maßfunktion in X “ sei noch bemerkt (Anm. d. Ref.): δ genügt den Bedingungen 1. und 2.; ist γ so normiert, daß $\gamma(X) \leq 1$ wird, so fällt das aus δ abgeleitete Maß $\delta(f_A, 0)$ mit γ zusammen.

Klaus Krickeberg.

Dowker, Yael Naim: Finite and σ -finite invariant measures. Ann. of Math., II. Ser. 54, 595—608 (1951).

Es sei F ein Boolescher σ -Verband, gebildet aus Teilmengen der festen Menge X mit $X \in F$. Besitzen die Maße (d. h. reelle, nicht-negative, σ -additive Funktionen) $m|F$ und $m'|F$ genau die gleichen Nullmengen, so heißen m und m' äquivalent, Zeichen $m \sim m'$. Eine ein-eindeutige Abbildung T von X auf sich heiße meßbar, wenn aus $A \in F$ folgt $T^i(A) \in F$, $i = \pm 1, \pm 2, \dots$ (gilt dies für $i = \pm 1$, so für alle i). Wird $m_i(A) = m(T^i(A))$ gesetzt, so ist $m_i|F$ ein Maß. Ein Maß $u|F$ heißt T -invariant, wenn $u(A) = u(T(A))$ für jedes $A \in F$. Gegenstand der Arbeit ist, bei gegebenem T und m , die Frage nach T -invarianten Maßen μ , die zu

m äquivalent sind. Dabei wird noch vorausgesetzt: Alle auftretenden Maße sollen σ -endlich sein (d. h. F ist Vereinigung abzählbar vieler $A_n \in F$ je von endlichem Maß), T sei meßbar und $m_i \sim m$ für jedes i . O. B. d. A. kann sogar das Nichtvorhandensein von T -wandernden Mengen B positiven Maßes angenommen werden [d. h. von $B \in F$ mit $B \cap T^i(B) = \emptyset$ für $i = \pm 1, \pm 2, \dots$ und $m(B) > 0$] und m als endlich, Abkürzung: $q_n(u_i(x), v_i(x)) = \left[\sum_{i=1}^n u_i(x) \right] : \left[\sum_{i=1}^n v_i(x) \right]$. Ergebnisse: Folgende Aussagen sind gleichwertig: (a) Es existiert ein σ -endliches, T -invariantes mit m äquivalentes Maß; (b) es existiert eine m -meßbare Punktfunktion $f(x)$, die m -fast überall positiv ist und für die $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(f(T^i x), w_i(x))$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(f(T^i x), w_i(x))$ m -fast überall von 0 und ∞ verschieden ist, wenn w_i ein Radon-Nikodymscher m -Integrand von m_i , also $m_i(A) = \int_A w_i dm$; (c) es existiert eine m -meßbare, positive Punktfunktion $g(x)$ derart, daß für jedes m -meßbare $f(x)$ mit $0 \leq f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$ m -fast überall $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(f(T^i x), g(T_i x))$ existiert. — Ersetzt man „ σ -endlich“ in (a) durch „endlich“, so treten an Stelle von (b) bzw. (c) die Aussagen: (b') Für jedes $A \in F$ existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=0}^n m(T^{-i}(A))$; (c') ist $\Phi(A; x)$ die charakteristische Funktion von A , so existiert für jedes $A \in F$ m -fast überall $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=0}^n \Phi(A; T^i x)$. Otto Haupt.

Chernoff, Herman: An extension of a result of Liapounoff on the range of a vector measure. Proc. Amer. math. Soc. 2, 722–726 (1951).

Es sei X eine feste Menge, S ein Boolescher σ -Verband von Teilmengen von X mit $X \in S$. Ferner seien $m_{iq} | S$, $i = 1, \dots, k_0$; $q = 1, \dots, n_i$, reelle endliche σ -additive Mengenfunktionen. Eine Zerlegung $z = \{E_1, \dots, E_{k_0}\}$ von X liegt vor, wenn $E_i \in S$, $E_i E_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $X = \bigcup E_i$. Das System aller z sei \mathfrak{z} . Mit $v(z) = (m_{11}(E_1), m_{12}(E_1), \dots, m_{1n_1}(E_1), m_{21}(E_2), \dots, m_{k_0 n_{k_0}}(E_{k_0}))$ wird der Vektor im $(n_1 + \dots + n_{k_0})$ -dimensionalen kartesischen Raum bezeichnet, dessen Komponenten die $m_{iq}(E_i)$ sind. Es heißt $A \in S$ Atom von v , wenn der Vektor $u(A)$ mit den Komponenten $m_{iq}(A)$ nicht Null und wenn $u(A') = u(A)$ oder $= 0$ ist für jedes $A' \in A$. Ferner heißt v nicht-atomar in $B \in S$, wenn keines der m_{iq} ein Atom $B^+ \in B$ besitzt. Sätze: (I) Der Wertbereich w von v über \mathfrak{z} ist beschränkt und abgeschlossen sowie — falls v nicht-atomar in X ist — konvex. — (II) Es sei $I = (0, 1)$ das Einheitsintervall auf der Zahlgeraden und L_1 das 1-dimensionale Lebesguesche Maß in I über dem Booleschen σ -Verband L'_1 (der L_1 -meßbaren Mengen in I). Ferner sei $m'_{iq} = m_{iq} \times L_1$ Produktmaß in $X' = X \times I$, weiter $z' = [E'_1, \dots, E'_{k_0}]$ eine Zerlegung von X' bezüglich $S' = S \times L'_1$; das System der z' sei \mathfrak{z}' . Dann gilt: Der Wertbereich des Vektors $v' | \mathfrak{z}'$ mit den Komponenten $m'_{iq}(E'_i)$ ist die konvexe Hülle von w . Otto Haupt.

Moore, Edward F.: Convexly generated k -dimensional measures. Proc. Amer. math. Soc. 2, 597–606 (1951).

Die Mengenfunktion $f(B)$ sei auf einem System von konvexen Borelschen Mengen im n -dimensionalen euklidischen Raum E_n definiert und so beschaffen, daß $f(B) \geq K L^k(S)$ gilt, wenn S ein in der abgeschlossenen Hülle von B enthaltenes k -dimensionales ($k \leq n$) Simplex ist, wobei K eine positive Konstante und $L^k(S)$ das k -dimensionale Lebesguesche Maß von S bedeutet. Es gebe ferner eine positive Zahl N , so daß für jedes rechteckige Parallelepiped $I \subset E_n$ mit Diameter s eine Menge $C \supset I$ mit Diameter $\leq Ns$ und $f(C) < Ns^k$ existiert. Es sei dann für beliebiges $A \subset E_n$ $F(A) = \lim_{r \rightarrow 0} \inf_{\Sigma B_k \supset A, \delta(B_k) \leq r} \sum_{k=1}^{\infty} f(B_k)$ das durch f erzeugte

Maß $[\delta(B_k)]$ bedeutet den Diameter von B_k . Bei diesen Bedingungen heißt $F(A)$ ein konvex erzeugtes k -dimensionales Maß auf E_n . Solche sind das Hausdorffsche Maß H_n^k [Math. Ann. **79**, 157—179 (1918)] und das Carathéodorysche Maß C_n^k (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1914**, 404—426). Es wird bewiesen: Wenn Φ_1 und Φ_2 konvex erzeugte k -dimensionale Maße auf E_n sind, dann gibt es positive Konstanten K_1 und K_2 mit $K_1 \Phi_1(A) \leq \Phi_2(A) \leq K_2 \Phi_1(A)$ für beliebiges $A \subset E_n$. Insbesondere wird gezeigt, daß immer $C_3^2(A) \leq H_3^2(A) \leq \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{2} C_3^2(A)$ gilt, dagegen wird ein Beispiel einer Menge $A \subset E_3$ mit $0 < C_3^2(A) < H_3^2(A) < \infty$ gegeben.

Akos Császár.

Jurkat, Wolfgang: Zur Bewegungsinvarianz des Lebesgueschen Maßes. Math. Z. **54**, 343—346 (1951).

Verf. skizziert einen Aufbau der Lebesgueschen Maßtheorie, bei dem das äußere Maß durch Überdeckungen mit nicht notwendig achsenparallelen Würfeln definiert wird. Es ist zu bemerken, daß im wesentlichen derselbe Aufbau schon im ungarischen Lehrbuche von P. Veress [Valós függvények (Reelle Funktionen), Budapest 1934] gebraucht wurde.

Akos Császár.

Schmidt, Robert: Zur Orthogonalinvarianz des Inhalts. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1950**, 103—106 (1951).

Ist der Riemannsche Inhalt (R-Inhalt) im Euklidischen Raum mit Hilfe einer festen Folge von Würfelgittern definiert und will man zeigen, daß der so definierte R-Inhalt gegenüber orthogonalen Transformationen invariant bleibt, so genügt es folgendes zu beweisen: Wenn W^* aus dem halboffenen Einheitswürfel W_0 des Gitters durch eine beliebige orthogonale Transformation hervorgeht, so ist W^* ebenfalls R-meßbar und hat den Inhalt 1. Verf. beweist diesen Satz in sehr einfacher Weise durch Benutzung der Tatsache, daß man jedes orthogonale Bild einer Kugel bereits durch eine Translation gewinnen kann. Gewisse geläufige Eigenschaften des R-Inhaltes werden beim Beweise als bekannt vorausgesetzt. Einen analogen Beweis findet man auch bei Schlesinger-Plassner, Lebesguesche Integrale, Berlin-Leipzig 1926, S. 60.

Demetrios A. Kappos.

Pukánszky, L. and A. Rényi: On the approximation of measurable functions. Publ. math., Debrecen **2**, 146—149 (1951).

Let E be a compact topological space and μ a Radon measure defined on E such that $\mu(E) = 1$. Let $(f_i(x))_{i \in I}$ be a family of real valued, μ -measurable functions, defined on E and satisfying $0 \leq f_i(x) \leq 1$. Suppose further that for every couple x_1, x_2 of points, which do not belong to a certain exceptional set of μ -measure zero, there exists an $f_i(x)$ with $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$. Then for any μ -measurable function $g(x)$ which satisfies $a \leq g(x) \leq b$ μ -almost everywhere on E , for any $\varepsilon > 0$, and $\delta > 0$, there exists a polynomial $P(f_1(x), \dots, f_m(x))$ of the functions $f_i(x)$, such that $|g(x) - P(f_1(x), \dots, f_m(x))| < \varepsilon$ on a set E_1 of measure greater than $1 - \delta$, and further we have (*) $a \leq P(f_1(x), \dots, f_m(x)) \leq b$ for every $x \in E$. — As the authors remark, without the conclusion (*) the theorem is a simple consequence of the Weierstrass-Stone theorem [Bourbaki, Topologie générale, chap. 5, X, n° 2; this. Zbl. **36**, 286] and Lusin's theorem. The proof given by the author serves also to establish the Weierstrass-Stone theorem in its original form. It is based on the Tychonoff theorem concerning the compactness of product spaces and uses hence the axiom of choice.

János Horváth.

Carr, R. E. and J. D. Hill: Pattern integration. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 242—245 (1951).

Es sei

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)}, \\ \alpha_1^{(2)}, \\ \dots \end{pmatrix}$$

eine aus lauter Nullen und Einsen bestehende unendliche Dreiecksmatrix

mit der Eigenschaft, daß $\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k^{(n_1)} = \alpha$ existiert, wenn n_1 und n_2 in der Weise gegen unendlich streben, daß $n_1 \leq n_2$ ist und $\lim (n_1/n_2) > 0$ existiert. Es wird bewiesen, daß für eine in $[0, 1]$ nach Riemann integrierbare beschränkte Funktion $f(x)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} f(\xi_k^{(n)}) = \alpha \int_0^1 f(x) dx$ gilt, wo die $\xi_k^{(n)}$ beliebige der Ungleichung $(k-1)/n \leq \xi_k^{(n)} \leq k/n$ genügende Zahlen sind. Einige leichte Folgerungen werden angefügt.

Akos Császár.

Carr, R. E.: Pattern integration with improper Riemann integrals. Proc. Amer. math. Soc. 2, 925—931 (1951).

Es sei $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ eine aus lauter Nullen und Einsen bestehende Folge mit der Eigenschaft, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k = \alpha$ existiert, $M \geq 1$ sei fest, $f(x)$ und $g(x)$ seien bei beliebigem $\varepsilon > 0$ in $[\varepsilon, 1]$ Riemann-integrierbar, $g(x)$ sei in $0 < x \leq r$ ($0 < r \leq 1$) monoton abnehmend, es gelte $\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = +\infty$, es gelte

endlich in $(0, r)$ $|f(x)| \leq g(x)$. Es wird bewiesen, daß, falls $\int_0^1 g(x) dx$ existiert,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k f(\xi_k^{(n)}) = \alpha \int_0^1 f(x) dx$ ist, wo die Zahlen $\xi_k^{(n)}$ den Bedingungen $1/Mn \leq \xi_1^{(n)} \leq 1/n$, $(k-1)/n \leq \xi_k^{(n)} \leq k/n$ ($k = 2, \dots, n$) unterworfen sind. Einige leichte Erweiterungen von Ergebnissen von Bromwich und Hardy [Quart. J. Math. 39, 222—240 (1907/8)] bzw. Wintner (dies. Zbl. 34, 40) werden auch behandelt.

Akos Császár.

Tsushikura, Tamotsu: Some remarks on the Riemann sums. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 197—202 (1951).

Se $f(x)$ è una funzione periodica, di periodo 1, integrabile in $(0,1)$ e per ogni intero $n > 0$ si pone $\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$ si dice che la $f(x)$ ha la proprietà (R) se per quasi tutti i valori di x si ha (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \int_0^1 f(u) du$, e si dice anche che la $f(x)$ ha la proprietà (R, C, α) se per le medie $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$ di $f(x)$ di rango α per quasi tutti i valori di x si ha (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^{(\alpha)}(x) = \int_0^1 f(u) du$. J. Marcinkiewicz ed A. Zygmund (questo Zbl. 17, 251), H. Ursell (questo Zbl. 17, 159) ed altri hanno individuato classi di funzioni $f(x)$ per le quali valgono la (1) o la (2). L'A. costruisce nuove classi di funzioni col seguente teorema: Sia $f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x)$ i) se la successione $\{a_n^2 + b_n^2\}$ è non crescente e se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \log n$ è convergente, allora $f(x)$ ha la proprietà (R) ; se $\{a_n^3 + b_n^3\}$ è non crescente e se $f(x) \in L$ allora $f(x)$ ha la proprietà (R, C, α) con $\alpha > 0$.

Giovanni Sansone.

Stein, S.: A measure-theoretic relation between a function and its reciprocal. Amer. math. Monthly 58, 691—693 (1951).

X und Y seien beschränkte Mengen im euklidischen Raum E_n . Jedem $x \in X$ sei eine Menge $f(x) \subset Y$ zugeordnet, deren charakteristische Funktion nach Riemann integrierbar ist, und für jedes $y \in Y$ sei die Menge $f^{-1}(y)$ der Punkte $x \in X$ mit $y \in f(x)$ Lebesgue-meßbar. Es wird bewiesen, daß dann $(L) \int_X m f(x) dm =$

$(R) \int_F m f^{-1}(y) dm$ gilt, wo mE das Lebesguesche Maß von E bedeutet. Mehrere

Anwendungen werden angefügt.

Akos Császár.

Minlos, R. A.: Die ebene Variation von Funktionen zweier Veränderlichen und das zylindrische Maß von Mengen im dreidimensionalen Raume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 733—736 (1951) [Russisch].

An ε -cylinder is the set C of points (x, y, z) such that $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$ and $|z - z_0| < l$, where $2r < \varepsilon$, $2l < \varepsilon$, and (x_0, y_0, z_0) is the centre of C . The number $4\pi l$ will be denoted by $\sigma(C)$. Let E be a subset of the unit cube J : $0 \leq x, y, z \leq 1$. Let $\mu_\varepsilon(E) = \text{g. l. b. of numbers } \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(C_n)$ where $\{C_n\}$ is any covering of E by ε -cylinders C_n , $E \subset C_1 + C_2 + \dots$. The number $\mu(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon(E)$ is

called the cylinder measure of E (clearly μ is countably additive on the field of Borel subsets of J). Let $\varphi(t, E)$ denote the linear Hausdorff measure of the intersection of E with the plane $z = t$. The following theorems are proved: (I) If E is an analytic set, then $\mu(E) = \text{l. u. b. of numbers } \mu(F)$ where $F = \bar{F} \subset E$. (II) If E is a Borel set, then $\mu(E) = \text{the outer Lebesgue integral of } \varphi(t, E): \mu(E) =$

$\int_0^1 \overline{\varphi(t, E)} dt$. — If E is the geometrical image of a function $z = f(x, y)$ on a subset A

of the square $0 \leq x, y \leq 1$, then, following A. Kronrod, the integral $\int_0^1 \overline{\varphi(t, E)} dt$

is the plane variation of f on A .

Roman Sikorski.

Bari, N. K. und L. A. Ljusternik (Lusternik): Die Arbeiten N. N. Luzins zur metrischen Funktionentheorie. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 6 (46), 28—46 (1951) [Russisch].

Die Verff. geben in gedrängter Form einen Überblick über die Arbeiten Luzins auf dem Gebiete der reellen Funktionen. L. hat sich vor allem mit zwei Gruppen von Problemen beschäftigt. Die der einen betreffen das Lebesguesche und das Denjowsche Integral, deren sorgfältiges Studium L. zur Definition neuartiger Funktionenklassen (Funktionen der Schwankung Null u. a.) veranlaßte. Mit Hilfe dieser Begriffsbildungen gelang es ihm, eine Reihe recht allgemeiner und abschließender Sätze zu beweisen. — Die Probleme der zweiten Gruppe beziehen sich auf trigonometrische Reihen. L. hatte bereits in seiner Dissertation (1915) auf deren überragende Bedeutung für die Theorie der reellen Funktionen hingewiesen. Im einzelnen hat er folgende Fragen studiert: 1. den Zusammenhang zwischen der Konvergenz der Reihe einerseits und ihrer absoluten Konvergenz bzw. dem Verschwinden ihrer Koeffizienten andererseits (Gegenbeispiele zeigen, daß kein Zusammenhang besteht), 2. die Konvergenz der Fourier-Reihe einer quadratisch summierbaren Funktion, in Verbindung damit die Eigenschaften des Dirichlet'schen Integrals, schließlich 3. die Darstellbarkeit einer willkürlichen Funktion durch eine trigonometrische Reihe. — Die Verff. beschränken sich auf die Formulierung der Probleme und der Hauptergebnisse, ohne Beweise mitzuteilen. Sie zeigen aber durch Hinweise auf eine Anzahl neuester Arbeiten, wie L.'s Gedankengänge und Ergebnisse von seinen Schülern weitergeführt und vervollständigt worden sind. — Das Literaturverzeichnis umfaßt 24 Arbeiten von Luzin und 37 weitere Veröffentlichungen.

Wolfgang Hahn.

Krejn, M. G.: Die Ideen P. L. Čebyševs und A. A. Markovs in der Theorie der Grenzwerte von Integralen und ihre weitere Entwicklung. Unter redaktioneller Mitarbeit von P. G. Rechtman. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 4 (44), 3—120 (1951) [Russisch].

The article under review presents an exposition of and developments from certain classical theories evolved by Čebyšev, Markov, Stieltjes, F. Riesz, Carathéodory, and others. A large number of well-known theorems in the theory of extremal values of integrals, representation theorems for analytic functions, moments, and the like, together with various new results, are set forth. The apparatus of modern functional analysis: positive linear functionals, convex sets in linear spaces, etc., is used freely. Pleasing clarity and completeness are obtained, and a degree of unity is achieved in a field where great numbers of isolated results have been the rule. Many of the recent results given are not new, but appeared originally in journals not readily accessible outside of the Soviet Union. It is stated that the article was reconstructed largely by Rechtman, from the author's recollections of papers written in the 1930's and

destroyed during the period 1941—1945. — The paper opens with a long introduction in the polemical style now enjoying a certain vogue, presenting a history of the subject from an exclusively Russian point of view. The earliest paper cited is a note of Čebyšev [J. Math. pur. appl., II. Ser. 19, 157—160 (1874)], in which the following problem is posed. Suppose that

$a < \xi < \eta < b$, and that $f(t)$ is a non-negative function in $[a, b]$. If the moments $\int_a^b t^k f(t) dt$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) are known, what are the most exact possible upper and lower bounds

on the integral $\int_{\xi}^{\eta} f(t) dt$? This problem, with generalizations and applications in various

directions, is the subject of the article under review. — Chapter I, titled „The problem of Čebyšev-Markov“, considers first the following very general situation. Let $\{u_k(t)\}_0^n$ be continuous real functions on an interval $[a, b]$, and let $\{c_k\}_0^n$ be a sequence of real numbers not all zero.

Let \mathfrak{P} be the set of all linear combinations $P(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_k(t)$, with the α_k real. Let the functional $\mathfrak{U}(P)$ on \mathfrak{P} be defined by $\mathfrak{U}(P) = \sum_{k=0}^n \alpha_k c_k$. The sequence $\{c_k\}_0^n$ is positive (strictly positive; singularly positive) if $\mathfrak{U}(P) \geq 0$ for all $P \geq 0$ in \mathfrak{P} [$\mathfrak{U}(P) > 0$ for all $P \geq 0$ in \mathfrak{P} which are not 0; $\{c_k\}_0^n$ positive but $\mathfrak{U}(P) = 0$ for some $P \in \mathfrak{P}$ which is not 0 but is ≥ 0]. It is assumed that \mathfrak{P} contains some $\Pi(t)$ which is > 0 everywhere in $[a, b]$. (Reviewer's note. It will be observed that \mathfrak{P} is simply p -dimensional Euclidean space for some $p \leq n+1$, with a partial ordering, in general not a lattice ordering, in which the \mathfrak{U} 's are all possible linear functionals and positive $\{c_k\}_0^n$ give rise to non-negative linear functionals.) The fundamental theorem, on which the entire article is based, is the following. There exists a non-decreasing function $\sigma(t)$ ($a \leq t \leq b$) such that

$$(1) \quad \int_a^b u_k(t) d\sigma(t) = c_k \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

if and only if $\{c_k\}_0^n$ is positive. The non-trivial implication here is proved by showing that the

set $K \subset R^{n+1}$ of all points having the form $\left\{ \int_a^b u_k(t) d\sigma(t) \right\}_{k=0}^n$ for some non-decreasing σ is a

closed, convex cone containing the curve L with parametric representation $x_k = u_k(t)$ ($a \leq t \leq b$; $k = 0, 1, \dots, n$). This is shown by the use of Helly's theorems. The theorem then follows from Minkowski's theorem on the existence of separating hyperplanes for closed convex sets and points lying outside these sets. The obvious analogue for infinite sequences $\{u_k(t)\}_0^\infty$ and $\{c_k\}_0^\infty$ is next proved: c_k admits the representation (1) for $k = 0, 1, 2, \dots$, if and only if $\{c_k\}_0^\infty$ is positive with respect to $\{u_k(t)\}_0^\infty$ for all $n = 1, 2, \dots$. For sequences $\{u_k(t)\}_0^\infty$ of continuous complex functions on $[a, b]$, an analogous theorem is also established. As examples, necessary and sufficient conditions are given for finite or infinite sequences $\{s_k\}$ to be representable in

the form $\int_a^b t^k d\sigma(t)$ and $\int_0^{2\pi} e^{-ik\tau} d\sigma(\tau)$ (Herglotz's theorem). Next, a short proof is given of

the Pick-Nevanlinna theorem: Let $\{z_k\}_0^\infty$ be of absolute value < 1 , and $\{\omega_k\}_0^\infty$ complex numbers with positive real part. Then there exists a function f analytic for $|z| < 1$, with $\operatorname{Re}(f) > 0$, and with $f(z_k) = \omega_k$, if and only if the Hermitian form

$$\sum_{l, k=0}^n \frac{\omega_k + \bar{\omega}_l}{1 - z_k \bar{z}_l} \xi_k \bar{\xi}_l$$

is non-negative for all $n > 0$. — Maximal masses are next considered. For fixed $\{c_k\}_0^n$ (real), and $\{u_k(t)\}_0^n$, let $V = V(c_0, c_1, \dots, c_n)$ denote the set of all right-continuous (except possibly at a) non-decreasing σ such that (1) is valid. The maximal mass at $\xi \in [a, b]$ is defined as $\sup [\sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi - 0)]$, taken over all $\sigma \in V$. It is proved that this maximal mass is equal to $\inf \mathfrak{U}(P)/P(\xi)$, taken over all $P \in \mathfrak{P}$ such that $P \geq 0$. The exact value of the maximal mass is worked out for $u_k(t) = t^k$, $a = -1$, $b = 1$, and various choices of $\{c_k\}_0^n$. — The author next takes up Čebyšev systems, i. e., sequences $\{u_k(t)\}_0^n$ as above with the additional property that every

$P(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_k(t)$ with some $\alpha_k \neq 0$ has at most n distinct zeros in $[a, b]$. A number of

amusing elementary properties of such systems are described: e. g., if $P(t)$ has k zeros where $P(t)$ does not change sign and l zeros where it does change sign, then $2k + l \leq n$. A number of elementary results are set forth concerning representations (1) for Čebyšev systems for the case $\sigma =$ a step function with m discontinuities ξ_1, \dots, ξ_m . In this case, of course, (1) becomes

$$(2) \quad c_k = \sum_{j=1}^m [\sigma(\xi_j + 0) - \sigma(\xi_j - 0)] u_k(\xi_j).$$

Let $\varepsilon(t) = 2$ for $a < t < b$ and $\varepsilon(t) = 1$ for $t = a$ and $t = b$. The number $\sum_{j=1}^m \varepsilon(\xi_j)$ is called the index of the representation (2). This index is shown to be closely related to various properties of $\{c_k\}_0^n$. It is shown that a strictly positive $\{c_k\}_0^n$ admits exactly two representations (2) of index $n + 1$. An application is made to approximate quadrature formulas. Let $\Omega(t)$ be continuous in $[a, b]$, and let $\{u_k(t)\}_0^n$ be a Čebyšev system. Let φ be any non-decreasing function in $[a, b]$, and let $c_k = \int_a^b u_k(t) d\varphi(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Suppose that $\{c_k\}_0^n$ admits a representation (2) of index $\leq n + 2$. Then one can approximate to $\int_a^b \Omega(t) d\varphi(t)$ by the expression $\sum_{j=1}^m [\sigma(\xi_j + 0) - \sigma(\xi_j - 0)] \Omega(\xi_j)$. This is exact if $\Omega \in \mathfrak{P}$. A detailed investigation of the error committed is given for a number of different cases. — An exposition is next given for maximum and minimum values of certain integrals $\int_a^\xi \Omega(t) d\sigma(t)$. If $\Omega(t)$ is continuous in $[a, b]$, if the determinant

$$\begin{vmatrix} u_0(t_1) & u_1(t_1) & \dots & u_n(t_1) & \Omega(t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0(t_{n+2}) & u_1(t_{n+2}) & \dots & u_n(t_{n+2}) & \Omega(t_{n+2}) \end{vmatrix}$$

is positive for all $a \leq t_1 < \dots < t_{n+2} \leq b$, if $\xi \in [a, b]$, if $\{u_k(t)\}_0^n$ is a Čebyšev system, if c_k is given by (1) and is strictly positive, then there exists precisely one representation (2), for $\{c_k\}_0^n$ of index $\leq n + 2$, for which ξ is a point ξ_j . Let σ_ξ be the step function producing this representation. Then the following inequalities hold:

$$\int_a^{\xi+0} \Omega(t) d\sigma(t) \leq \int_a^{\xi+0} \Omega(t) d\sigma_\xi(t), \text{ and } \int_a^{\xi-0} \Omega(t) d\sigma(t) \geq \int_a^{\xi-0} \Omega(t) d\sigma_\xi(t),$$

for all $\sigma \in V(c_0, c_1, \dots, c_n)$. Results like the above are also given for sequences of periodic functions and for functions defined on infinite intervals. — Chapter II deals with what the author calls problems of Markov. A typical such problem is the following. Let $\{u_k(t)\}_0^n$ be continuous real functions on $[a, b]$, $\{c_k\}_0^n$ a sequence of real numbers, and $\varphi(t)$ and $\pi(t)$ continuous functions of bounded variation on $[a, b]$ such that $\varphi(t) - \varphi(u) < \pi(t) - \pi(u)$ for all $t < u \in [a, b]$. One wishes to find a function σ of bounded variation on $[a, b]$ with $\sigma(a) = 0$, such that $\varphi(t) - \varphi(u) \leq \sigma(t) - \sigma(u) \leq \pi(t) - \pi(u)$ for all $t < u \in [a, b]$, and such that (1) holds for this particular σ . By use of the theory of convex bodies, the following solution is found. Such a σ exists if and

only if for every $P(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_k(t) \in \mathfrak{P}$, the inequality

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k c_k \leq \int_a^b \max(P(t), 0) d\pi(t) + \int_a^b \min(P(t), 0) d\varphi(t)$$

obtains. Various special σ 's are discussed. Finally, various extremal properties are given for integrals $\int_a^\xi \Omega(t) d\sigma(t)$, $\xi \in [a, b]$, where the functions σ are subjected to restrictions like those just described.

Edwin Hewitt.

Kober, H.: On decompositions and transformations of functions of bounded variation. Ann. of Math., II. Ser. 53, 565—580 (1951).

Es bedeute V die Klasse der Funktionen $x(t)$, die in $0 \leq t \leq 1$ von beschränkter Variation sind, I die Klasse der in $0 \leq t \leq 1$ nichtabnehmenden Funktionen, und mit $V_{t,\tau}$ bezeichne man die totale Variation der Funktion $f(t)$ im Intervall $[t, T]$. Die Funktion $\varphi(t)$ heiße COV (co-variation) zu $k(t) \in V$, wenn $\varphi(t) \in I$ ist und wenn es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $\sum_j V_{t_j, t_{j+1}} k < \varepsilon$ ist, wenn nur $0 \leq t_1 < T_1 < t_2 < T_2 < \dots < T_n \leq 1$, $\sum_j [\varphi(T_j) - \varphi(t_j)] < \delta$ stattfindet und $\varphi(t)$ in den Punkten t_j, T_j stetig ist. Die Funktionen $g(t)$ und $h(t)$ heißen CAV (contra-variation) zueinander, wenn $g(t)$ bzw. $h(t)$ die positive bzw. negative Variation von $f(t) = g(t) - h(t)$ in $[0, t]$ darstellen; sie heißen NCAV (normal contra-variation) zueinander, wenn noch die Ungleichung

$$\min[f(t-0), f(t+0)] \leq f(t) \leq \max[f(t-0), f(t+0)] \quad (0 < t < 1)$$

gilt. Folgende Sätze werden bewiesen: 1. $g(t)$ und $h(t)$ sind dann und nur dann CAV, wenn $g \in I, h \in I, g(0) = h(0) = 0$ und es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein endliches System disjunkter Inter-

valle $[t_k, T_k]$ gibt, so daß $\sum_k [g(T_k) - g(t_k)] > g(1) - \varepsilon$, $\sum_k [h(T_k) - h(t_k)] < \varepsilon$ gilt. Sie sind dann und nur dann NCAV, wenn noch in jedem Punkte von $[0,1]$ entweder $g(t)$ oder $h(t)$ stetig ist. 2. Die Bogenlänge der Kurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ [$x(t) \in V$, $y(t) \in V$, $x(0) = 0$] ist dann und nur dann durch $x(t) + y(t)$ gegeben, wenn $x(t)$ und $y(t)$ CAV sind. 3. Bei geeigneter Definition der Funktion $h(g^{-1}(x))$ sind die Funktionen $g(t) \in I$ und $h(t) \in I$ dann und nur dann NCAV, wenn $h(g^{-1}(x))$ singular ist. 4. Ist $\varphi(t) \in I$, $\varphi(0) = 0 < \varphi(1)$ gegeben, so ist jede Funktion $f(t) \in V$ eindeutig in der Form $f(t) = k(t) + d(t)$ [$d(0) = 0$] darstellbar, wo $\varphi(t)$ COV zu $k(t)$ und NCAV zu $V_{0,t} d$ ist. Bei $f(t) \in I$ gilt auch $k(t) \in I$ und $d(t) \in I$. Es gilt ferner $V_{0,t} f = V_{0,t} k + V_{0,t} d$, $V_{0,t} k$ und $V_{0,t} d$ sind NCAV. 5. Ist $\varphi(t) \in I$, $f(t) \in V$, $V_{0,t} f = F(t)$, so ist $\varphi(t)$ dann und nur dann COV zu $f(t)$, wenn $F(\varphi^{-1}(x))$ vollstetig ist. — Zahlreiche Ergänzungen und Folgerungen werden hinzugefügt.

Akos Császár.

Ellis, H. W.: Darboux properties and applications to non-absolutely convergent integrals. Canadian J. Math. 3, 471—485 (1951).

Dem Leser dieser Arbeit müssen allerhand Symbole geläufig sein; er muß wissen, was ADF bedeutet, wenn $F(x)$ irgendeine Funktion ist, und auch, was es heißt, $F(x)$ ist AC. Daneben kann $F(x)$ aber auch noch CG oder ACG oder [CG] oder [ACG] sein. Diese Begriffe und noch viele andere werden vom Verf. neu eingeführt. und der Leser muß sich vor Verwechslungen hüten. Sie können hier nicht erläutert werden. Zur Illustrierung der gewonnenen Sätze seien nur einige als typische Beispiele angeführt. Satz IV: Wenn eine meßbare Funktion $F(x)$ die Bedingung N erfüllt, d. h. wenn für jede Menge x vom Maß 0 auch die Menge der zugehörigen Funktionswerte $F(x)$ das Maß 0 hat, dann erfüllt sie auch die Bedingung T_2 , d. h. fast alle Funktionswerte werden höchstens abzählbar oft angenommen. Satz VI: Wenn $F(x)$ im Intervall $[a, b]$ Darboux-stetig ist, d. h. in jedem Teilintervall (l, m) jeden Wert zwischen $F(l)$ und $F(m)$ annimmt, und auch [CG] ist und wenn $G(x)$ stetig ist, dann ist $F(x) + G(x)$ Darboux-stetig. Satz XI: Eine approximativ stetige Funktion ist auch Darboux-stetig. Satz 5.5: Wenn $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ P_* -integrierbar (der Begriff ist dem Ref. nicht ganz klar geworden) und Darboux-stetig ist, dann gibt es zwischen a und b eine Zahl ξ derart, daß $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi)$ ist.

Oskar Perron.

Burkill, J. C.: On the differentiability of multiple integrals. J. London math. Soc. 26, 244—249 (1951).

Neuer Beweis des Dichtesatzes im starken Sinne und des berühmten Satzes von Jessen, Marcinkiewicz und Zygmund über die starke Differenzierbarkeit mehrfacher Integrale (dies. Zbl. 12, 59). Der Beweis beruht (bei zwei Veränderlichen) auf folgendem Hilfssatz: Ist E eine beschränkte, meßbare Menge in der Ebene und bedeutet $\sigma_x(E)$ die Menge der Punkte, die in achsenparallelen Rechtecken I mit $|E \cap I| > \alpha |I|$ ($0 < \alpha < 1$) enthalten sind, so gibt es eine Konstante A , so daß $|\sigma_x(E)| < \frac{A}{\alpha} \log \frac{A}{\alpha} |E|$ gilt. Dieser Hilfssatz ist eine Verfeinerung älterer Ergebnisse von Busemann und Feller (dies. Zbl. 9, 196) bzw. Besicovitch (dies. Zbl. 12, 58).

Akos Császár.

Papoulis, A.: On the density theorem. Proc. Amer. math. Soc. 2, 709—717 (1951).

Verf. konstruiert eine offene Menge $E \subset Q$ (wo Q das Quadrat $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ bedeutet) mit folgender Eigenschaft: zu $x \in Q$ kann man eine Folge von Rechtecken $\{I_n\}$ in der Weise finden, daß die Seiten von I_n feste nur von x , nicht von n abhängige Richtungen haben, $x \in I_n$ ist, der Diameter von I_n gegen Null strebt, und $\lim |E \cap I_n|/|I_n| > 1/3$ ist. Die Komplementärmenge von E zeigt dann, daß eine etwaige Verallgemeinerung des Dichtesatzes auf Rechtecke mit fester, aber von Punkt zu Punkt veränderlicher Orientierung unmöglich ist.

Akos Császár.

Cereteli, O. D.: Über eine Anwendung der Theorie der halbgeordneten Räume. Soobščenijska Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 12, 189—191 (1951) [Russisch].

A necessary and sufficient condition is proved for the equation $\lim_n \int_E x_n(t) dt = \int_E \lim_n x_n(t) dt$ to be true for every measurable set E . This condition was earlier published by Ya. A. Tagamlickij, this Zbl. 29, 117. Roman Sikorski.

Lenz, Hanfried: Zurückführung einiger Integrale auf einfachere. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1951, 73—80 (1951).

Für $\nu = 1, \dots, 4$, rationale $\gamma_\nu \not\equiv 0 \pmod{1}$, $\sum_{\nu=1}^4 \gamma_\nu = 0$ und rationale Funktionen $R(z)$ werden 8 Typen der unbestimmten Integrale $\int dz \prod_{\nu=1}^4 (z - z_\nu)^{\gamma_\nu} R(z)$ unterschieden, die höchstens hyperelliptisch vom Geschlecht $p = 2$ ausfallen. Z. B. ergibt $(m, n) = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = n/m$, $\gamma_3 = \gamma_4 = \frac{1}{2} - n/m$, $m = 3, 4, 6, 8, 12$ ein elliptisches Integral, und mit $l = 3, 4, 6, 8$ ebenso $\int dz R(z, \sqrt[l]{a^l - z^l})$. Wilhelm Maier.

Stöhr, Alfred: Über einen integralartigen Grenzübergang bei Kettenbrüchen. Math. Nachr. 6, 103—107 (1951).

Let a, b be given real numbers, $a \leq b$. Let $p_{11}(x), p_{12}(x), p_{21}(x), p_{22}(x)$ be functions (not necessarily real valued), defined in the interval $a \leq x \leq b$, and Riemann integrable. The class E denotes the set of numbers $x_0 = a \leq x_1 \leq \dots \leq x_N = b$ as well as the numbers $p_{kl,n}$ ($k = 1, 2; l = 1, 2; n = 1, 2, \dots, N$).

The constant M_4 is such that (i) $\sum_{k,l=1}^2 \int_a^b |p_{kl}(\xi)| d\xi < M_4$, (ii) $\sum_{k,l=1}^2 \sum_{n=1}^N |p_{kl,n}| < M_4$.

The class E belongs to ε^* if for $x = x_n$ or $x_n < x < x_{n+1}$,

$$\left| \int_a^x p_{kl}(\xi) d\xi - \sum_{v=1}^n p_{kl,v} \right| < \varepsilon^* \quad (k = 1, 2; l = 1, 2).$$

Let E_1, E_2, \dots be a sequence of classes which satisfy (ii) with a common bound M_4 and which belong to $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ respectively, and $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varepsilon_\lambda = 0$. Furthermore let

$v_{1,0}, v_{2,0}$ be constants which do not both vanish. Let $v_{1,0}/v_{2,0} = y_0$, and

$$y_E(a, b; y_0) = \frac{N}{K} \left\{ \frac{1 + p_{11,n}}{p_{21,n}} + \frac{1 + p_{22,n}}{p_{12,n}} + \right\} y_0.$$

Here $\frac{N}{K} \left\{ \frac{\alpha_n}{|\beta_n|} + \dots + \frac{\gamma_n}{|\delta_n|} + \dots \right\}$ denotes the continued fraction $\frac{\alpha_N}{|\beta_N|} + \dots + \frac{\gamma_N}{|\delta_N|} + \frac{\alpha_{N-1}}{|\beta_{N-1}|} + \dots + \frac{\gamma_{N-1}}{|\delta_{N-1}|} + \dots + \frac{\alpha_2}{|\beta_2|} + \dots + \frac{\gamma_2}{|\delta_2|} + \frac{\alpha_1}{|\beta_1|} + \dots + \frac{\gamma_1}{|\delta_1|} + \dots$. The following theorem is proved: $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} y_E(a, b; y_0) = y(a, b; y_0)$ exists.

The limit value depends only on a, b , the $p_{kl}(x)$, and y_0 , and is independent of the chosen sequence of classes. In analogy to the definite integral, $y(a, b; y_0) = \frac{b}{a} \left\{ \frac{1 + p_{11}(x)}{p_{21}(x)} + \frac{1 + p_{22}(x)}{p_{12}(x)} + \right\} y_0$ is called a „continued fraction integral“. Certain of its properties are given which are analogous to properties of the Riemann integral. Evelyn Frank.

Puig Adam, P.: Kettenbrüche mit Differentialen als Teilennennern und ihre Anwendungen. Revista mat. Hisp.-Amer. 11, 180—189 und französ. Zusammenfassg. 189—190 (1951) [Spanisch].

This is a study of the existence, the calculation, and certain applications of an algorithm on certain continued fractions with partial quotients that are functions of a real variable, that

one obtains when one passes to a limit analogous to that obtained in the integral from a sum.

I. Let $f(x)$, $g(x)$ be two functions continuous and positive in the interval (a, b) . Let $F(x) =$

$\int_a^x f(x) dx$, $G(x) = \int_a^x g(x) dx$. The continued fraction

$$(1) \quad \Delta F(x_0) + \frac{1}{\Delta G(x_0)} + \frac{1}{\Delta F(x_1)} + \frac{1}{\Delta G(x_1)} + \cdots + \frac{1}{\Delta F(x_{n-1})} + \frac{1}{\Delta G(x_{n-1})} + \frac{1}{C},$$

where the division points are $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, C is a positive constant, and $\Delta F(x_i)$, $\Delta G(x_i)$ are the variations of the functions F , G between consecutive points, tends to a unique limit as the intervals Δx_i tend to zero. Included here are the

special cases $\int_a^b f(x) dx$ for $g \equiv 0$, $C = 0$, and the reciprocal of the integral (1), $\int_a^b g(x) dx$ for

$f \equiv 0$, $C = \infty$. II. The relation between two partial approximants of (1) is $Z(x_i) = \Delta F(x_i) + \frac{1}{\Delta G(x_i)} + \frac{1}{Z(x_{i+1})}$. As $\Delta x_i \rightarrow 0$, the Riccati equation $Z^2 g(x) - f(x) = \frac{dZ}{dx}$ is obtained.

In the variable interval (x, b) the value of the continued fraction $Z(x) = f(x) dx + \frac{1}{g(x) dx} + \cdots + \frac{1}{f(b) dx} + \frac{1}{g(b) dx} + \frac{1}{C}$ is the solution of the Riccati equation which gives a method for the calculation of the algorithm in the interval (x, b) . Further processes of calculation are considered. III. The application to electrical network theory is indicated.

Evelyn Frank.

Orlicz, W.: On a class of asymptotically divergent sequences of functions. *Studia math.* **12**, 286—307 (1951).

$\varepsilon_n(t)$ étant les fonctions de Rademacher définies sur $(0, 1)$, et $\eta_n(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon_n(t)$, l'A. étudie le rapport entre la convergence asymptotique des suites $f_n^i(x)$ ($i \rightarrow \infty$, $x \in A$ mesurable) et celle des suites

$$F_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(t) f_n^i(x); \quad F_i^*(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) f_n^i(x)$$

et le rapport entre la différentiabilité des fonctions $f_n(x)$ ($x \in A$) et celle des fonctions

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(t) f_n(x); \quad F^*(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) f_n(x).$$

André Revuz.

Šilov, G. E.: Vektor-glatte Funktionen. *Uspechi mat. Nauk* **6**, Nr. 5 (45), 176—184 (1951) [Russisch].

Let w be a complex continuous function in the plane, S a neighborhood of a point z with a smooth contour L with exterior normal n and tangent t . $\text{Div } w$ and $\text{rot } w$ are defined as the limits as the length of L tends to zero of $S^{-1} \int_L (w, n) dl$ and $S^{-1} \int_L (w, t) dl$, whenever they exist. If they exist in a region, the partial derivatives w_x and w_y need not exist, but Ostrogradski's formulas $\int_L (w, n) dl = \int_S \text{div } w ds$ and $\int_L (w, t) dl = \int_S \text{rot } w ds$ hold, and if $\text{div } w = \text{rot } w = 0$, then w is analytic.

Lars Gårding.

Fort, M. K.: Points of continuity of semi-continuous functions. *Publ. math. Debrecen* **2**, 100—102 (1951).

The author proves that if $f: T \rightarrow 2^X$ is either lower semicontinuous or upper semicontinuous on T , then it is continuous at points of a residual set; X is supposed only to be metric, without more restrictions as in previous papers (this. Zbl. **34**, 326). *István Fáy.*

Sharma, A.: On the remainder in two theorems of Kloosterman. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **54**, 418—425; *Indagationes math.* **13**, 418—425 (1951).

Es seien r und k positive ganze Zahlen und $P_n(r), Q_n(r)$ die Koeffizienten in den Entwicklungen

$$\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(r) x^n, \quad \left(\frac{1}{x} \log(1+x)\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(r) x^n;$$

$\Delta_h^r f(x)$ sei die r -te Differenz $\sum_{v=0}^r (-1)^{r-v} \binom{r}{v} f(x+v h)$. Verf. beweist: A. Die im abgeschlossenen Intervall $I: [x, x+r h]$ definierte reelle Funktion $f(x)$ habe dort Ableitungen bis zur $(r+k+1)$ -ten Ordnung, im offenen Intervall noch bis zur $(r+k+2)$ -ten Ordnung, und es sei $f^{(r+k+1)}(x)$ noch stetig in den Endpunkten. Dann gibt es im Innern von I eine Zahl ξ derart, daß

$$h^{-r} \Delta_h^r f(x) = \sum_{n=0}^{k-1} P_n(r) h^n f^{(n+r)}(x) + P_k(r) h^k f^{(k+r)}(x + h \alpha_k(r)) + R_k(r) h^{k+2} f^{(k+r+2)}(\xi),$$

$$\text{wo } \alpha_k(r) = P_{k+1}(r)/P_k(r), \quad R_k(r) = P_{k+2}(r) - \frac{1}{2} \alpha_k(r) P_{k+1}(r).$$

B. Die im abgeschlossenen Intervall $I': [x, x+(r+k-1)h]$ definierte reelle Funktion $f(x)$ habe dort Ableitungen bis zur $(r+k+2)$ -ten Ordnung und $f^{(r+k+2)}(x)$ sei dort beschränkt. Dann gibt es in I' eine Zahl ξ derart, daß

$$f^{(r)}(x) = \sum_{v=0}^{k-1} Q_v(r) h^{-r} \Delta_h^{r+v} f(x) + Q_k(r) h^k f^{(r+k)}(x + \beta_k(r) h) + R_{r,k} h^{k+2} f^{(r+k+2)}(\xi),$$

$$\text{wo } \beta_k(r) = P_1(r+k) + Q_{k+1}(r)/Q_k(r),$$

$$R_{r,k} = Q_{k+2}(r) + \frac{1}{2} Q_{k+1}(r) + \frac{1}{24} (r+k) Q_k(r) - \frac{1}{2} Q_{k+1}^2(r)/Q_k(r).$$

Die Formeln entstehen durch Verbindung einer Idee von Mazzoni [Rend. Circ. Mat. Palermo 52, 44–57 (1928)] mit zwei vom Ref. bewiesenen Formeln (dies. Zbl. 39, 56).

Hendrik Douwe Kloosterman.

Sharma, Ambikeshwar: On the properties of $\theta(x, h)$ in Mazzoni's form of the mean-value theorem. Math. Student 19, 37–43 (1951).

Verf. beweist für die Funktion $\theta(x, h)$ in der Formel $f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \dots + \frac{h^{n-3}}{(n-3)!} f^{(n-3)}(x) + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}\left(x + \frac{h}{n-1}\right) + \frac{(n-2) h^n}{2(n-1)n!} f^{(n)}[x + \theta(x, h) h]$ [s.: P. Mazzoni, Rend. Circ. Mat. Palermo 52, 44–57 (1928)]:

$$\theta_r = \lim_{h \rightarrow 0} \theta(x, h) = \left(\frac{2}{n-2}\right)^{1/r} \left[\frac{n-1}{\binom{n+r}{r}} - \frac{n}{(n-1)^r (r+1)(r+2)} \right]^{1/r} \quad (r > -1, r \neq 0),$$

falls es ein L gibt derart, daß $\lim_{h \rightarrow 0} [f^{(n)}(h) - L] h^{-r} \neq 0$ (endlich) existiert;

$$\theta_{-1} = \frac{n-2}{2n(n-1)} \left[\log(n-1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n-1} \right],$$

falls für ein M $\lim_{h \rightarrow 0} [h f^{(n)}(h) \log^M h] \neq 0$ (endlich) existiert;

$$\theta_0 = (n-1)^{n/(n-2)} \exp \left[-\frac{2(n-1)}{n-2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \frac{3n}{2(n-2)} \right],$$

falls es ein K derart gibt, daß $\lim_{h \rightarrow 0} [f^{(n)}(h) - K \log h]$ (endlich) existiert;

$\theta_{\infty} = 1$, falls für ein N $\lim_{h \rightarrow 0} [f^{(n)}(h) - N] e^{1/h} \neq 0$ (endlich) existiert [vgl. S. Sokolowski, Tôhoku Math. J. 29, 177–191 (1928)].

$\lim_{h \rightarrow 0} \theta(x, h) = \theta_r$ auch, falls $f^{(n+r)}(0) \neq 0$ existiert. θ_r ändert sich stetig mit r von θ_{-1} bis $\theta_{\infty} = 1$. Ist $f^{(n+r)}(0)$ die erste nichtverschwindende Ableitung von $f(x)$ in $x=0$ und $f(x)$ auch für $0 \leq x \leq h$ $(n+r)$ -mal ableitbar, so wird $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}[\theta(x, h) h]}{f^{(n)}(h)} = \theta_r^*$. J. Aczél.

Darbo, Gabriele: Una estensione del secondo teorema della media. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 5, 151—160 (1951).

Für $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ sei $Q(x, y)$ für fast alle y nicht fallend in x , für alle x über $[c, d]$ summierbar nach y ; ferner sei $y(x)$ eine in $[a, b]$ absolut-stetige Funktion mit $c \leq y(x) \leq d$ für $a \leq x \leq b$, und schließlich sei $Q(x, y(x)) y'(x)$ meßbar und summierbar über $[a, b]$. Dann gibt es ein ξ mit $a \leq \xi \leq b$ und

$$\int_a^b Q(x, y(x)) y'(x) dx = \int_{y(a)}^{y(\xi)} Q(a, \eta) d\eta + \int_{y(\xi)}^{y(b)} Q(b, \eta) d\eta.$$

Ist $Q(x, y)$ unabhängig von y , so stellt diese Gleichung im wesentlichen den zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung dar.

Georg Aumann.

Calderón, A. P. and G. Klein: On an extremum problem concerning trigonometrical polynomials. Studia math. 12, 166—169 (1951).

Als Erweiterung eines Satzes von Erdős (dies. Zbl. 21, 17) wird bewiesen: die feste, für $x \geq 0$ definierte Funktion $\varphi(x)$ sei nicht-konstant und nicht-negativ, und $(\varphi(x) - \varphi(0))/x$ sei nicht-abnehmend; unter $S(t)$ irgendein trigonometrisches

Polynom n -ten Grades mit $|S(t)| \leq 1$ verstanden, wird das Integral $\int_0^{2\pi} \varphi(|S'(t)|) dt$ maximal für $S(t) = \cos(nx + a)$ und nur für dieses.

H. Tietz.

Kuhn, H. W. and A. W. Tucker: Nonlinear programming. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 481—492 (1951).

Let $\Phi(x, u) = \Phi(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m)$ be a differentiable function defined for $x_i \geq 0$ and $u_h \geq 0$ and $g(x) = g(x_1, \dots, x_n)$, $f_h(x) = f_h(x_1, \dots, x_n)$ ($h = 1, \dots, m$) differentiable functions defined for $x \geq 0$. The following problems are considered: Saddle Value Problem (SVP): Find nonnegative values x_i^0 and u_h^0 such that $\Phi(x, u^0) \leq \Phi(x^0, u^0) \leq \Phi(x^0, u)$ for all $x_i \geq 0$, $u_h \geq 0$. Maximum Problem (MP): Find an x^0 that maximises $g(x)$ subject to $f_h(x) \geq 0$, $x \geq 0$ with a mild qualification. Taking partial derivatives evaluated at a point $(x^0, \dots, x_n^0; u_1^0, \dots, u_m^0)$, the following conditions are introduced: (1) $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)^0 \leq 0$ and $x_i^0 \geq 0$ for all i , $\sum_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)^0 x_i^0 = 0$.

(2) $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_h}\right)^0 \geq 0$ and $u_h^0 \geq 0$ for all h , $\sum_h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_h}\right)^0 u_h^0 = 0$. (3) $\Phi(x, u^0) \leq \Phi(x^0, u^0) + \sum_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)^0 (x_i - x_i^0)$

for all $x_i \geq 0$, $u_h \geq 0$. (4) $\Phi(x^0, u) \geq \Phi(x^0, u^0) + \sum_h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_h}\right)^0 (u_h - u_h^0)$ for all $x_i \geq 0$, $u_h \geq 0$.

The authors prove the following theorems: (A). (1) and (2) are necessary, (1)–(4) are sufficient for x^0, u^0 to be a solution of SVP. (B). Put $\Phi(x, u) = g(x) + \sum_h u_h f_h(x)$. For x^0 to be a solu-

tion of MP, it is necessary that all x_i^0 and some u_h^0 satisfy (1)–(2), and it is sufficient that they satisfy (1)–(3). (C) (Equivalence Theorem.) If all $f_h(x)$ and $g(x)$ are also concave for $x \geq 0$ [i. e. $(1-\theta)f(x_1) + \theta f(x_2) \leq f((1-\theta)x_1 + \theta x_2)$ for $0 \leq \theta \leq 1$ and all x_1 and $x_2 \geq 0$], then x^0 is a solution of MP if and only if x_i^0 and some u_h^0 are a solution of SVP for $\Phi(x, u) = g(x) + \sum_h u_h f_h(x)$. Special cases considered are the Quadratic MP, where it is required to find an x^0 which maximises $g(x) = \sum_i c_i x_i - \sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j$ subject to $f_h(x) = b_h - \sum_{i,j} a_{hij} x_i x_j - \sum_{i,j} a_{hij} x_i x_j \geq 0$, $x_i \geq 0$ and the problem of Linear Programming (Linear MP) which arises when all a_{ij} and all a_{hij} are zero. There are also considered extensions of these problems, called „Vector Maximum Problem“ and „Minimum Component Maximum Problem“. Stefan Vajda.

Kuźmina, A. L.: Über eine Klasse quasi-analytischer Funktionen mehrerer Veränderlicher. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 853–856 (1951) [Russisch].

$C_{\{m_n\}}$ sei die Menge aller Funktionen, die in einem k -dimensionalen abgeschlossenen Gebiet G definiert und unendlich oft differenzierbar sind und für die eine Konstante K existiert, so daß in G :

$$\left| \frac{\partial^n f(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_k^{p_k}} \right| \leq K^n m_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

gilt. Die Funktionsklasse $C_{\{m_n\}}$ heiße Δ -quasi-analytisch, wenn für die Funktionen von $C_{\{m_n\}}$ aus

$$\frac{\partial^n f(x_1^0, \dots, x_k^0)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_k^{p_k}} = \frac{\partial^n \varphi(x_1^0, \dots, x_k^0)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_k^{p_k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \text{ folgt } f(x_1, \dots, x_k)$$

$\equiv \varphi(x_1, \dots, x_k)$ in G . Verf. beweist: Dann und nur dann ist $C_{(mn)}$ Δ -quasi-analytisch, wenn $\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = +\infty$ ist; dabei sei $T(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^n}{m_n}$, $r > 0$. Wenn dies Integral endlich ist, kann eine nicht identisch verschwindende Funktion in $C_{(mn)}$ gefunden werden, für die $\frac{\partial^n f(0, \dots, 0)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_k^{p_k}} = 0$, $n = 0, 1, \dots$, gilt. *Walter Thimm.*

Allgemeine Reihenlehre:

Knödel, W. und L. Schmetterer: Über ein Problem von Herrn Leja betreffend im Mittel monotone Folgen. Publ. math., Debrecen 2, 121–133 (1951).

Une suite à termes réels $\{a_n\}$ est dite décroissante en moyenne s'il existe deux nombres entiers $p \geq 1$ et $q \geq 1$ tels que

$$\frac{a_{k+1} + \dots + a_{k+p}}{p} \geq \frac{a_{k+p+1} + \dots + a_{k+p+q}}{q} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots$$

F. Leja a prouvé [Ann. Soc. Polon. Math. 19, 133–139 (1946)] que lorsque $q = 1$, p étant quelconque, la suite $\{a_n\}$ tend vers une limite finie ou vers $-\infty$. Les AA. examinent le cas général et démontrent quelques propriétés intéressantes de telles suites, p. e.: 1. Lorsque $\liminf a_n > -\infty$ la suite $\{a_n\}$ est convergente si $(p, q) = 1$, mais elle peut être divergente si $(p, q) = s > 1$. 2. Lorsque $\liminf a_n > -\infty$ et $(p, q) > 1$ la suite $\{a_n\}$ est sommable (C, r) pour chaque $r > 0$. — Dans le cas $\liminf a_n = -\infty$ l'ensemble de points d'accumulation de $\{a_n\}$ peut être partout dense dans un intervalle quelconque. — Le travail finit par une proposition sur les suites $\{a_n\}$ remplissant la condition $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{a_{n+1} + \dots + a_{n+q}}{q}$, où $q \geq 1$ et $n = 1, 2, \dots$ *F. Leja.*

Bajraktarević, Mahmud: Sur la convergence de la suite définie par la formule $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 6, 201–208 und französ. Zusammenfassg. 209 (1951) [Kroatisch].

Verf. beweist die bekannte Tatsache: „Ist $f(x)$ stetig und $|f(x)| < |x|$ für $0 < |x| < a$, $|x_0| < a$ und $x_{n+1} = f(x_n)$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ “, und betrachtet noch einige Fälle, in denen mehrere Knotenpunkte $f(x) = x$ vorhanden sind.

J. Karamata.

Bruijn, N. G. de and P. Erdős: Some linear and some quadratic recursion formulas. I. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 374–382, Indagationes math. 13, 374–382 (1951).

Verff. untersuchen die Lösungen f von

$$f(1) = 1; \quad f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k f(n-k) \quad (n = 2, 3, \dots),$$

wo die $c_k > 0$ vorausgesetzt werden, so daß auch $f(n) > 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Es werde $C(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n x^n$, $F(x) = \sum_{n=1}^\infty f(n) x^n$ gesetzt. Es ist dann $F(x) = x + C(x) F(x)$. Es sei γ die obere Grenze aller Zahlen $\alpha \geq 0$ mit $C(\alpha) \leq 1$ und R der Konvergenzradius der Potenzreihe für $C(x)$. Fünf Fälle werden unterschieden: 1. $\gamma = R = 0$; 2. $0 < \gamma < R \leq \infty$, $C(\gamma) = 1$; 3. $0 < \gamma = R < \infty$, $C(\gamma) = 1$, $0 < C'(\gamma) < \infty$; 4. $0 < \gamma = R < \infty$, $C(\gamma) = 1$, $C'(\gamma) = \infty$; 5. $0 < \gamma = R < \infty$, $0 < C(\gamma) < 1$. Verff. zeigen zunächst, daß $\lim \{f(n)\}^{-1/n}$ immer existiert (sogar in einem allgemeineren Fall, wo die c_k noch von n abhängen) und $= \gamma$ ist. Komplizierter ist die Frage nach der Existenz von $\lim f(n)/f(n+1)$, der dann ebenfalls $= \gamma$ ist, was in den Fällen 2. und 3. immer zutrifft, nicht immer aber in den übrigen Fällen. Es sei $\alpha = \liminf f(n)/f(n+1)$; $\beta = \limsup f(n)/f(n+1)$. Verff. geben ein

Beispiel, wo $\beta > \alpha = 0$ ist. Eine hinreichende Bedingung für $\alpha > 0$ ist $\sum c_k/f(k) < \infty$. Im 5. Fall ist aber $\sum c_k/f(k) = \infty$. Verff. zeigen noch, daß in den Fällen 2, 3 und 4 immer $c_n = o\{f(n)\}$ ist, falls entweder $\lim f(n)/f(n+1)$ oder $\lim c_{n+1}/c_n$ existiert. Für die Fälle 2, 3, 4 und 5 geben sie zwei zugleich notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von $\lim f(n)/f(n+1)$. In diesen 4 Fällen sind folgende Bedingungen (jede für sich) hinreichend: a) $\lim c_n/c_{n+1} = \gamma$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma c_n - c_{n-1}| \{f(n)\}^{-1} < \infty$; c) $\sum c_n/f(n) < \infty$; d) $c_{n+1} c_{n-1} \geq c_n^2$ ($n > 1$), a) und d) auch im Fall 1.

Hendrik Douwe Kloosterman.

R.-Salinas, Baltasar: Über eine meromorphe Funktion und ihre Anwendung auf die Summierung von Reihen. *Gac. mat., Madrid* 3, 6–17 (1951) [Spanisch].

Verf. beweist zunächst u. a., daß die meromorphe Funktion $G(z) = \frac{1}{z} +$

$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu} \right)$, welche sich mit Hilfe der Gammafunktion $\Gamma(z)$ auch in der Form $G(z) = -C - \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, C Eulersche Konstante, schreiben läßt, folgende Eigenschaften hat: 1. $\frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m G\left(\frac{z+\nu-1}{m}\right) = G(z) + \log m$, 2. $G(z) - G(1-z) =$

$\pi \cot \pi z$, woraus man z. B. $\sum_{\nu=1}^m \cot \frac{(z+\nu-1)\pi}{m} = m \cot \pi z$ herleiten kann. —

Hierauf verwendet Verf. die Funktion $G(z)$ und ihre Ableitungen, um Ausdrücke für die Summen konvergenter Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(\nu)$ zu erhalten, wobei $\varphi(z)$ in der abgeschlossenen Gaußschen Zahlenebene bis auf endlich viele im Endlichen gelegenen und von 0, 1, 2, ... verschiedenen Singularitäten regulär ist und außerdem auf der Berandung Q_n des Quadrates $-(n + \frac{1}{2}) \leq \Re\{z\}$, $\Im\{z\} \leq n + \frac{1}{2}$ für hinreichend großes n die Abschätzung $|\varphi(z)| < A/n^{1+q}$ gilt, worin A und q positive, von n unabhängige Konstanten sind. Zu diesem Zwecke betrachtet Verf. das Integral $I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_n} G(-z) \varphi(z) dz$ und erhält hieraus durch Grenzübergang

$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(\nu) = \sum_{n=1}^p R a_n$, wobei a_1, a_2, \dots, a_p die singulären Stellen von $\varphi(z)$ sind und $R a_n$ das Residuum von $G(-z) \varphi(z)$ im Punkte a_n bedeutet. Schließlich summiert Verf. noch die beiden Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(\nu) \cos 2\nu\pi t$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(\nu) \sin 2\nu\pi t$, $0 \leq t \leq 1$, wobei $\varphi(z)$ die oben angegebenen Bedingungen erfüllen soll, und betrachtet insbesondere die beiden Spezialfälle $\varphi(z) = z^{-2p}$ und $\varphi(z) = z^{-(2p+1)}$, p natürliche Zahl.

Ernst Lammel.

Slater, L. J.: A new proof of Rogers's transformations of infinite series. *Proc. London math. Soc., II. Ser.* 53, 460–475 (1951).

Verf. beweist auf einfache Weise die Identitäten von Rogers [*Proc. London math. Soc., II. Ser.* 16, 315–336 (1917)] und Ramanujan. Die Beweise beruhen auf dem folgenden Satz von Bailey: Unter geeigneten Konvergenz Voraussetzungen gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \gamma_n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta_n$, wobei $\gamma_n = \sum_{r=n}^{\infty} \delta_r u_{r-n} v_{r+n}$, $\beta_n = \sum_{r=0}^n \lambda_r u_{n-r} v_{n+r}$, u_i, v_i beliebig. Durch die systematische Art der Ableitung ergeben sich auch neue Identitäten, von denen wir die folgende herausgreifen:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q) \cdots (1-q^{2n})} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{30n-16}) (1 + q^{30n-14}) (1 - q^{30n}) - q^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{30n-26}) (1 + q^{30n-14}) (1 - q^{30n}).$$

Karl Prachar.

Mikusiński, J. G.: On generalized power-series. *Studia math.* **12**, 181—190 (1951).

L'A. considera nel campo reale la serie di potenze generalizzata $\gamma_0 x^{\beta_0} + \gamma_1 x^{\beta_1} + \dots$ con $x \geq 0$, γ_n costanti reali, e $\{\beta_n\}$ successione crescente e divergente di numeri non negativi. Nell'ipotesi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\beta_n} = 0$ estende a tale serie il teorema di Cauchy-Hadamard sul raggio di convergenza. — In particolare l'A. studia la serie a segni alternati $1 - \alpha_1 x^{\beta_1} + \alpha_2 x^{\beta_2} - \dots$, ove gli α_n sono numeri positivi ed espressioni note dei β_n , provando che se $\beta_1 > 0$ e se per $n = 1, 2, \dots$, $\beta_{n+1} - \beta_n > \varepsilon$, $|\beta_n - pn| < q$, con ε, p, q costanti positive, allora la serie converge per $x \geq 0$ a una funzione continua $f(x)$ che nell'intervallo $0 \leq x < +\infty$ decresce da 1 a zero.

È provato inoltre che l'integrale $\int_0^{+\infty} x^{p-1} f(x) dx$ converge per $p > 0$ a una espressione nota dei β_n e di p . C. Pucci.

Tsushikura, Tamotsu: On asymptotically absolute convergence. *Tôhoku math. J.*, II. Ser. **3**, 203—207 (1951).

Una serie (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a termini reali, è chiamata dall'A. asintoticamente assolutamente convergente se esiste una successione di numeri interi $\{n_k\}$ tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n_k} = 1$, e la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ risulti assolutamente convergente. — L'A. prova il seguente teorema di tipo tauberiano: Se la serie (1) è asintoticamente assolutamente convergente e se è soddisfatta una almeno delle seguenti tre condizioni: i) $\{a_n\}$ è una successione monotona; ii) $|a_{n+1}| < (1 + c/n) |a_n|$, ($n \geq n_0$) dove c e n_0 sono due costanti indipendenti da n ; iii) esiste una costante B tale che qualunque sia l'intero N risulta $\sum_{n=1}^{N-1} n |a_n| - |a_{n+1}| + N |a_N| \leq B \sum_{n=1}^N |a_n|$, allora la serie (1) converge assolutamente. — Passando alle serie trigonometriche l'A. prova che se una delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ è assolutamente convergente in un punto $x = k\pi$, con k irrazionale, allora la serie (1) è asintoticamente assolutamente convergente. Giovanni Sansone.

Jurkat, W.: Über Rieszsche Mittel mit unstetigem Parameter. *Math. Z.* **55**, 8—12 (1951).

Ist $\kappa > 0$ und $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, so wird der Reihe (1) $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ beim Rieszschen Summierungsverfahren die Funktion

$$(2) \omega^{-\kappa} A^{\kappa}(\omega) = \omega^{-\kappa} \sum_{\lambda_{\nu} < \omega} (\omega - \lambda_{\nu})^{\kappa} a_{\nu} = \omega^{-\kappa} \kappa \int_0^{\omega} (\omega - \tau)^{\kappa-1} A(\tau) d\tau \quad \left(A(\tau) = \sum_{\lambda_{\nu} < \tau} a_{\nu}; \omega > 0 \right)$$

zugeordnet; Summierbarkeit von (1) zum Wert s bedeutet Konvergenz von (2) gegen s für $\omega \rightarrow \infty$. Es dreht sich nun um die Frage, ob es von Bedeutung ist, daß bei dem Grenzübergang $\omega \rightarrow \infty$ in (2) das ω stetig gegen ∞ strebt [„stetiges Verfahren“: $R^{\kappa}(\lambda)$], oder ob man ω auf die Werte λ_n beschränken kann („unstetiges Verfahren“: R^{κ}_λ). Im Falle $\lambda_n = n$ ist für $0 < \kappa \leq 1$, dagegen nicht mehr allgemein für $\kappa > 1$, das stetige Verfahren $R^{\kappa}(n)$ mit dem unstetigen R^{κ}_n äquivalent [M. Riesz, *Proc. London math. Soc.*, II. Ser. **22**, 412—419 (1923); G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford 1949 (dies. Zbl. **32**, 58), p. 113—114; vgl. ferner R. P. Agnew, dies. Zbl. **6**, 345; G. E. Forsythe, dies. Zbl. **25**, 155]. Verf. zeigt, daß man für $0 < \kappa \leq 1$ auch bei allgemeinem λ_n Äquivalenz hat. Dies lehrt der Fall $\eta(\omega) = \omega$ des folgenden Satzes: Ist $0 < \kappa \leq 1$ und $0 < \eta(\omega) \rightarrow \infty$ für $\omega \rightarrow \infty$, $\eta(\omega)$ und $\omega/\eta(\omega)$ nicht abnehmend, so sind die Konvergenzaussagen $A^{\kappa}(\omega) = o(1)[\eta(\omega)]^{\kappa}$ (für $\omega \rightarrow \infty$) und $A^{\kappa}(\lambda_n) = o(1)[\eta(\lambda_n)]^{\kappa}$ (für $n \rightarrow \infty$) äquivalent. Haupthilfsmittel zum Beweis ist eine Erweiterung des Rieszschen Mittelwertsatzes [M. Riesz, *Acta Univ. Hungar. Szeged* **1**, 114—126 (1923)], welcher für die Funktion $A(\tau)$, deren besondere Bauart dabei keine Rolle spielt, besagt: Ist $0 < \kappa \leq 1$, $0 \leq \xi \leq \omega$, so existiert eine Zahl ξ' ($0 \leq \xi' \leq \xi$), so daß $\left| \kappa \int_0^{\xi} (\omega - \tau)^{\kappa-1} A(\tau) d\tau \right| \leq |A^{\kappa}(\xi')|$. Die Erweiterung des

Verf. (für $\xi = \lambda_n$) lautet: Ist $0 < \kappa \leq 1$, $\lambda_n \leq \omega$, so existiert eine Nummer $n' (0 \leq n' \leq n)$, so daß $\left| \kappa \int_0^{\lambda_n} (\omega - \tau)^{\kappa-1} A(\tau) d\tau \right| \leq |A^*(\lambda_n')|$. Daß $A(\tau)$ die oben definierte Treppenfunktion ist, ist nun wesentlich; ist $0 < \kappa < 1$, so gibt es eine lineare Funktion $A(\tau)$, für die die Aussage falsch wird. Bezüglich der Beweismethode weist Verf. auf den zweiten Beweis hin, den L. S. Bosanquet (dies. Zbl. 28, 219, 32, 404) für ein Analogon zum Riesz'schen Mittelwertsatz bei der Cesàroschen Mittelbildung von Folgen gegeben hat. Vgl. nachsteh. Referat.

Werner Meyer-König.

Jurkat, W. und A. Peyerimhoff: Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z. 55, 92—108 (1951).

Im Anschluß an den bekannten Mittelwertsatz von M. Riesz sind von verschiedenen Autoren analoge Sätze aufgestellt worden (vgl. vorsteh. Referat, ferner den Mittelwertsatz von M. Jacob, Math. Z. 26, 672—682 (1927), für Höldersche Integralmittel). Die Verff. schälen den Kern aller dieser Sätze heraus, indem sie sie aus einem einheitlichen Prinzip ableiten. Es

sei $A = (a_{nv})$ eine Dreiecksmatrix, die der Folge s_n die Folge $\sigma_n = \sum_{v=0}^n a_{nv} s_v$ zuordnet.

1. Besitzt A die Eigenschaften (M_1) $a_{nv} \neq 0$, $0 \leq a_{mv}/a_{nv} \leq K$ ($0 \leq v \leq n \leq m$; K eine Konstante) und (M_2) $a_{m,v-1}/a_{n,v-1} \geq a_{mv}/a_{nv}$ ($1 \leq v \leq n \leq m$), so gibt es zu s_n und $n \leq m$ ein

$n' (0 \leq n' \leq n)$, so daß $\left| \sum_{v=0}^n a_{mv} s_v \right| \leq |\sigma_{n'}| a_{m0}/a_{n'0} \leq K |\sigma_{n'}|$. Man kann dann also ein Stück

der Transformation durch die ganze Transformation abschätzen, was für viele Anwendungen brauchbar ist. Aus 1. und einem ganz analogen Satz 2. für Integraltransformationen $\sigma(x) =$

$\int_0^x a(x, t) s(t) dt$ folgen direkt die oben angegebenen Mittelwertsätze (jedenfalls im wesentlichen)

und noch weitere. Zur Beweismethode von 1. und 2. vgl. das im vorsteh. Referat über den Mittelwertsatz von W. Jurkat Gesagte. Die (M_1) und (M_2) erfüllenden Matrizen bilden eine Klasse von Matrizen, die sich durch mancherlei angenehme Eigenschaften auszeichnen. 3. Ist z. B. die weitere Voraussetzung (Sp_0) $a_{nv} \rightarrow 0$ ($v = 0, 1, \dots$ fest, $n \rightarrow \infty$) erfüllt, so folgt aus

$\sigma_n = o(1)$ für $n \rightarrow \infty$, daß, gleichmäßig für alle $0 \leq n \leq m$, $\sum_{v=0}^n a_{mv} s_v = o(1)$ für $m \rightarrow \infty$.

Mit der Transformation selbst strebt dann also auch jedes Teilstück gegen Null. 4. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in 3. folgt aus $\sigma_n = o(1)$, daß $s_n = o(1)/a_{nn}$ ($n \rightarrow \infty$); die Behauptung läßt sich nicht verschärfen. — Die Verff. behandeln weiter Probleme über Summierbarkeitsfaktoren (dazu und wegen Bezeichnungen vgl. nachsteh. Referat). Der zu A gehörigen

Transformation $\sigma_n = \sum_{v=0}^n a_{nv} s_v = \sum_{v=0}^n a_{nv} a_v$ mit $s_n = \sum_{v=0}^n a_v$ entspricht das Verfahren A

zur Limitierung von Folgen s_n bzw. Summierung von Reihen $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$. Eine Rolle spielen Matrizen

A , für die der Mittelwertsatz gilt, genauer, die folgende Eigenschaft \mathfrak{M} besitzen: zu jeder Folge s_v und $m \geq n$ gibt es $n' (0 \leq n' \leq n)$, so daß $\left| \sum_{v=0}^n a_{mv} s_v \right| \leq K \left| \sum_{v=0}^{n'} a_{n'v} s_v \right|$. Nach 1. hat A

die Eigenschaft \mathfrak{M} , wenn (M_1) und (M_2) für A erfüllt sind. Im folgenden sei A normal, und das Verfahren A sei permanent. A besitzt genau dann die Eigenschaft \mathfrak{M} , wenn SAK in $A(f, n)$ vorhanden ist. Dadurch wird die Brücke geschlagen zwischen dem Mittelwertsatz und den Summierbarkeitsfaktoren. In der im nachsteh. Referat besprochenen Arbeit hat A. Peyerimhoff die $(A, B)_r$ - und die $(A, B)_r$ -Faktoren gekennzeichnet. Bei den $(A, B)_r$ -Faktoren ist eine Vereinfachung der Bedingungen wünschenswert. Eine solche wird jetzt in den Fällen $B = C$ bzw. $B = A$ geleistet (C = Verfahren der gewöhnlichen Konvergenz), wobei noch vorausgesetzt wird, daß \mathfrak{M} für A gilt: 5. Die Reihe $\sum a_v e_v$ ist genau dann konvergent für alle A -summierbaren Reihen $\sum a_v$ wenn $e_n = O(a_{nn})$ ist und (*) wenn es α und $\sum \alpha_n$ mit $\sum |\alpha_n| < \infty$ gibt, so daß

$e_v = \alpha + \sum_{n=v}^{\infty} \alpha_n \bar{a}_{nv}$ [$(A, C)_r$ -Faktoren]; 6. die Reihe $\sum a_v e_v$ ist genau dann A -summierbar für alle A -summierbaren Reihen $\sum a_v$, wenn (*) gilt [$(A, A)_r$ -Faktoren]. Für $0 < \kappa \leq 1$ be-

sitzen die Verfahren R_λ^κ (vgl. das vorangehende Referat) die Eigenschaft \mathfrak{M} . Daher liefern für diesen Fall die Peyerimhoffsche Kennzeichnung der $(A, B)_r$ -Faktoren und 5. und 6. eine Kennzeichnung der $(R_\lambda^\kappa, B)_r$ - und der $(R_\lambda^\kappa, C)_r$ -Faktoren, ferner der $(R_\lambda^\kappa, B)_r$ -Faktoren für den Fall $B \supseteq R_\lambda^\kappa$. In gleicher Weise direkt oder durch die Spezialisierung $\lambda_n = n$ erhält man Summierbarkeitsfaktoren bei den Cesàroschen Verfahren C_κ ($0 < \kappa \leq 1$). Andere Verhältnisse herrschen für $\kappa > 1$. Die Verff. kennzeichnen die $(R_n^\kappa, C)_r$ -Faktoren und geben hinreichende Bedingungen für $(R^2(n), C)_r$ -Faktoren. Vgl. W. Jurkat, dies. Zbl. 42, 294. Werner Meyer-König.

Peyerimhoff, Alexander: Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z. 55, 23—54 (1951).

Folgende Frage wird mit Hilfsmitteln der Funktionalanalysis behandelt: Welche Bedingungen muß die Folge ε_ν erfüllen, damit, wenn A und B vorgegebene Limitierungsverfahren bedeuten, für jede A -limitierbare Folge s_ν die Reihe $\sum \varepsilon_\nu s_\nu$ B -summierbar ist, bzw. damit für jede A -summierbare Reihe $\sum a_\nu$ die Reihe $\sum \varepsilon_\nu a_\nu$ B -summierbar ist. — Im folgenden sollen alle Zahlen reell sein. Die Matrix $A = (a_{t\nu})$ ($t \in T$, T eine Punktmenge mit dem Häufungspunkt t_0 ;

$\nu = 0, 1, \dots$; gewöhnliche Matrix: $t = 0, 1, \dots$) heißt FF-permanent, wenn $A_t(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{t\nu} a_\nu$ für alle konvergenten Folgen $a = \{a_\nu\}$ und alle $t \in T$ existiert und dabei $\lim_{t \rightarrow t_0} A_t(a) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu$

ist; zu A gehört das Verfahren A zur Limitierung von Folgen a_ν . A heißt RF-permanent, wenn $A_t(a)$ existiert für alle Folgen a mit konvergenter summatorischer Folge und dabei

$\lim_{t \rightarrow t_0} A_t(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ ist; zu A gehört dann das Verfahren A zur Summierung von Reihen

$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$. Mit $A(f, c)$ [bzw. $A(r, c)$] wird bezeichnet das Wirkfeld einer FF-(bzw. RF-)permanenten

Matrix A , d. h. die Gesamtheit der Folgen a , für die $A_t(a)$ und $\lim_{t \rightarrow t_0} A_t(a)$ existieren; $A(f, n)$

soll die Teilmenge von $A(f, c)$ mit $\lim_{t \rightarrow t_0} A_t(a) = 0$ bedeuten. Diese Wirkfelder können als

Vektorräume im Sinne der Funktionalanalysis [vgl. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932; dies. Zbl. 5, 209] aufgefaßt werden. Von den vorkommenden Matrizen werden noch gewisse Zusatzbedingungen (Z) verlangt, die z. B. bei normalen Matrizen (gewöhnlichen Dreiecksmatrizen mit nicht verschwindenden Diagonalgliedern) erfüllt sind. Dann ist $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ mit der Norm $\|a\| = \sup_{t \in T} |A_t(a)|$ ein Banach-Raum, dessen lineare (d. h. addi-

tive, homogene und stetige) Funktionale sich bei normalem A vollständig angeben lassen. Ist A eine FF- bzw. RF-permanente Matrix, B eine RF-permanente Matrix (nicht notwendig mit (Z)), so heißen die ε_ν ($\nu = 0, 1, \dots$) $(A, B)_f$ - bzw. $(A, B)_r$ -Summierbarkeitsfaktoren, wenn für alle $\{a_\nu\} \in A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ stets $\{a_\nu \varepsilon_\nu\} \in B(r, c)$. Grundlegend ist der folgende Satz (1): Damit die ε_ν $(A, B)_f$ - bzw. $(A, B)_r$ -Faktoren sind, ist notwendig, daß es in $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$ gibt, so daß (Funktionalbedingung F) $\varepsilon_n = f(e^{(n)})$ für $n = 0, 1, \dots$ ist. Dabei ist $e^{(n)}$ die Folge, deren n -tes Glied 1 ist, während die übrigen Glieder verschwinden; ferner ist noch vorauszusetzen, daß in $A(f, c)$ gliedweise Konvergenz vorhanden ist, d. h. daß für $n \rightarrow \infty$ aus $x^{(n)} = \{x_\nu^{(n)}\} \in A(f, c)$, $\|x^{(n)}\| \rightarrow 0$ folgt $x_\nu^{(n)} \rightarrow 0$ für jedes feste ν [analog für $A(r, c)$; z. B. ist sicher dann die gliedweise Konvergenz vorhanden, wenn A eine gewöhnliche Matrix ist]. — Die weiteren Untersuchungen knüpfen an (F) an. Als $f(a)$ in (1) kann

$f(a) = \lim_{t \rightarrow t_0} B_t(a, \varepsilon)$ mit $B_t(a, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} \varepsilon_\nu a_\nu$ genommen werden. Frage: Wenn zu $(A, B)_f$ -

Faktoren ε_ν in $A(f, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$ vorliegt, das (F) erfüllt, ist dann $\lim_{t \rightarrow t_0} B_t(a, \varepsilon)$

$= f(a)$ für alle $a \in A(f, c)$? Diese Frage, auch für $A(r, c)$, läßt sich (im wesentlichen positiv) beantworten für perfekte Matrizen. Die Perfektheit wird für FF-permanente Matrizen im Anschluß an S. Banach, ferner für RF-permanente Matrizen definiert, und es werden Bedingungen für die Perfektheit studiert. — Bei der weiteren Frage, wann (F) hinreichend dafür ist, daß die ε_ν $(A, B)_f$ - bzw. $(A, B)_r$ -Faktoren sind, sind die Begriffe Abschnittskonvergenz (AK) und schwache AK (SAK) von Bedeutung. X sei ein normierter Raum mit Folgen $x = \{x_\nu\}$ als Elementen;

X hat die Eigenschaft AK, wenn für jedes $x \in X$ gilt: $x^{(k)} = \sum_{\nu=0}^k x_\nu e^{(\nu)} \rightarrow x = \{x_\nu\}$ für $k \rightarrow \infty$;

X hat die Eigenschaft SAK, wenn für jedes lineare Funktional $f(x)$ in X und für jedes $x \in X$ gilt: $f(x^{(k)}) - x \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$; AK hat SAK zur Folge. Hier kann nur eines der Hauptergebnisse genannt werden: A sei FF-permanent, in $A(f, c)$ sei gliedweise Konvergenz, in $A(f, n)$ sei SAK vorhanden; die ε_ν sind genau dann $(A, B)_f$ -Faktoren, wenn es in $A(f, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$ gibt, so daß (F) gilt. Zu beachten ist, daß die Bedingung für die ε_ν von B unabhängig

ist; ist sie erfüllt, so hat man Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ für $a \in A(f, c)$. Spezieller: A sei FF-permanent und normal, in $A(f, n)$ sei SAK vorhanden; die ε_ν sind genau dann $(A, B)_f$ -Faktoren,

wenn es eine Folge $\{\alpha_n\}$ gibt mit $\sum |\alpha_n| < \infty$, so daß $\varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu}$ ($\nu = 0, 1, \dots$). — Verf.

gibt Anwendungen auf das Cesàrosche Verfahren. Ist C_∞ die FF-permanente Matrix desselben, so ist $C_\infty(f, n)$ für $0 < \alpha \leq 1$ ein Raum mit SAK (für $\alpha > 1$ aber nicht). Dies ermöglicht für

$0 \leq \kappa \leq 1$ die Angabe von $(C_\kappa, B)_r$ -Faktoren (vgl. dazu L. S. Bosanquet, dies. Zbl. 32, 404; K. Knopp, dies. Zbl. 34, 185; G. G. Lorentz, dies. Zbl. 30, 148). Anwendungen auf die Verfahren der bewichteten arithmetischen Mittel und auf Nörlundsche Verfahren folgen. Eingehend werden schließlich noch die Räume $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$ behandelt ($R_{\lambda k}$ das Rieszsche Verfahren). — Wegen der verwendeten Methoden, über AK und über Limitierbarkeitsfaktoren vgl. auch K. Zeller, Math. Z. 53, 463–487 (1951); 55, 55–70 (1952). Vgl. ferner vorsteh. Referat.
Werner Meyer-König.

Teghem, J.: Sur des transformations de séries, à deux paramètres. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 970–976 (1951).

Die Matrizen $A(\alpha, \alpha')$, $B(\alpha, \alpha')$, $C(\alpha, \alpha')$ mit den Elementen $a_{nk} = \binom{k}{n} \alpha^k - n(\alpha')^n$, $b_{nk} = \binom{n}{k} (1 - \alpha') (\alpha')^{n-k} \alpha^k$, $c_{nk} = \binom{n+k}{k} (1 - \alpha') \alpha^k (\alpha')^n$, die zusammen mit den zugehörigen Summierungsverfahren von P. Vermes (dies. Zbl. 42, 293) untersucht wurden, gehen für $\alpha' = 1 - \alpha$ in bekannte Matrizen $P(\alpha)$, $E(\alpha)$, $\Pi(\alpha)$ über (wegen P und Π vgl. auch Verf., dies. Zbl. 40, 320; 43, 63). Verf. stellt fest, daß für $g = \alpha/(\alpha + \alpha')$, $h = \alpha + \alpha'$ die $A(\alpha, \alpha')$ -Transformation von $\sum_0^\infty u_n$ zusammenfällt mit der $P(g)$ -Transformation von $\sum_0^\infty u_n h^n$, und für $g = 1 - \alpha'$, $h = \alpha/(1 - \alpha')$ die $B(\alpha, \alpha')$ - bzw. $C(\alpha, \alpha')$ -Transformation von $\sum_0^\infty u_n$ mit der $E(g)$ - bzw. $\Pi(g)$ -Transformation von $\sum_0^\infty u_n h^n$. Verf. diskutiert Folgerungen und Möglichkeiten der Verallgemeinerung von A, B, C , die sich dadurch ergeben, daß für g und h allgemeinere Funktionen von α und α' genommen werden, oder daß man den Übergang von P, E, Π zu $P^{(-m)}, E^{(m)}, \Pi^{(m)}$ auf A, B, C überträgt. — Verf. schließt mit einer Ergänzung einer früheren Note (dies. Zbl. 35, 338). Das dort behandelte Fortsetzungsverfahren wird in neuer Richtung ausgedehnt.

Werner Meyer-König.

Rechard, O. W.: A note on the summability of infinite series by sequence to sequence and series to sequence transformations. Proc. Amer. math. Soc. 2, 730–731 (1951).

Den Matrixtransformationen, welche Folgen in Folgen überführen (F-F-Transformationen), werden die Matrixtransformationen, welche Reihen in Folgen überführen (R-F-Transformationen) gegenübergestellt. Um eine von C. N. Moore vertretene Auffassung (vgl. Einleitung zu Summable series and convergence factors, New York 1938, dies. Zbl. 19, 18), die R-F-Transformationen seien in gewissem Sinne den F-F-Transformationen überlegen, richtigzustellen, zeigt Verf.: $B = (b_{ij})$ sei eine reguläre R-F-Transformation, welche irgendeine divergente Reihe mit beschränkten Teilsummen summiert; dann ist die F-F-Transformation $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = b_{ij} - b_{ij+1}$ regulär, und eine divergente Reihe mit beschränkten Teilsummen wird durch B dann und nur dann zum Wert T summiert, wenn sie durch A zum Wert T summiert wird.

Viktor Garten.

Vanderburg, B.: Certain linear combinations of Hausdorff summability methods. Trans. Amer. math. Soc. 71, 466–477 (1951).

Let C^α and H^α denote the Cesàro- and Hölder summability methods of order α . They are known to be regular for $\alpha = 0$ and $\Re(\alpha) > 0$. The following results are proved: I. The two methods $H^{\alpha+1}$ and $[C^\alpha - \Gamma(\alpha + 1)H^\alpha] [1 - \Gamma(\alpha + 1)]^{-1}$ are equivalent for $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. II. The two methods $C^{\alpha+\beta+1}$ and $[\Gamma(\alpha + \beta + 1)C^\alpha C^\beta - \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)C^{\alpha+\beta}] [(\Gamma\alpha + \beta + 1) - \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)]^{-1}$ are equivalent for real α, β , $\alpha + \beta (> -1)$ and $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Some more equivalence relations are established between similar combinations of Riesz methods of summability. All these methods are considered as special Hausdorff methods

generated by their moment sequences $\{T(n)\}$ of suitable Mellin transforms $T(z) = \int_0^1 t^z d\varphi(t)$, where $T(z)$ is regular for $\Re z > 0$. The proofs are based on the known relationship between the „strength“ of a Hausdorff method and the distribution of the zeros of $T(z)$ in $\Re z > 0$ (Compare W. W. Rogosinski, this Zbl. 28, 216). In part, numerical computations are employed. W. W. Rogosinski.

Sunouchi, Gen-ichiro: On a theorem of Hardy-Littlewood. *Kōdai math. Sem. Reports* 1951, 52—54 (1951).

Es sei S_n^p die bei der Cesàroschen Summierung (Ordnung $p > -1$) von $\sum_0^\infty a_n$ auftretende Summe $\sum_{v=0}^n \binom{n-v+p}{n-v} a_v$. Ist dann $\beta > 0$ und $S_n^p = o(n^{p+\beta})$ für $n \rightarrow \infty$, so ist $\sum n^{-\beta} a_n$ entweder C_p -summierbar oder aber für keine Ordnung C -summierbar. Für $p = 0, 1, \dots$ wurde dies von G. H. Hardy und J. E. Littlewood [Proc. London math. Soc., II. Ser. 11, 411—478 (1913)], für $p > -1$ von A. Zygmund [Bull. Acad. Polon. 1927, 309—331] bewiesen. Verf. gibt einen neuen, an eine Methode von L. S. Bosanquet (dies. Zbl. 32, 404) anschließenden Beweis und knüpft daran einige in gleicher Richtung liegende Bemerkungen, die eine Anwendung auf Fourierreihen umfassen, an. Werner Meyer-König.

Jesmanowicz, L.: On the Cesàro means. *Studia math.* 12, 145—158 (1951).

Verf. beweist einige Sätze über Konvergenzfaktoren. σ_n^α seien die (C, α) -Mittel der Reihe $\sum a_n$. Satz 1: Ist $\sigma_n^\alpha = o(n^\beta)$, $\alpha > -1$, $\alpha + \beta > -1$, so ist $\sum a_n v^{-\beta-\varepsilon}$ $(C, \alpha - \varepsilon)$ -summierbar für $0 < \varepsilon < \alpha + 1$ (zu einem explizit angegebenen Werte). Satz 2 behandelt den Fall $\varepsilon = 0$: $\sum a_n v^{-\beta}$ ist entweder (C, α) -summierbar oder von keiner Ordnung C -summierbar. — Ähnliche Resultate erhält man für $\sigma_n^\alpha = O(n^\beta)$. Satz 3 und 4: Ist $\sum a_n v^{-\beta}$ ($\beta \geq -1$) (C, α) -summierbar zum Werte Null ($\alpha > -1$), so gilt $\sigma_n^\alpha = s + o(n^\beta)$, wo $s = 0$ ist für $\beta \geq 0$ und im Falle $-1 \leq \beta < 0$ explizit angegeben wird. — Bei den Beweisen verwendet Verf. eine Idee von Zygmund (Bull. internat. Acad. Polon. Sci. Lett., Cl. Sci. math. natur., A 1927, 309—331). Die Sätze erweitern Resultate von Hyslop (dies. Zbl. 19, 302) und Hardy-Littlewood [Proc. London math. Soc., II. Ser. 11, 411—478 (1913)], wo u. a. α als ganz angenommen wird. Karl Zeller.

Bosanquet, L. S.: Note on a theorem of M. Riesz. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. 1, 453—461 (1951).

Verf. befaßt sich mit speziellen Konvergenzfaktoren für die Cesàro-Verfahren. $\eta, \kappa, \sigma, \tau$ seien stets reell. Von M. Riesz [C. r. Acad. Sci., Paris 148, 1658—1660 (1909)], Chapman [Proc. London math. Soc., II. Ser. 9, 369—409 (1911)], Hardy-Riesz [The general theory of Dirichlet's series, Cambridge 1915, Th. 48] und Zygmund [Bull. internat. Acad. Polon. Sci. Lett., Cl. Sci. math. natur. A 1927, 309—331] stammt Satz A: Ist $\kappa > -1$, $0 < \sigma < \kappa + 1$, und $\sum a_n$ (C, κ) -summierbar, so ist $\sum (n+1)^{-\sigma-i\tau} a_n$ $(C, \kappa - \sigma)$ -summierbar. [Für $0 < \sigma \leq \kappa$ ist dies in einem allgemeinen Satz des Verf. (dies. Zbl. 32, 404) enthalten.] Satz A ergibt sich leicht aus dem folgenden Satz B, der mit gewissen Einschränkungen schon von Hyslop (dies. Zbl. 33, 111) bewiesen, vom Verf. jedoch unabhängig gefunden wurde: Satz B: Ist $\kappa > -1$, $0 < \sigma < 1$, und $\sum a_n$ (C, κ) -summierbar, so ist mit einem gewissen c :

$$S^\kappa \left(\sum_{v=0}^n (v+1)^{-\sigma-i\tau} a_v \right) = c \binom{n+\kappa}{n} + o(n^{\kappa-\sigma}).$$

(Dabei ist

$$S^\kappa(u_n) = \sum_{v=0}^n \binom{n-v+\kappa-1}{n-v} u_v$$

gesetzt.) Für beliebige σ und $\tau=0$ bleibt das richtig, wenn $c_j \binom{n+\kappa}{n}$ durch $\sum_{j=0}^{[\sigma]} c_j \binom{n+\kappa-j}{n}$ (mit gewissen c_j) ersetzt wird (Satz C). Für $\tau \neq 0$ sind hier gewisse Ausnahmefälle ($\sigma = 0, 1, \dots$) zu berücksichtigen (Satz D). Ohne Einschränkungen für σ und τ (sonstige Voraussetzungen wie in Satz B) gilt jedoch für jedes $\eta > 0$:

$$S^{\kappa-\eta} \left(\sum_0^n (\nu+1)^{-\sigma-i\tau} a_\nu \right) = \sum_{j=0}^{[\sigma-\eta]} c_j \binom{n+\kappa-\eta-j}{n} + o(n^{\kappa-\sigma})$$

(Satz E). — Ausführliche Literaturangaben. Man vgl. auch Jeśmanowicz (vorst. Referat).

Karl Zeller.

Macphail, M. S.: Some theorems on absolute summability. Canadian J. Math. **3**, 386—390 (1951).

Eine Transformation $y_r = \sum_{k=0}^{\infty} a_{rk} x_k$ heißt ein (l, l) -Verfahren A , wenn aus $\sum |x_k| < \infty$ auch $\sum |y_r| < \infty$ folgt; (l, l) -permanent, wenn dabei überdies $\sum x_k = \sum y_r$ gilt. Die für gewöhnliche Limitierungsverfahren geläufigen Begriffe reversibel, nicht schwächer, verträglich werden in naheliegender Weise für (l, l) -Verfahren definiert. Satz 1: Ein (l, l) -permanentes reversibles Verfahren A ist genau dann mit allen nicht schwächeren (l, l) -permanenten Verfahren B verträglich, wenn außer der „Nullenfolge“ keine beschränkte Folge zu allen Spalten von A orthogonal ist. — [Der Satz wird vom Verf. in einer etwas allgemeineren Form für beliebige (l, l) -Verfahren ausgesprochen.] Einen analogen Verträglichkeitssatz für gewöhnliche Limitierungsverfahren stellte Mazur [Studia math. **2**, 40—50 (1930)] unter Verwendung derselben funktionalanalytischen Methode auf. — Man sieht leicht: Genau dann folgt bei der Transformation A die Beziehung $\sum |y_r| < \infty$ aus „ $\sum x_k z^k$ hat einen Konvergenzradius $> R$ ($R \geq 0$, fest)“, wenn für jedes $\varrho > R$ die Transformation mit der Matrix $\{a_{rk} \varrho^{-k}\}$ ein (l, l) -Verfahren ist. Dies wird in Satz 2 mittels der bekannten Bedingung für (l, l) -Verfahren von Knopp und Lorentz (dies. Zbl. **41**, 184) formuliert. Ein analoger Satz für gewöhnliche Limitierbarkeit stammt von Agnew [Amer. math. Monthly **53**, 251—252 (1946)]. Satz 3 schließlich bringt ein Analogon zu Satz 1 für Verfahren von dem in Satz 2 genannten Typ, wobei sich dieselbe Orthogonalitätsbedingung wie in Satz 1 ergibt. — Beispiele; Anwendungen auf die Euler-Knopp-Verfahren.

Karl Zeller.

Szász, Otto: On a tauberian theorem for Abel summability. Pacific J. Math. **1**, 117—125 (1951).

Eine Voraussetzung (B) bezüglich der Reihe (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist eine Taubersche A-Bedingung (kurz eine TAB), wenn aus der Abel-Summabilität der Reihe (1) und aus der Voraussetzung (B) die Konvergenz der Reihe (1) folgt. 1928 bewies Verf. (J. London math. Soc. **3**, 254—262), daß die Voraussetzung (B_1) der Beschränktheit von $V_n^{(p)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^p |a_k|^p$ eine TAB für $p > 1$, aber nicht für $p = 1$ ist. Ref. bewies 1946 (Acta Sci. Math. **11**, 119—123), daß die Voraussetzung (B_2) der Existenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n^{(1)}$ eine TAB ist. In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. eine Verallgemeinerung dieser beiden Sätze, indem er beweist, daß die Voraussetzung (B_3), daß $V_n^{(1)}$ beschränkt und langsam oszillierend ist (d. h. daß für $n_1 \rightarrow \infty$ und $n_2/n_1 \rightarrow 1$ $V_{n_2}^{(1)} - V_{n_1}^{(1)} \rightarrow 0$ gilt) eine TAB ist. Die Arbeit enthält noch weitere Sätze in derselben Richtung.

Alfréd Rényi.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Gál, István Sándor: Sur la convergence d'interpolations linéaires. II. Corrections et améliorations concernant le cas des fonctions bornées. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 347—350 (1951).

K sei eine abgeschlossene Punktmenge der komplexen Zahlenebene, auf welcher eine Doppelfolge von Punkten $z_k^{(n)}$ mit der Eigenschaft $k_1 \neq k_2$, $n=1, 2, 3, \dots$ und $k=1, 2, 3, \dots, m_n < \infty$. Ist von Funktionen $\omega_k^{(n)}(z)$ definiert ist, wobei $n=1, 2, 3, \dots$ und $k=1, 2, 3, \dots, m_n < \infty$. Ist $f(z)$ eine auf K definierte Funktion, so soll die Folge $A^{(n)}(f, z) = \sum_{k=1}^{m_n} f(z_k^{(n)}) \omega_k^{(n)}(z)$ die zu den Punkten $z_k^{(n)}$ und den Funktionen $\omega_k^{(n)}(z)$ gehörige lineare Interpolation von $f(z)$ heißen. In der vorliegenden Note verallgemeinert Verf. früher erhaltene Ergebnisse (dies. Zbl. 37, 327–328) und spricht sie in vereinfachter Form aus: Zunächst definiert Verf., wann $A^{(n)}(f, z)$ zur Klasse $A(S)$ gehören soll. Ist S eine abgeschlossene Untermenge von K , wobei S auch nur aus einem einzigen Punkte bestehen kann, und konvergiert für jede auf K beschränkte und auf S stetige Funktion $f(z)$ die Folge $\{A^{(n)}(f, z)\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) auf jeder abgeschlossenen Untermenge C von S gleichmäßig gegen $f(z)$, so gehört $A^{(n)}(f, z)$ zur Klasse $A(S)$, wofür folgende Bedingungen notwendig und hinreichend sind:

- (I) Auf S konvergiert gleichmäßig $\sum_{k=1}^{m_n} \omega_k^{(n)}(z) \rightarrow 1$,
 (II) für jeden Punkt von S und $n=1, 2, 3, \dots$ ist $\sum_{k=1}^{m_n} |\omega_k^{(n)}(z)| \leq H < \infty$ und
 (III) $\sum_{k=1}^{m_n} |\omega_k^{(n)}(z)| \rightarrow 0$ gleichmäßig auf S für jedes vorgegebene $\mu > 0$.
 $|z_k^{(n)} - z| > \mu$

Schließlich führt Verf. einen Satz an, den H. Hahn [Math. Z. 1, 115–142 (1918)] zwar nur für reelle Funktionen, aber unter allgemeineren Voraussetzungen bewiesen hat: Gehört $A^{(n)}(f, z)$ zur Klasse $A(z_c)$, so ist $A^{(n)}(f, z)$ im Punkte z_c von endlicher Empfindlichkeit, d. h. es existiert ein $C > 0$, für welches $|A^{(n)}(f, z_c)| < CM$ ist, sobald auf K die Abschätzung $|f(z)| < M$ gilt.

Ernst Lammel.

Gál, István Sándor: Sur le convergence d'interpolations linéaires. III. Fonctions continues. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1001–1003 (1951).

In dieser Note behandelt Verf. die lineare Interpolation (vgl. voranstehendes Referat) nicht für die Klasse der auf einer abgeschlossenen Menge K beschränkten und auf einer abgeschlossenen Untermenge S von K stetigen Funktionen, sondern für die Klasse der auf einer kompakten Menge K stetigen Funktionen $f(z)$. $A^{(n)}(f, z)$ soll zur Klasse $A(S)$ gehören, wenn für jede auf der kompakten Menge K stetige Funktion $f(z)$ $A^{(n)}(f, z)$ auf S gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert, wobei S eine abgeschlossene Untermenge von K ist. Als notwendig und hinreichend dafür, daß $A^{(n)}(f, z)$ zur Klasse $A(S)$ gehört, gibt Verf. drei Bedingungen an, von denen die beiden ersten identisch mit den Bedingungen (I) und (II) vorstehenden Referates sind, während die dritte allgemeiner als (III) ist, wofür ein Beispiel angegeben wird. Die Note schließt mit Hinweisen auf Verallgemeinerungen und Spezialisierungen, z. B. den Fall, daß die Fundamentalfunktionen $\omega_k^{(n)}(z)$, $z = x + iy$, Polynome in x und y sind.

Ernst Lammel.

Obláth, Richard: Une remarque sur les formules de récurrence. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 2, 113–119 und russische Zusammenfassung. 120 (1951).

Sei $\varphi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) G_n(z)$ die Entwicklung der Funktion $\varphi(x, z)$ nach Funktionen $G_n(z)$ (x ein variabler Parameter), wobei an die Art der Konvergenz der Reihe und die Art von R_n und G_n noch gewisse Bedingungen gestellt werden. Verf. schließt unter Annahmen über $\varphi(x, z)$ von Rekursions- und Additionsformeln der $G_n(z)$ auf analoge Formeln der „reziproken“ Funktionen $R_n(x)$. Ist z. B. $\frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial x}$ und $\frac{dG_n(z)}{dz} = \sum_{\nu=-k}^{\nu=k} a_{\nu} G_{n+\nu}(z)$, so gilt auch $\frac{dR_n(x)}{dx} = -\sum_{\nu=-k}^{\nu=k} a_{-\nu} R_{n+\nu}(x)$.

D. Gaier.

Tandori, Károly: Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Reihen. Acta Sci. math. 14, 85–95 (1951).

Sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein Orthonormalsystem in $L^2(a, b)$ und (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ die Entwicklung einer Funktion $f(x) \in L^2(a, b)$. Die C_k -Mittel ($k \geq 0$) von (1) drücken

sich aus in der Form

$$C_k(n; s_v(x)) = \int_a^b f(t) C_k\left(n; \sum_{r=1}^v \varphi_r(x) \varphi_r(t)\right) dt = \int_a^b f(t) K_n^{(k)}(t, x) dt,$$

und die zum System $\{\varphi_n(x)\}$ gehörigen Lebesgueschen Konstanten seien mit $I_n^{(k)}(x) = \int_a^b |K_n^{(k)}(t, x)| dt$ bezeichnet. Von Kaczmarz stammt dann der folgende

Satz [für $k = 0$ vgl. *Studia math.* **1**, 103 (1929), für $k > 0$ vgl. dies. Zbl. **10**, 257]: Sei $k = 0, 1, 2, \dots$ fest und $\{v_n\}$ eine monoton gegen ∞ wachsende Folge positiver

Zahlen, für die $I_n^{(k)}(x) \leq v_n^2$ ($x \in (a, b)$) und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 v_n^2 < \infty$ gilt. Dann ist (1)

in (a, b) fast überall C_k -summierbar. Beim Beweis fordert jedoch Kaczmarz von $\{v_n\}$ zusätzlich, daß man eine Indexfolge n_v finden kann, für die $v \leq v_{n_v}^2 < v + 1$ gilt für alle $v = 1, 2, \dots$, was nicht allgemein möglich ist. Verf. schließt diese Beweislücke und erweitert die Gültigkeit des Kaczmarzschen Satzes für beliebige $k > 0$.

D. Gaier.

Gál, I. S.: Sur la majoration des suites de fonctions. *Nederl. Akad. Wet., Prop.*, Ser. A **54**, 243–251, *Indagationes math.* **13**, 243–251 (1951).

Es sei $f_1(x), f_2(x), \dots$ eine Folge von Funktionen, welche in $(0, 1)$ einzeln fast überall beschränkt sind, und es bezeichne $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots$ die Folge der arithmetischen Mittel der Teilsummen $f_1(x), f_1(x) + f_2(x), \dots$. Verf. zeigt zunächst, daß für die Rademacherschen Funktionen $f_v(x) = \text{sign} \sin 2^{v+1} \pi x$ fast überall die

Beziehung B.: $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n(x)| \left(\frac{2}{3} n \log \log n\right)^{-1/2} \leq 1$ besteht. Es wird festgestellt,

daß hier $|\sigma_{m+n} - \sigma_n| \leq |\sigma_{m+n} - \sigma_{n'}| + |\sigma_{m+n} - \sigma_{n-n'}|$ bei $0 \leq n' < n$ ist und sich

$\int_0^1 |\sigma_{m+n} - \sigma_n|^{2p} dx = O\left[\frac{2p}{3e} \frac{n^2}{m+n} e^{p/(2mn)}\right]$ erweist. Unter ähnlichen — wegen

eines Rechenfehlers unnötig eng gefaßten — Bedingungen wird dann B. auch im allgemeinen Fall abgeleitet. Verschiedene Varianten dieses Satzes, welche Verf. 1949 in ziemlich verwickelter Fassung mitgeteilt hat, ergeben sich ebenso.

Tibor Szentmártony.

Hsu, L. C.: The representation of functions of bounded variation by singular integrals. *Duke math. J.* **18**, 837–844 (1951).

Die Gültigkeit der Relationen

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_E f(t) \varphi(t-x, \lambda) dt = \frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\},$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_E f(t) \frac{\varphi(\lambda(t-x))}{t-x} dt = f(x+0) \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt - f(x-0) \int_0^\infty \frac{\varphi(-t)}{t} dt$$

(E = meßbare Menge, f auf E von beschränkter Variation im weiteren Sinn) wird unter sehr weiten Bedingungen über den Kern q bewiesen. Bemerkenswert gegenüber den klassischen Ergebnissen von H. Lebesgue [*Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, III. Sér. **1**, 25–128 (1909)] ist insbesondere der allgemeinere Charakter von E und f .

Gustav Doetsch.

Hirschman jr., I. I.: On approximation by non-dense sets of translates. *Amer. J. Math.* **73**, 773–778 (1951).

Let $\Phi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ and $\varphi(t)$ be its Fourier transform: $\varphi(t) =$

$\lim_{T \rightarrow \infty} (2\pi)^{-1/2} \int_{-T}^T e^{-itx} \Phi(x) dx$. Let $v(t)$ ($0 \leq t < \infty$) be such that $v(0) > 0$, $v'(t) \geq 0$;

$t v'(t)/v(t) = o(1)$ as $t \rightarrow \infty$, $\int_1^\infty \frac{dt}{t v(t)} = \infty$. Put $H(t) = \frac{2}{\pi} \int_1^t \frac{du}{u v(u)}$, $t = \frac{2}{\pi} \int_1^{\Phi(t)} \frac{du}{u v(u)}$.

Suppose that $|\varphi(t)| \geq \exp[-|t|/\nu(|t|)]$ for all t , $|\Phi(x)| \leq \exp[-\mathfrak{H}(x)]$ for large positive x ; $\liminf_{n \rightarrow \infty} (t_{n+1} - t_n) n \nu(n) > 0$ and $\liminf_{n \rightarrow \infty} t_n/H(n) > 1$. If $f(x)$

lies in the closure of the subspace of $L_2(-\infty, \infty)$ spanned by the finite linear combinations of the functions $\Phi(t_n - x)$ ($n = 1, 2, \dots$), then $f(x)$ may be represented as the sum of a series of the form $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Phi(t_n - x)$ for almost all x .

For the proof the author uses results of three previous notes (this Zbl. 35, 331; 37, 47; 39, 58). — The theorem is to be compared with similar results of Clarkson and Erdős [Duke Math. J. 10, 5—11 (1943)], Korevaar [Indagationes math. 9, 360—368 (1947); this Zbl. 29, 367] and Schwartz [Actual. sci. industr. 959 (1943)] concerning the case $\Phi(x) = \exp[-e^x]$ (Müntz's theorem). *János Horváth.*

Arnol'd, G. A.: Über die Ordnung der Annäherung stetiger Funktionen durch singuläre Integrale von einer gewissen speziellen Form. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 427—432 (1951) [Russisch].

Soit $\varphi(x, t)$ définie et continue pour $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$, et ayant les propriétés suivantes: $|\varphi(x, t)| < 1$ pour $x \neq t$, $\varphi(x, x) = 1$, $\varphi'_{tt}(x, t)$ et $\varphi''_{tt}(x, t)$ existent et sont continues pour $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$, $\varphi'_{tt}(x, x) < 0$. Posons alors

$$P_n[f(x), x] = \frac{1}{K_n} \int_a^b [\varphi(x, t)]^n f(t) dt, \quad \text{où } K_n = K_n(x) = \int_a^b [\varphi(x, t)]^n dt.$$

Si $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) possède une seconde dérivée continue, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \{P_n[f(x), x] - f(x)\} = L_0(x) f'(x) + L(x) f''(x),$$

$$\text{où } L_0(x) = \frac{\varphi''_{tt}(x, x)}{2 [\varphi'_{tt}(x, x)]^2}, \quad L(x) = \frac{1}{2 |\varphi'_{tt}(x, x)|}.$$

Ainsi par exemple pour l'intégrale de Stieltjes-Landau

$$L_n[f(x), x] = \frac{1}{K_n} \int_0^1 [1 - (t - x)^2]^n f(t) dt$$

$$\text{on a } \lim_{n \rightarrow \infty} n \{L_n[f(x), x] - f(x)\} = \frac{1}{4} f''(x).$$

János Horváth.

Carleson, Lennart: On Bernstein's approximation problem. Proc. Amer. math. Soc. 2, 953—961 (1951).

Una funzione $K(x)$, pari, definita in $(-\infty, \infty)$, semicontinua inferiormente, tale che $1 \leq K(x) \leq \infty$ e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{K(x)} = 0$ per qualsiasi polinomio $P(x)$ è detta dall'A. di tipo B (di Bernstein) se, assegnata una qualsiasi funzione continua $f(x)$ definita in $(-\infty, \infty)$ per la quale $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{K(x)} = 0$ e assegnato un numero positivo ε , è possibile determinare corrispondentemente un polinomio $P(x)$ tale che $|f(x) - P(x)| < \varepsilon K(x)$, $-\infty < x < \infty$. Se fissata $K(x)$, esiste una funzione $\mu(x)$ a variazione

limitata in $(0, \infty)$ tale che $\int_0^{\infty} \frac{t^{2n}}{K(t)} d\mu(t) = 0$, $n = 1, 2, \dots$, e se $\log K^*(x)$ è la

massima minorante di $\log K(x)$ che è convessa rispetto a $\log x$, l'A. dimostra che condizione sufficiente perchè $K(x)$ sia di tipo B è che $(1) \int_{-\infty}^{\infty} x^{-2} \log K^*(x) dx = \infty$. Si ha pure il teorema che condizione necessaria perchè $K(x)$ sia di tipo B è che risulti $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log K(x)}{1+x^2} dx < \infty$. Il primo criterio non è selettivo perchè l'A. costruisce particolari funzioni $K(x)$ di tipo B per le quali l'integrale (1) converge.

Giovanni Sansone.

Yano, Shigeki: On Walsh-Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 223—242 (1951).

Sia $\{\psi_n(x)\}$ il sistema ortonormale e completo in $(0, 1)$ delle funzioni di Walsh, $f(x)$ integrabile in $(0, 1)$,

$$(1) \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x), \quad c_n = \int_0^1 \psi_n(x) f(x) dx, \quad (n = 0, 1, \dots).$$

L'A., in prosecuzione di una memoria di N. J. Fine (questo Zbl. 36, 36) dimostra:

i) se $0 < \alpha < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+1)^{-\alpha} \psi_n(x)$ è sommabile $(C, -\alpha)$; ii) se esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = s$ allora la somma (C, α) della (1) in x_0 vale s ; iii) se $f(x)$ soddisfa in $(0, 1)$ la condizione

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^p}{t} dx dt < \infty, \quad 1 \leq p \leq 2,$$

allora la (1) converge quasi ovunque verso $f(x)$. — Segue lo studio della convergenza della serie (1) per particolari successioni $\{c_n\}$ e del comportamento delle somme

$$s_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{\log(k+2)} \psi_k(x), \quad s_n^{**}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{\log^{\frac{1}{2}}(k+2)} \psi_k(x).$$

Giovanni Sansone.

Yano, Shigeki: On approximation by Walsh functions. Proc. Amer. math. Soc. 2, 962—967 (1951).

Il sistema di Rademacher $\{\Phi_n(x)\}$ è definito dalle relazioni

$$\Phi_0(x) = 1 \text{ per } 0 \leq x < \frac{1}{2}; \quad \Phi_0(x) = -1 \text{ per } \frac{1}{2} \leq x < 1;$$

$$\Phi_0(x+1) = \Phi_0(x); \quad \Phi_n(x) = \Phi_0(2^n x), \quad (n = 1, 2, \dots);$$

e il sistema di Walsh $\{\psi_n(x)\}$, ortogonale e completo in $(0, 1)$ con le relazioni

$$\psi_0(x) = 1, \quad \psi_n(x) = \Phi_{n_1}(x) \Phi_{n_2}(x) \cdots \Phi_{n_r}(x)$$

per $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}, \quad n_1 > n_2 > \cdots > n_r \geq 0.$

Generalizzando una proposizione, non dimostrata, di N. J. Fine (questo Zbl. 36, 36) l'A. prova che se $f(x) \in \text{lip } \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$, se

$$(1) \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x), \quad c_n = \int_0^1 f(x) \psi_n(x) dx, \quad (n = 0, 1, \dots),$$

e se $\beta > \alpha$, vale la relazione $\sigma_n^{(\beta)}(x; f) - f(x) = O(n^{-\alpha})$ dove $\sigma_n^{(\beta)}(x; f)$ indica la somma (C, β) della (1).

Giovanni Sansone.

Sunouchi, Gen-ichirô: On the Walsh-Kaczmarz series. Proc. Amer. math. Soc. 2, 5—11 (1951).

Sia $\{\psi_n(t)\}$, $0 < t \leq 1$, il sistema ortogonale, normale completo di Walsh-Kaczmarz. Sia $f(t)$ una funzione integrabile su $(0, 1)$, e sia (*) $f(t) \sim \sum c_n \cdot \psi_n(t)$,

$c_n = \int_0^1 \psi_n(t) f(t) dt$, la serie di Fourier di $f(t)$. Siano $s_n[f, t]$, $\sigma_n[f, t]$ le somme

parziali e le medie aritmetiche della serie (*). Sia inoltre $f(t) \in L^r$; $r > 1$. — È noto (vedi R. E. A. C. Paley, questo Zbl. 5, 248) che al sistema di Walsh-Kaczmarz si estendono molte proprietà del sistema trigonometrico. — In questo ordine di

idee l'A. dimostra un certo numero di disuguaglianze fra $\int_0^1 |f(t)|^r dt$ e gli integrali

di certe funzioni ottenute mediante le $s_n[f, t]$ e $\sigma_n[f, t]$, le analoghe di alcune delle quali, per il sistema trigonometrico, erano state stabilite da A. Zygmund (questo Zbl. 19, 16).

Jaurès Cecconi.

Hyltén-Cavallius, Carl: Geometrical methods applied to trigonometrical sums. Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl. **21**, Nr. 1, 3—21 (1951).

Si considerano nell'intervallo $(0, \pi)$ le somme $S_n(x) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu e^{i\nu x}$, ove i numeri a_ν sono positivi e si conviene che sia $S_0(x) = 0$. Il procedimento geometrico seguito dall'A. è il seguente: a partire da un punto $c(x)$ del piano complesso si traccia una poligonale avente come lati i vettori $a_1 e^{ix}$, $a_2 e^{i2x}$, ..., $a_\nu e^{i\nu x}$, ... e i cui vertici sono $g_\nu(x) = c(x) + S_\nu(x)$, [$\nu = 1, 2, \dots$; $g_0(x) \equiv c(x)$]. Tra i risultati raggiunti dall'A. citiamo il seguente: Se è $0 < x_n \leq \pi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \frac{1}{2}) x_n = \theta$,

con $0 \leq \theta \leq \infty$, allora è $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x_n) = P(\theta)$, ove $P(\theta) = - \int_0^\infty \frac{e^{iu}}{u} du$. D'altra

parte, se x_n è una successione di numeri con $0 < x_n \leq \pi$, ogni punto di accumulazione della successione $g_n(x_n)$ appartiene alla curva $z = P(\theta)$. *Silvio Cinquini.*

Sunouchi, Gen-ichirô and Shigeki Yano: Notes on Fourier analysis. XXVIII: On some maximal theorems for the strong summability of Fourier series. Math. Japonicae **2**, 53—58 (1951).

$S_n(x)$ denotes the n -th partial sum of the Fourier series of a Lebesgue integrable function $f(x)$ of period 2π , and

$$T_k(x) = \sup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n |S_\nu(x)|^k \right]^{1/k} \quad (k > 0).$$

Sunouchi had previously given an estimate for the p -th integral mean of T_k when $f \in L^p$ ($p > 1$) [Proc. Imp. Acad. Tokyo **19**, 420—423 (1943)], and Marcinkiewicz for the first integral mean, when $f \log^2(1 + f^2) \in L$ (this Zbl. **20**, 217). The authors claim more elementary proofs for these and similar results. The reviewer, however, cannot follow their argument: their estimate (2. 2), for instance, and what follows is obviously wrong.

W. W. Rogosinski.

Sunouchi, Gen-ichirô: Notes on Fourier analysis. XLVI: A convergence criterion for Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. **3**, 216—219 (1951).

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des Youngschen Konvergenzkriteriums für Fouriersche Reihen. Dabei sei $\varphi(t)$ eine L -integrale, gerade periodische Funktion. In Verallgemeinerung eines Resultates von S. Pollard [J. London math. Soc. **2**, 255—262 (1927)] beweist Verf. den Satz: Die Fourierreihe von $\varphi(t)$ konvergiert bei $t = 0$ zum Wert 0, sobald es einen Exponenten $\Delta \geq 1$ gibt derart, daß

$$\int_0^t \varphi(u) du = o(t^\Delta) \quad \text{für } t \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \int_0^t |\Delta \{u^\Delta \varphi(u)\}| = O(t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq \eta$$

ist.

Viktor Garten.

Izumi, Shin-ichi: Notes on Fourier analysis. XXVII: A theorem on Cesàro summation. Tôhoku math. J., II. Ser. **3**, 212—215 (1951).

Es sei $\varphi(t)$ eine gerade periodische Funktion, $\varphi(t) \sim \sum_{n=0}^\infty a_n \cos nt$, $a_0 = 0$,

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \varphi(u) (t-u)^{\alpha-1} du, \quad \alpha > 0 \quad \text{und} \quad s_n^\beta = \sum_{\nu=0}^n \binom{\beta}{n-\nu} a_\nu \cos \nu t. \quad \text{Im}$$

Anschluß an ähnliche Untersuchungen von L. S. Bosanquet [Proc. London math. Soc., II. Ser. **31**, 144—164 (1930)] beweist Verf. den folgenden, ein Ergebnis von J. M. Hyslop (dies. Zbl. **33**, 112) verallgemeinernden Satz: Sei $\beta > -1$, $\gamma > -1$, $\beta - \gamma > -1$. Aus $s_n^\beta = o(n^\gamma)$ für $n \rightarrow \infty$ folgt $\Phi_\alpha(t) = o(t^{\alpha+\beta-\gamma})$ für $t \rightarrow 0$, wenn $\alpha > 1 + \gamma$ ist.

Viktor Garten.

Žak, I. Ė.: Zur absoluten Konvergenz Fourierscher Doppelreihen. Soob-
ščenijsa Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 12, 129—133 (1951) [Russisch].

Hardy [Trans. Amer. math. Soc. 17, 301—325 (1916), s. a. Zygmund, dies.
Zbl. 11, 17] zeigte: Ist $f(x) \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) und von beschränkter Schwankung,
so gilt $\sum n^\theta (|a_n| + |b_n|) < \infty$ für $2\theta < \alpha$ (a_n, b_n = Fourierkoeffizienten). Dies
wird auf Funktionen $f(x, y)$ ($0 \leq x, y \leq 2\pi$) zweier Veränderlicher übertragen.
Dabei wird die Lipschitzbedingung mit $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta < 1$ ersetzt durch:

$$|f(x_2, y) - f(x_1, y)| < K(y) \cdot |x_2 - x_1|^\alpha \quad [K(y) \text{ integrierbar}],$$

entsprechend in y mit β , $|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1) + f(x_1, y_1)| < K |x_2 - x_1|^\alpha \cdot |y_2 - y_1|^\beta$; — die Schwankungsbedingung durch: $f(x, y)$ ist im Sinne von Carathéodory von beschränkter Schwankung, die Totalschwankung $V_{x,y} f$ von f bezüglich x bei festem y liegt unter einem integrierbaren $L(y)$, entsprechend in y . — Die Folgerung lautet $\sum \sum m^\eta n^\theta \varrho_{mn} < \infty$ für $2\eta = \min(\alpha, \gamma)$, $2\theta = \min(\beta, \delta)$ mit $\varrho_{mn} = \sqrt{a_{mn}^2 + \dots + b_{mn}^2}$ usw. = Fourierkoeffizienten von f , vgl. etwa das Referat Gacharija, dies. Zbl. 42, 73). Verf. folgert aus dem Beweis noch eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Stetigkeit einer Funktion $f(x, y)$ von beschränkter Schwankung. Karl Zeller.

Chandrasekharan, K.: Fourier series, lattice points and Watson transforms. Math. Student 19, 1—11 (1951).

This is an expository lecture given at a conference of the Indian Math. Soc. It reports mainly on joint results of S. Bochner and the author in the theory of summability of multiple Fourier series and integrals and their applications in the theory of lattice points. W. W. Rogosinski.

● **Tolstov, G. P.:** Fourierreihen. (Phys.-math. Bibliothek des Ingenieurs.) Moskau-Leningrad: Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1951. 396 S. 13,80 R. [Russisch].

Dieses Buch richtet sich in erster Linie an Ingenieure. Das kommt darin zum Ausdruck, daß die dargelegte Theorie durch eine große Anzahl von Beispielen illustriert wird. Außerdem ist eine Reihe von Übungsaufgaben jedem Kapitel beigegeben. — Den Inhalt des Buches bilden Entwicklungen von Funktionen in trigonometrische Reihen und in Reihen von Besselschen Funktionen. Außerdem enthält das letzte Kapitel eine Einführung in die Theorie der Randwertaufgaben mit vielen Beispielen aus der Technik. — Die Darstellung des Stoffes ist streng, doch werden, dem Zweck des Buches entsprechend, die Sätze nicht in voller Allgemeinheit bewiesen. Die folgenden Kapitelüberschriften geben eine Übersicht über die Gliederung des Stoffes: I. Trigonometrische Fourierreihen. II. Orthogonale Systeme. III. Konvergenz trigonometrischer Fourierreihen. IV. Trigonometrische Reihen mit abnehmenden Koeffizienten. Bestimmung der Summen gewisser Reihen. V. Vollständigkeit des trigonometrischen Systems. Operationen an Fourierreihen. VI. Summationen von trigonometrischen Fourierreihen. VII. Trigonometrische Doppelreihen. Das Fourierintegral. VIII. Besselsche Funktionen. IX. Fourierreihen nach Besselschen Funktionen. X. Die Methode der Eigenfunktionen für die Lösung einiger Aufgaben der mathematischen Physik. XI. Anwendungen. Leo Kaloujnine.

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Tricomi, Francesco G.: Una nuova trascendente intera connessa con una ben nota serie non continuabile. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 11, 141—144 (1951).

Es handelt sich um die ganze Funktion der Ordnung 1 $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \frac{z^n}{n!}$ (a reell > 1). Sie genügt der geometrischen Differenzengleichung $G(az) = G(z) + e^z - 1$, aus der für jedes natürliche m die Beziehung hervorgeht $F_m(z) = m + G(amz) - G(z)$; hierbei ist $F_m(z)$ die m -te Teilsumme der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \exp(akz)$, die eine Funktion $F(z)$ mit der rechten Halbebene als Existenzbereich darstellt. Vermöge $F(z)$ und $G(z)$ läßt sich einfach ausdrücken die doppeltperiodische, aber

nicht meromorphe Funktion $P(u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(u+m)$, wo $f(t) = a^t e^{-a^t}$; sie existiert für $0 < u < 1 \pmod{1} - \pi A/2 < \Im(u) < \pi A/2 \pmod{2\pi A}$; $A = 1/\lg a$. $P(u)$ hat als periodische Funktion der Periode 1 die (komplexen) Fourierkoeffizienten $A_n = A \Gamma(1 - 2n\pi i A)$. Skizzenhafte Angaben über das asymptotische Verhalten von $G(z)$ für $|z| \rightarrow \infty$, insbesondere für reelle negative $z = x$.

Hermann Schmidt (Würzburg).

Miyatake, Osamu: On the distribution of zero points of a function which is related to Riemann's ξ -function. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 2, 39—59 (1951).

Ausgehend von der Riemannschen ξ -Funktion (vgl. nachsteh. Referat), dargestellt durch $\xi(z) = 2 \int_0^\infty \Phi(t) \cos zt dt$ mit $\Phi(t) = 2\pi e^{5t/2} \sum_{n=1}^\infty (2\pi e^{2t} n^2 - 3) \cdot n^2 \exp(-n^2 \pi e^{2t})$, wird $G(z) = \int_{-\infty}^\infty \psi(t) e^{zt} dt$, definiert durch $\xi(z) = 2\pi^2 \cdot [G(\frac{1}{2}iz - \frac{9}{4}) + G(\frac{1}{2}iz + \frac{9}{4})]$, betrachtet. Dabei besteht zwischen $\psi(t)$ und $\Phi(t)$ der Zusammenhang: $4\pi^2 \psi(2t) (e^{-9t/2} + e^{9t/2}) = \Phi(t)$. — Es werden nun folgende Funktionen definiert:

$$\psi_1(t) = \sum_{n=1}^\infty n^4 \exp(-n^2 \pi (e^t + e^{-t})),$$

$$\psi_2(t) = \sum' n^4 \exp(-n^2 \pi (e^t + e^{-t})),$$

$$\psi_3(t) = \sum_{n=1}^\infty n^3 \exp(-n^2 \pi (e^t + e^{-t})),$$

(\sum' : Summation wie bei $\prod_{p \leq N} (1 - p^{-z})^{-1} = \sum' n^{-z}$, N vorgegebene positive Konstante, p Primzahl) und damit G_1, ξ_1 , dann G_2, ξ_2 und schließlich G_3, ξ_3 in gleicher Weise wie vorher die Funktionen $G(z), \xi(z)$ aus $\psi(t)$ festgelegt. Verf. gelangt für die Funktionen ξ_2 und ξ_3 (für ξ_1 wird kein Resultat erhalten) zu folgendem Ergebnis: Die Funktionen $\xi_2(x + iy)$ und $\xi_3(x + iy)$ haben unendlich viele Nullstellen in einem Streifen $-A \leq y \leq A$ (A feste positive Konstante). Die Nullstellen liegen alle auf der reellen Achse in einem Gebiet, in dem der absolute Wert von x groß genug ist. Die Anzahl der Nullstellen in $0 \leq x \leq T$ ist: $\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(1)$. In der Arbeit wird der Nachweis nur für ξ_2 gebracht. Für ξ_3 verläuft er entsprechend.

Heinz Unger.

Miyatake, Osamu: Note on Riemann's ξ -function. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 2, 61—70 (1951).

Es werden zunächst einige bekannte Beziehungen der Riemannschen ξ -Funktion, $\xi(t) = \frac{1}{2} s(s-1) \zeta(s) \Gamma(s/2) \pi^{-s/2}$ mit $s = \frac{1}{2} + it$, angegeben und gezeigt, daß die Nullstellenverteilung sich zurückführen läßt auf diejenige von

$$\Xi(z) = \int_{-\infty}^\infty \psi(u) e^{zu} du$$

mit $\psi(u) = \varphi(e^u) e^{u/4} - \frac{1}{2} e^{-u/4}$ und $\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty \exp(-n^2 \pi x)$.

Verf. betrachtet nun aber mit $z = x + iy$ die Funktion $Y(z) = \int_{-\infty}^\infty \Phi(u) e^{zu} du$ mit $\Phi(u) = \sum' (e^{u/4} + e^{-u/4}) \cdot \exp(-n^2 \pi (e^u + e^{-u})) - \frac{1}{2} e^{u/4} + e^{-u/4})^{-1}$ (für \sum' vgl. vorsteh. Referat) und gelangt zu folgendem Ergebnis: Die Funktion $Y(z)$ hat nur rein imaginäre Nullstellen in dem Gebiet, in dem y genügend groß ist. Die Zahl der Nullstellen in $0 \leq y \leq Y$ ist: $\frac{Y}{\pi} \log \frac{Y}{\pi} + O(Y)$. Zum Nachweis dieser Aussagen werden die Zusammenhänge der Funktion $Y(z)$ mit der modifizierten Hankel-

funktion herangezogen. Zur Verwendung gelangen eine Reihe asymptotischer Ausdrücke von Zylinderfunktionen (Debyesche Entwicklungen), die in Anlehnung an Watson, Theory of Bessel functions, angegeben werden. Zu diesem und zu vorsteh. Referat vgl.: E. C. Titchmarsh, dies. Zbl. 42, 79.

Heinz Unger.

Bochner, S.: Theta relations with spherical harmonics. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 804—808 (1951).

Verf. beweist folgendes Theorem: $\varphi(u)$ sei meßbar in $0 < u < \infty$, $P_g(x_j)$ eine harmonische Funktion, $|x| = (x_1^2 + \dots + x_k^2)^{1/2}$, $|y| = (y_1^2 + \dots + y_k^2)^{1/2}$, $l = \frac{1}{2}(k-2)$. Dann ist

$$\frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{E_k} P_g(x_j) \varphi(|x|) \exp(i \sum x_j y_j) dv_x = \frac{i^g P_g(y_j)}{|y|^{k+2g}} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{t}{|y|}\right) J_{l+g}(t) t^{l+g+1} dt,$$

falls die linke Seite absolut konvergiert. Daraus folgt

$$\sum_{(n)} R_g(n+\alpha) \exp(-\pi t Q(n+\alpha) + 2\pi i \sum_j (n_j + \alpha_j) \beta_j) = i^g t^{-k/2-g} (\det Q)^{-1/2} \sum R'_g(n+\beta) \exp(-\pi t^{-1} Q'(n+\beta) - 2\pi i \sum_j n_j \alpha_j).$$

Dabei ist Q eine positive quadratische Form, Q' ihre Inverse; $R_g(t)$ entsteht aus einem harmonischen Polynom durch die Substitution $x = A t$, welche $\sum n_j^2$ in Q transformiert, und $R'_g(t)$ durch $x = A^{*-1} t$. Diese Transformationsgleichung tritt für $\beta = 0$ schon bei Ref. (dies. Zbl. 20, 202) und Hecke (dies. Zbl. 24, 9) auf. Weiter

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{E_k} \frac{P_g(\xi)}{|x|^{k/2}} \exp(-\varepsilon |x| + i \sum x_j y_j) dv_x = i^g \frac{P_g(y_j)}{|y|^{k/2}}.$$

B. Schoeneberg.

Sips, Robert: Recherches sur les fonctions paraboliques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 355—373 (1951).

Es sei $(4R)^2 = ((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2)((\alpha + \alpha_0)^2 + (\beta + \beta_0)^2)$, $D_n(\alpha)$ die parabolische und $K_0(R)$ die modifizierte Hankelsche Zylinderfunktion. Verf. betrachtet

$$\text{das Integral } z(\alpha_0, \beta, \beta_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(R) D_n(\alpha) d\alpha \quad \text{und zeigt, daß}$$

$$z = D_n(\alpha_0) \cdot (A D_n(i\beta) + B D_{-n-1}(\beta)) (C D_n(i\beta_0) + D D_{-n-1}(\beta_0))$$

ist, wo A, B, C, D Konstante sind, die verschiedene Werte annehmen, je nachdem $\beta < -\beta_0$, $-\beta_0 < \beta < \beta_0$, $\beta_0 < \beta$ ist. Damit gewinnt er eine Entwicklung von $K_0(R)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe von Produkten $D_n(\alpha) D_n(i\beta)$ für alle $\alpha, \alpha_0, \beta, \beta_0$, ausgenommen $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ und $\alpha = -\alpha_0$, $\beta = -\beta_0$. Durch Spezialisieren der Konstanten α_0, β_0 erhält Verf. eine Reihe interessanter Beziehungen und die bekannte asymptotische Darstellung der $D_{-n}(\alpha)$ für $\alpha \gg 1$. Weitere, neue Beziehungen zwischen den parabolischen Funktionen ergeben sich durch Übergang zu komplexen Veränderlichen α, β .

Otto Volk.

Agostinelli, Cataldo: Sulle funzioni epicycloidali e alcune nuove relazioni fra le funzioni di Bessel. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 11, 339—344 (1951).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 37, 273) hat Verf. bei der Betrachtung der Schwingungen einer Membrane mit epizykloidalen Begrenzung die von ihm epizykloidalen Funktionen genannten Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 n^2 a^2 (1 + 2c \varrho^{n-1} \cos(n-1)\varphi + c^2 \varrho^{2(n-1)}) u = 0$$

eingeführt, die in $\varrho = 0$ regulär sind und für $\varrho = 1$ eine weitere Bedingung erfüllen; dabei ist λ ein Parameter, $x + iy = na \varrho e^{i\varphi} + b \varrho^n e^{in\varphi}$ und $0 < c = b/a < 1$. Verf. gibt diesen Lösungen die einfachere Form

$$(1) \quad \begin{cases} \mathbb{E}_k(r, \varphi, \gamma) \\ \mathbb{E}_k^*(r, \varphi, \gamma) \end{cases} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{k-p}(r) J_p\left(\gamma \frac{r^n}{n}\right) \begin{cases} \cos(k+p(n-1)\varphi) \\ \sin(k+p(n-1)\varphi) \end{cases}$$

wo $r = \lambda n a \rho$, $\gamma = c/(\lambda n a)^{n-1}$ gesetzt ist; die rechten Seiten sind absolut konvergent für alle Werte von r . Durch Vergleich von (1) mit der früheren Darstellung erhält Verf. eine, bereits von J. H. Graf [Math. Ann. 43, 143 (1893)] abgeleitete, Verallgemeinerung des Additionstheorems der Zylinderfunktionen. *Otto Volk.*

Plessis, N. du: A note about the derivatives of Legendre polynomials. Proc. Amer. math. Soc. 2, 950 (1951).

Vereinfachung zu E. Großwald, dies. Zbl. 38, 223.

Braffman, Fred: Generating functions of Jacobi and related polynomials. Proc. Amer. math. Soc. 2, 942—949 (1951).

Verf. gibt erzeugende Funktionen für Jacobische (speziell ultrasphärische und Legendresche) und Hermite'sche Polynome. Z. B. für die Jacobischen folgendermaßen: Mit

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(1 + \alpha)_n}{n!} \left(\frac{1 + x}{2} \right)^n F\left(-n, -n - \beta; 1 + \alpha; \frac{x - 1}{x + 1}\right)$$

[F hypergeometrische Funktion, $(1 + \alpha)_n = (\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n)$] erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (1 + \alpha + \beta - a)_n}{(1 + \alpha)_n (1 + \beta)_n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) t^n \\ = F_4\left(a, 1 + \alpha + \beta - a; 1 + \alpha, 1 + \beta; \frac{t(x - 1)}{2}, \frac{t(x + 1)}{2}\right)$$

wo a ein Parameter ist und F_4 eine hypergeometrische Funktion von zwei Variablen von Appell bedeutet (vgl. z. B. N. Bailey, Generalized hypergeometric series, London 1935, p. 81; dies. Zbl. 11, 23). Ferner wird die folgende erzeugende Funktion angegeben

$$(1 - t)^{-a} {}_{p+2}F_a \left[\begin{matrix} a/2, (a + 1)/2, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \beta_1, \dots, \beta_q; \end{matrix} \frac{x t^2}{(1 - t)^2} \right] \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n t^n}{n!} {}_{p+2}F_a \left[\begin{matrix} -n/2, (-n + 1)/2, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \beta_1, \dots, \beta_q; \end{matrix} x \right]$$

(Bezeichnungen vgl. Bailey, loc. cit.). Es werden noch einige weitere Relationen insbesondere über ultrasphärische Polynome hergeleitet. *Karl Prachar.*

Skovgaard, Helge: On the greatest and the least zero of Laguerre polynomials. Mat. Tidsskr. B 1951, 59—66 (1951).

Für die kleinste bzw. größte Nullstelle des n -ten Laguerreschen Polynoms teilt Verf. die folgenden Abschätzungen mit:

$$x_1 < 1,455 \left(n + \frac{1}{2} - \frac{3}{44(n + 1/2)} \right)^{-1},$$

$$4n - (2\sqrt[3]{3} + \sqrt{3})\sqrt[3]{4n} - 6 < x_n < 4n - (2 + \sqrt[3]{3})\sqrt[3]{4n} + 4.$$

Die verwandten Methoden sind ganz elementar — einfache Abschätzungen der Potenzsummen — und darin liegt der Wert der Ergebnisse. Es gibt zwar für die betrachteten Nullstellen genauere Abschätzungen, sogar asymptotische Formeln (vgl. dies. Zbl. 23, 215); doch sind diese mit erheblich mehr Aufwand gewonnen worden.

Wolfgang Hahn.

Koschmieder, Lothar: Das Vorzeichen gewisser aus Hermite'schen Polynomen zweiter Art gebildeter Determinanten. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anz. 1951, 165—167 (1951).

Für die Hermite'schen Polynome zweiter Art $G_n(x)$ (vgl. z. B. P. Appell-J. Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Paris 1926) wird gezeigt: Es ist $\Delta_n = G_n^2 - G_{n-1} G_{n+1} > 0$ für alle x . Dies wird aus der Formel $\Delta_n = n \Delta_{n+1} + G_{n-1}^2$ gefolgert, die ihrerseits aus der Rekursionsformel $G_n - x G_{n-1} + n G_{n-2} = 0$ folgt. Weiter ergibt sich $\Delta_n = n! \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} G_k^2 \right)$.

Karl Prachar.

Ossicini, Alessandro: *Sulle funzioni ultrasferiche di seconda specie.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **6**, 311—315 (1951).

Es wird für die ultrasphärischen Funktionen zweiter Art das folgende Analogon der Formel von Rodrigues für ultrasphärische Polynome gegeben:

$$Q_n^{(\lambda)}(x) = K(n, \lambda) (1-x^2)^{1/2-\lambda} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n+\lambda-1/2} \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{n+\lambda+1/2}},$$

wo $K(n, \lambda) = (-1)^{n-[\lambda-1/2]} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\lambda + \frac{1}{2}) \Gamma(n+2\lambda)/2^n n! \Gamma(2\lambda) \Gamma(n+\lambda)$.

Karl Prachar.

Tricomi, F. G.: *Generalizzazione di un teorema d'addizione per le funzioni ipergeometriche confluenti.* Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **10**, 211—216 (1915).

Sei

$$(1) \quad \Psi(a, c; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt, \quad \Re a > 0, \Re z > 0.$$

Verf. zeigt auf einfache Weise in Verallgemeinerung einer Formel von Magnus die Beziehung

$$(2) \quad \Gamma(\sigma) \Psi(\sigma, c + \gamma; z + \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \Gamma(s) \Psi(s, c; z) \Gamma(\sigma-s) \Psi(\sigma-s, \gamma; \zeta) ds$$

$[0 < x < \Re \sigma, \Re z > 0, \Re \zeta > 0]$. Zum Beweis wird in (1) $t/(t+1) = e^\tau$ gesetzt. Daraus ergibt sich $\Gamma(s) \Psi(s, c; z) = L_s[F(\tau; c, z)]$, wobei

$$F(\tau; c, z) = e^{-z/(e^\tau-1)} (1 - e^{-\tau})^{-c}$$

($L_s[F]$ = Laplace-Transformierte von F). (2) ist dann eine Konsequenz der Funktionalgleichung $F(t; c, z) \cdot F(t; \gamma, \zeta) = F(t; c + \gamma, z + \zeta)$. Man hat dazu die Formel zu benutzen, die die Laplace-Transformierte eines Produktes durch die der einzelnen Faktoren ausdrückt. Es wird noch bewiesen, daß diese Formel hier angewendet werden darf.

Karl Prachar.

Nørlund, N. E.: *Séries hypergéométriques.* Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl. **21**, Nr. 15, 143—146 (1951).

Verf. teilt verschiedene Fundamentalsysteme für die Differenzengleichung

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{x-\gamma_0}{i} \left[\binom{i}{-1} Q(x) - z \binom{i-1}{-1} R(x-1) \right] u(x-i) = 0$$

mit. Darin ist z ein Parameter, und $Q(x)$ und $R(x)$ sind Polynome n -ten Grades in x . Die beiden ersten Lösungssysteme sind hypergeometrische Reihen n -ter Ordnung in z ; die Parameter hängen in einfacher Weise von x und den Nullstellen der Polynome Q und R ab. Zwei weitere Lösungssysteme werden durch etwas kompliziertere Fakultätenreihen in x dargestellt. — Wie Ref. bemerkt, läuft die Rechnung des Verf. im wesentlichen darauf hinaus, daß man die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihen in z als Differenzengleichung in einem der oberen Parameter auffaßt; deshalb sind die angegebenen Fundamentalsysteme zugleich auch Fundamentalsysteme ein und derselben Differentialgleichung in z .

Wolfgang Hahn.

Sears, D. B.: *Transformations of basic hypergeometric functions of any order.* Proc. London math. Soc., II. Ser. **53**, 181—191 (1951).

In prosecuzione di alcune sue ricerche sulla trasformazione della base delle funzioni ipergeometriche di ordine qualsiasi (questo Zbl. **37**, 391) l'A., insieme ad altri risultati, estende una relazione di W. N. Bailey al prodotto di funzioni ipergeometriche con base.

Giovanni Sansone.

Sears, D. B.: *On the transformation theory of basic hypergeometric functions.* Proc. London math. Soc., II. Ser. **53**, 158—180 (1951).

L'A. estende alcune sue precedenti ricerche sulle funzioni ipergeometriche (questo Zbl. 37, 391) a classi più generali di funzioni ipergeometriche collegate con una base. Se $(a)_n = (1-a)(1-ap)\cdots(1-ap^{n-1})$, $(a)_0 = 1$, p base, $|p| < 1$,

$$G_n(a_1, \dots, a_M; b_1, \dots, b_N) = \left\{ \prod_{r=1}^M (a_r)_n \right\} \left\{ \prod_{r=1}^N (b_r)_n \right\}^{-1},$$

$$\Phi(a_1, \dots, a_M; b_1, \dots, b_N; x) = \sum_{s=0}^{\infty} x^s G_s(a_1, \dots, a_M; b_1, \dots, b_N), \quad |x| < 1,$$

l'A. con speciale riguardo alle $\Phi(a, b, c; e, f; s)$ dove i parametri sono particolarizzati, estende una formula di Jackson e le formule di trasformazione di Thomae sulle serie ipergeometriche ${}_3F_2$.
Giovanni Sansone.

Funktionentheorie:

Guglielmino, Francesco: Calcolo di integrali singolari mediante il teorema dei residui. *Matematiche* 6, 97—112 (1951).

Die Integrale über die positiv-reelle Halbachse werden für Integranden der folgenden Formen ausgewertet: a) $\{P(z^4)/Q(z^4)\} \cdot z^s e^{(i-1)z}$, P und Q reelle teilerfremde Polynome, $s \geq -1$; b) $\{P(z^2)/Q(z^2)\} z^s e^{e^{iz}}$, P und Q reelle teilerfremde Polynome der Grade n und $m > n$, $-1 \leq s \leq 2m - 2n - 1$; c) $\{P(z)/Q(z)\} z^s \lg z$, P und Q wie unter b), $-1 < s < m - n - 1$.
Robert Schmidt.

Martin, Yves: Sur les dérivées successives de certaines fonctions analytiques. *Bull. Sci. math.*, II. Sér. 75, 166—171 (1951).

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n z^n}{n!}$ une série de puissances ayant un rayon de convergence non nul; soit, d'autre part, un ensemble D fermé, borné, disjoint de l'origine et contenant plus d'un point; pour qu'on puisse trouver des $\omega_n \in D$ tels que la fonction $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n \omega_n z^n}{n!}$ admette $z = 0$ pour point d'accumulation des zéros de ses dérivées successives, il faut et il suffit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = +\infty$. L'A. étudie ensuite les cas où $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_{n+1}/b_n|$ est fini ou nul.
Jacques Dufresnoy.

Spitzbart, A.: On the minimum of a certain integral. *Proc. Amer. math. Soc.* 2, 246—253 (1951).

Let $f(z)$ be analytic in $|z| < 1$ and let C denote $|z| = 1$. The author computes the minimum value of $\int_C |f(z)|^p |dz|$, $p \geq 1$, under the condition $f'(x) = 1$. The proof is elementary.
Lennart Carleson.

Meier, Kurt: Zum Satz von Looman-Menchoff. *Commentarii math. Helvet.* 25, 181—195 (1951).

This paper contains a very simple and elementary proof of the theorem of Looman-Menchoff. The proof is reduced to a strictly elementary theorem of Lichtenstein [*C. r. Acad. Sci.*, Paris 150, 1109—1110 (1910)] and not to the theorem of Morera, as is customary. — In a second section, the derivatives are assumed to exist when the points are approached along three Jordan curves having certain properties; the theorem thus obtained is related to another theorem of Menchoff (this Zbl. 12, 82).
Lennart Carleson.

Walsh, J. L.: Note on approximation by bounded analytic functions. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 37, 821—826 (1951).

A number of results concerning approximation by analytic functions are given. The discussion is centered at the following theorem. Let C be an analytic curve strictly inside a domain D and let f_n be regular in D and let f be a function defined

on C . Then, if $|f_n| < \text{const} \cdot R^n$ in D and $|f - f_n| < \text{const} \cdot n^{-p-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, on C , $f^{(p)}(z)$ exists on C and satisfies a Lipschitz condition of order α .

Lennart Carleson.

Cowling, V. F.: On the analytic continuation of Newton series. Proc. Amer. math. Soc. 2, 28—31 (1951).

The coefficients of a Newton series are assumed to be the values for $w = n$ of an analytic function $a(w)$. It is shown that the series represents an integral function under certain conditions on $a(w)$.

Lennart Carleson.

Makar, Ragy and Bushra H.: On algebraic simple monic sets of polynomials. Proc. Amer. math. Soc. 2, 526—537 (1951).

Verff. betrachten normierte einfache Polynomfolgen (1) $\{p_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), welche dadurch charakterisiert sind, daß jedes $p_n(z)$ vom Grade n ist und z^n den Koeffizienten 1 hat. Eine solche Polynomfolge ist basisch, d. h. jedes Polynom $p(z)$ läßt sich eindeutig als endliche

Linearkombination der Polynome (1) darstellen. Ist $p_i(z) = \sum_{j=0}^i p_{ij} z^j$, $p_{ii} = 1$, so sind die Matrix $P = [p_{ij}]$ und die dazu reziproke Matrix $\Pi = [\pi_{ij}]$ untere Halbmatrizen, deren Koeffizienten in der Hauptdiagonale gleich 1 sind. Der Ausdruck $\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \omega_n(R)}{n \log n} \right\}$, wobei

$\omega_n(R) = \sum_{i=0}^n |\pi_{ni}| A_i(R)$ und $A_i(R) = \max_{|z|=R} |p_i(z)|$ bedeutet, heißt die Ordnung der Folge (1). —

Von Whittaker wurde gezeigt, daß eine Polynomfolge (1), für welche $|p_{ni}| \leq k n^\lambda$; $n = 1, 2, 3, \dots$, $i = 0, 1, 2, \dots$ gilt, höchstens von der Ordnung λ ist und eine Polynomfolge (1) konstruiert, welche die Ordnung λ besitzt. Auch wenn $|p_{ni}| \leq k n^{\lambda(n-i)}$ gilt, ist die Ordnung von (1) höchstens λ . — Verff. weisen zunächst darauf hin, daß im Falle (2) $|p_{ni}| \leq k n^{\lambda n}$ die Ordnung von (1) unendlich sein kann, wie das Beispiel $p_0(z) = 1$, $p_n(z) = -n^{\lambda n} z^{n-1} + z^n$, $n \geq 1$ zeigt. Während sich also für die Polynomfolgen (1), welche der Bedingung (2) genügen, keine endliche Schranke für die Ordnung ergibt, erhalten Verff. abgeschlossene Ergebnisse über die Ordnung der sogenannten algebraischen Polynomfolgen (1), deren Koeffizienten p_{ij} außerdem die Bedingung (2) erfüllen. Eine Polynomfolge (1) heißt algebraisch vom Grade m , wenn die Matrix P einer Gleichung $(P - I)^m = 0$ genügt, wobei m durch keine kleinere Zahl ersetzt werden kann und I die unendliche Einheitsmatrix bezeichnet. Verff. beweisen folgende Theoreme: a) Ist die Polynomfolge (1) algebraisch vom Grade m mit Koeffizienten p_{ij} , welche die Bedingung (2) befriedigen, worin $k \geq 1$ sein soll, so ist die Ordnung von $\{p_n(z)\}^v$ für $1 \leq v \leq m-1$ höchstens $(m+v-1)\lambda$ und für $v \geq m-1$ höchstens $2(m-1)\lambda$, wobei die angegebenen Schranken scharf sind. Dabei bedeutet $\{p_n(z)\}^v$ die zur Koeffizientenmatrix P^v gehörige Polynomfolge. b) Ist (1) eine algebraische Polynomfolge vom Grade m und genügen die Koeffizienten π_{ij} der Bedingung $|\pi_{ni}| \leq k n^{\lambda n}$, $k \geq 1$; $n = 1, 2, 3, \dots$; $i = 0, 1, 2, \dots$, so gilt für die Ordnung der Polynomfolge $\{p_n(z)\}^v$ die nämliche Aussage wie unter a). c) Ist (1) eine algebraische Polynomfolge und liegen für jedes $p_n(z)$ seine Nullstellen im abgeschlossenen Kreise $|z| \leq k n^\lambda$, so stellt die Folge $\{p_n(z)\}$ jede ganze Funktion $f(z)$ dar, deren Ordnung kleiner als $1/\lambda$ ist, d. h. $f(z)$

$= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \Pi_{\alpha} p_{\alpha}(z)$ konvergiert gleichmäßig auf jeder beschränkten Punktmenge. d) Sind $\{p_{nv}\}$ ($v = 1, 2, 3, \dots, s$) normierte einfache Polynomfolgen, von denen jede die Ordnung λ hat, so beträgt die Ordnung der Summe $\{u_n(z)\} = \sum_{v=1}^s \alpha_v p_{nv}(z) / \sum_{v=1}^s \alpha_v$, $\sum_{v=1}^s \alpha_v \neq 0$, sobald sie algebraisch vom Grade m ist, höchstens $m\lambda$.

Ernst Lammel.

Whittaker, E. T.: On the reversion of series. Gaz. Mat., Lisboa 12, Nr. 50, 1 (1951).

Mit $a \neq 0$, $a + bx + cx^2 + \dots$ nicht nirgendskonvergent, kann man in $(a + bx + \dots)^{-n} = A_{n0} + A_{n1}x + A_{n2}x^2 + \dots$ nach H. W. Segar [Mess. of Math. 21, 177 (1892)] die A_{nr} durch a, b, c, \dots als Determinanten ausdrücken. Die Umkehrung der Potenzreihe $y = ax + bx^2 + cx^3 + \dots$ wird damit

$$x = \frac{y}{1a} - \frac{y^2}{2!a^2} + \frac{y^3}{3!a^3} \begin{vmatrix} 3b & a \\ 6c & 4b \end{vmatrix} - \frac{y^4}{4!a^4} \begin{vmatrix} 4b & a & 0 \\ 8c & 5b & 2a \\ 12d & 9c & 6b \end{vmatrix} + \dots$$

Robert Schmidt.

Shah, S. M.: A note on means of entire functions. Publ. math., Debrecen 2, 95—99 (1951).

Let $f(z)$ be an integral function of (upper) order ρ and lower order λ , and let $\rho_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r}$, $\lambda_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r}$, where $n(r)$ denotes the number of zeros of $f(z)$ in $|z| \leq r$. Thus ρ_1 is the exponent of convergence for the zeros of $f(z)$. Further, let $G(r)$ and $g(r)$ be the geometric means of $|f(z)|$ on $|z| = r$ and $|z| \leq r$, respectively; and let $K = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{g(r)}{G(r)} \right)^{1/n(r)}$, $k = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{g(r)}{G(r)} \right)^{1/n(r)}$. Similarly, $L = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{m(r)}{\tilde{M}(r)} \right)^{1/\log r}$, $l = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{m(r)}{\tilde{M}(r)} \right)^{1/\log r}$, where $\tilde{M}(r)$ and $m(r)$ denote the arithmetical means of $|f(z)|^2$ on $|z| = r$ and $|z| \leq r$, respectively. The following theorems are proved: I. If $n(r) > 0$ eventually, then $\exp(-\frac{1}{2}) \leq k \leq \exp\left(\frac{-1}{2+\lambda_1}\right) \leq \exp\left(\frac{-1}{2+\rho_1}\right) \leq K \leq 1$. II. If $n(r) \sim r^{\rho_1} \Phi(r)$, where $\Phi(ar) \sim \Phi(r)$ for every $r > 0$, then $k = K$. III. $l = e^{-\rho}$ and $L = e^{-\lambda}$ for all $0 \leq \rho \leq \infty$, $0 \leq \lambda \leq \infty$. For known results in this direction compare Polya and Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin 1925, Vol. II, p. 10. W. W. Rogosinski.

Shah, S. M.: Some theorems on meromorphic functions. Proc. Amer. math. Soc. 2, 694—698 (1951).

The paper contains extensions of some theorems of Okada (this Zbl. 38, 230) to arbitrary meromorphic functions of finite order. Lennart Carleson.

Dugué, Daniel: Théorème d'impossibilité relatif aux fonctions elliptiques analogue à un théorème de M. Borel sur les exponentielles. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1566—1567 (1951).

Es sei $\nu = 1, 2$, $f_\nu(z)$ analytisch, $\wp(f)$ die in f doppelt periodische Grundfunktion der elliptischen Funktionen, $\partial c_\nu / \partial z = 0$ und $\sum_{\nu=1}^2 c_\nu \wp(f_\nu) = 1$, identisch in z . Dann können nicht beide $f_\nu(z)$ ganze Funktionen sein; dagegen ist $\sum_{\nu=1}^2 c_\nu \wp(f_\nu) = 0$ für ganze $f_\nu(z)$ lösbar, wenn gewisse 6. Einheitswurzeln c_ν und geeignet spezialisierte \wp -Funktionen betrachtet werden. Wilhelm Maier.

Ilieff, Ljubomir: Über die Abschnitte der schlichten Funktionen. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 2, 109—111 und russische Zusammenfassg. 112 (1951).

Sei $f_1(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ im Kreise $|z| < 1$ schlicht und regulär und sei $f_2(z) = z + a_3 z^3 + \dots$ daselbst ungerade, schlicht und regulär. Es seien ferner $\sigma_n^{(1)}(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ und $\sigma_n^{(2)}(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_{2n+1} z^{2n+1}$. Verf. beweist, daß (1) $z^{-1} \sigma_n^{(1)}(z) \neq 0$ im Kreise $|z| < 1 - 2n^{-1} \ln 3n$ gilt. Falls $n \geq 55$, so gilt (1) sogar für $|z| < 1 - 2n^{-1} \ln n$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein N , so daß (1) für $|z| < 1 - 2n^{-1} \ln(\varepsilon n)$ gilt, falls $n \geq N$. Analoge Sätze werden für $z^{-1} \sigma_n^{(2)}(z)$ bewiesen. Kaarlo Veikko Paatero.

Lebedev, N. A. und I. M. Milin: Über die Koeffizienten gewisser Klassen analytischer Funktionen. Mat. Sbornik, n. Ser. 28 (70), 359—400 (1951) [Russisch].

Bezeichnungen: Es sei $S_1 = S$ die Klasse der Funktionen $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$, die in $|z| < 1$ regulär und schlicht sind, S_k ($k = 2, 3, \dots$) die Klasse der Funktionen $f_k(z) = f(z^k)^{1/k}$, wo $f(z) \in S$, $\Sigma = \Sigma_1$ die Klasse der Funktionen $F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \alpha_1/\zeta + \dots$, die in $|\zeta| > 1$ mit Ausnahme eines Pols in $\zeta = \infty$ schlicht und regulär sind, Σ_0 die Klasse der $F(\zeta) \in \Sigma$, die in $|\zeta| > 1$ nicht Null werden, Σ_k ($k = 2, 3, \dots$) die Klasse der $F_k(\zeta) = F(\zeta^k)^{1/k}$, wo $F(\zeta) \in \Sigma_0$, $S_{|c_2|}$ die Klasse der $f(z) \in S$ mit festem $|c_2|$, S_n^* die Klasse der Funktionen $f_n^* = a_1^* z + a_2^* z^2 + \dots$, die in $|z| < 1$ regulär und bei beliebigen z_1, z_2 in $|z| < 1$ die Bedingung $f_n^*(z_1) f_n^*(z_2) \neq 1$ erfüllen; S_B die Klasse der schlichten Funktionen aus S_n^* und H_1 die Klasse der in $|z| < 1$ regulären Funktionen, für die für jedes r ($0 < r < 1$) $\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f(rz)| |dz| < 1$ ist. Unter dem Flächeninhalt

sei stets der durch π geteilte gewöhnliche Flächeninhalt verstanden. Das Bild von $|z| < r$ durch $f_k(z) \in S_k$ werde mit $G_k(r)$ und sein Flächeninhalt mit $s_k(r)$ bezeichnet. Ebenso wird das Komplement zum Bild von $|\zeta| > \varrho = r^{-1} > 1$ bei der Abbildung durch $F_k(\zeta) \in \Sigma_k$ mit $g_k(\varrho)$ und sein Flächeninhalt mit $\sigma_k(r)$ bezeichnet. — Die Arbeit gliedert sich in drei Teile. Der erste Teil stammt von J. M. Milin, der zweite Teil von N. A. Lebedev und der dritte Teil von beiden Autoren. Im ersten Teil wird gezeigt: Es seien p, q beliebige reelle Zahlen, ζ_1, ζ_2 beliebige komplexe Zahlen mit $|\zeta_1| = |\zeta_2| = \varrho = 1/r > 1$; dann gilt für $F_2(\zeta) \in \Sigma_2$

$$\frac{(1-r^2)^{1/2} (|p+q| + |p-q|)}{(1+r^2)^{1/2} (|p+q| - |p-q|)} \leq \left| \frac{F_2(\zeta_2) - F_2(\zeta_1)^p}{\zeta_2 - \zeta_1} \right|^p \left| \frac{\zeta_2 + \zeta_1}{F_2(\zeta_2) + F_2(\zeta_1)} \right|^q \leq \frac{(1+r^2)^{1/2} (|p+q| - |p-q|)}{(1-r^2)^{1/2} (|p+q| + |p-q|)}.$$

Der Beweis benutzt für $Q(w) = \ln(w - w_1)^p (w + w_1)^{-q}$ mit $w_1 = F_2(\zeta_1)$ das Lemma: Ist $Q(w)$

regulär in $g(\varrho_0)$ ($\varrho_0 > 1$) einer Funktion $F(\zeta) \in \Sigma$ mit $Q(F(\zeta)) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \zeta^{-n} + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n$

in $1 < |\zeta| < \varrho_0$, dann ist $\sum n |\beta_n|^2 \leq \sum n |b_n|^2$. Für $p = q = -1$ und $p = -q = -1$ sind die rechten Seiten der Ungleichung scharf. Für $p = -q = -1$ wurde dies bereits von G. M. Goluzin [Mat. Sbornik, n. Ser. 19 (61), 183–202 (1946)] gezeigt. Ist weiter $w = f_2(z) \in S_2$ und $f_2(z) \neq z$, dann ist der Rand $\Gamma_2(r)$ ($0 < r < 1$) von $G_2(r)$ eine analytische Kurve ohne mehrfache Punkte. Es sei $m_2(r) = \min |f_2(z)|$, $M_2(r) = \max |f_2(z)|$ in $|z| < r$. Im Ring $m_2(r) < |w| < M_2(r)$ hat jeder Kreis $|w| = x$ mit $F_2(r)$ eine endliche Anzahl von Punkten gemeinsam, also liegen auf ihm eine endliche Anzahl von Bögen L_k ($k = 1, \dots, n$) mit den Enden $w_1^{(k)}, w_2^{(k)}$. Es sei $\Theta_2(x, r)$ das größte unter den Bogenmaßen von L_k . Den Bögen L_k entsprechen auf $|z| = r$ Bögen l_k mit Enden $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}$, wo die Bögen so gewählt werden, daß ihre Länge $\leq \pi r$ ist. Das größte der Bogenmaße der l_k werde mit $\Phi(x, r)$, mit der Zusatzdefinition $\Phi = 0$ für $0 < x \leq m_2(r)$ und $\Phi = \pi$ für $M_2(r) \leq x$, bezeichnet. Es sei weiter $x_0^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{r}{1-r^2} \frac{r}{f_2 \in S_2} M_2(r) =$

$$M_2^*(r) = \frac{r}{1-r^2}, r_0 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}. \text{ Die Wurzel der Gleichung } M_2^{*2}(\sqrt{r}) = x_0^2, \text{ dann wird gezeigt: Es}$$

ist für $x^2 \geq x_0^2$ $\Phi(x, \sqrt{r}) > \pi/2$ und für alle r mit $r_0 \leq r < 1$ und $x_0^2 \leq x^2 \leq M_2^{*2}(\sqrt{r})$ ist $x^2 \leq r(1-r)^{-2} (1+r^2 - 2r \cos(\Theta_2(x, \sqrt{r})))$. Das Gleichheitszeichen gilt nur für $f_2^*(z) = z/(1+\varepsilon z^2)$ ($|\varepsilon| = 1$). Für die Funktionen $w = f_k(z) \in S_k$ zeigt man sofort eine analoge Abschätzung, wenn man beachtet, daß $f_k^{k/2}(z^{k/2})$ ein f_2 ist. Ist nun weiter $s_k^{(1)}(r)$ der Flächeninhalt von $G_k(r)$ in $|w| \leq u_0$ ($u_0 = x_0^2$) und $s_k^{(2)}(r) = s_k(r) - s_k^{(1)}(r)$, dann ist für $r_0 \leq r < 1$ für jedes $f_k \in S_k$ $s_k^{(2)}(r^{1/k}) \leq s_k^{(2)}(r^{1/k})$ wo s^* zu $f_k^*(z) = (f^*(z))^{1/k}$ ($f^*(z) = \frac{z}{(1+\varepsilon z^2)^2}, |\varepsilon| = 1$) gehört. Ist $\tau_k(r)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f_k(rz)| |dz|, \Omega_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f_k(rz)|^2 |dz|, \text{ dann ist } \lim_{r \rightarrow 1} \sup_{f_k \in S_k} \frac{s_k(r^{1/k})}{s_k^{(1/k)}(r^{1/k})} = 1 \text{ und das}$$

gleiche gilt für τ_k ($k = 1, 2$) und Ω_k ($1 \leq k \leq 4$). Daraus kann für $f \in S$ gefolgert werden, daß

$$\limsup_{r \rightarrow 1} \sup_{f \in S} \frac{|c_n| r^n}{\sum n r^n} = \limsup \frac{\sum |c_n| r^n}{\sum n^2 r^n} = 1, s_2(\sqrt{r}) < \frac{r(1+r^2)}{(1-r^2)^2} + 0,4 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}, \tau_1(r) < \frac{r}{1-r^2}$$

+ 0,65 r , also $|c_n| < (e/2)n + 1,8$. — Im zweiten Teil wird an einem Beispiel gezeigt, daß die Abschätzung von T. H. Gronwall [Proc. nat. Acad. Sci. USA 6, 301–303 (1920)] für Funktionen $f(z) \in S_{|c_1|}$ nicht richtig ist, und es werden unter anderen die Abschätzungen ($r = |z|$):

$$|f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} - |c_2 + f^{-1}(z)| \right)^2 \right\} \text{ und für } |c_2| < 2 \text{ für } |f| \text{ bzw. } |f'| \text{ die Schranken}$$

$$\frac{r}{(1-r)^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (2 - |c_2|)^2 r^2 \right\} \text{ bzw. } \frac{1+r}{(1-r)^3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (2 - |c_2|)^2 r^2 \right\} \text{ angegeben. Im dritten Teil}$$

werden die Klassen S_n^* und S_n betrach. et. W. Rogosinski (dies. Zbl. 20, 376) hatte die Vermutung ausgesprochen, daß $|a_n^*| \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$) ist und daß die Schranken nur für $f_n^*(z) = \eta z^n, |\eta| = 1$, angenommen werden. Für $n = 1$ und 2 wurde die Vermutung von ihm bewiesen. Die Verff.

beweisen nun diese Vermutung, und zwar beweisen sie zwei Sätze, die auch für sich von Interesse sind. Bildet die reguläre und schlichte Funktion $w = f(z)$ in $|z| < 1$, den Kreis $|z| < 1$ auf einen Bereich D mit analytischer Randkurve ab, so wird der Flächeninhalt mit $s(f(z))$ bezeichnet. Ist $w = F(\zeta)$ schlicht und regulär in $|\zeta| > 1$ (außer mit einem Pol in $\zeta = \infty$) und ist P' das Komplement zum Bild von $F(\zeta)$ (welches wieder eine analytische Randkurve besitzen möge), so wird sein Flächeninhalt mit $s(F(\zeta))$ bezeichnet. Sind die Randkurven nicht analytisch, so kann auch $s(f)$ bzw. $s(F)$ definiert werden, z. B. $s(f) = \lim_{r \rightarrow 1-0} s(f(rz))$. Sind weiter $s(r), \sigma(r),$

$$s_2(r), \sigma_2(r) \text{ die so definierten Flächeninhalte zu } f(rz), F(r^{-1}\zeta) = f^{-1}(\zeta^{-1}), f_2(rz) = (f(z^2))^{1/2}, F_2(\zeta) = (F(\zeta^2))^{1/2}, \text{ so sei } s = \lim_{r \rightarrow 1-0} s(r). \text{ Analog sind } \sigma, s_2, \sigma_2 \text{ definiert. Dann werden die Sätze}$$

bewiesen. I. Ist $f(z) \in S$ und in $|z| < 1$ beschränkt, dann ist $\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f(z)| |dz| \leq \sqrt{\frac{s_2}{\sigma_2}}$, wo das Gleichheitszeichen nur für $f(z) \equiv z$ möglich ist. II. Für die $f_R^*(z) \in S_R^*$ gilt $\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f_R^*(z)| |dz| \leq 1$. Daraus folgt sofort der Beweis der Vermutung. Die Hauptschwierigkeit bildet Satz I. Man sieht sofort, daß die linke Seite der Ungleichung des Satzes I gleich $\int_0^1 \frac{s_2(\sqrt{r})}{r} dr$ ist. Setzt man $\sigma_2 s_2(\sqrt{r})/r = \psi(r)$, $\sigma_2 s_2 = A = \psi(1)$, so schreibt sich Satz I so: $\int_0^1 \psi(r) dr \leq \sqrt{A}$. Man sieht leicht, daß $A \geq 1$ ist. Es werden die Fälle $A \leq 16$ und $A \geq 16$

unterschieden. Es ist $\psi(r) \leq \sigma_2 \left[1 - (1 - \sigma_2)^{1/2} \left(\frac{1}{2} r \ln \frac{1+r}{1-r} \right)^{1/2} \right]^2$, bzw. $\leq \left(1 - \frac{1}{2} r \ln \frac{1+r}{1-r} \right)^{-1}$, wenn die Ausdrücke in den Klammern im Nenner positiv sind und $\sigma_2 \leq 1 - |c_2|^2/4$. Der schwierigste Teil ist der Nachweis, daß $\psi(r) \leq 0,4/(1-r)^2$ für $0,6 \leq r < 1$ ist. Die Verff. studieren noch einige weitere Klassen, für welche ähnliche Sätze wie I und II gelten. *Edmund Hlawka.*

Gachov, F. D.: Über singuläre Fälle der Riemannschen Randwertaufgabe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 705—708 (1951) [Russisch].

Referat s. dies. Zbl. 41, 48.

Ŷŧŧŧŧ, Zuiman: On the Riemann surface, no Green function of which exists. Math. Japon. 2, 61—68 (1951).

Es sei F eine auf der z -Ebene gelegene Riemannsche Fläche, auf der keine Green'sche Funktion existiert. Verf. beweist, daß F dann jeden Punkt der z -Ebene, mit Ausnahme einer Punktmenge von der Kapazität Null, entweder unendlich oft oder eine bestimmte Anzahl von Malen bedeckt. Von den Verallgemeinerungen des Satzes sei folgende erwähnt: Wenn P_1 ein gewöhnlicher, auf $z = z_1$ liegender Punkt der Riemannschen Fläche F obiger Art ist, so enthält F jede Gerade $z = z_1 + r e^{i\theta}$, welche keinen Verzweigungspunkt trifft, mit Ausnahme von Geraden, deren θ -Werte eine Nullmenge bilden. *Kaarlo Veikko Paatero.*

Ozawa, Mitsuru: On classification of the function-theoretic null-sets on Riemann surfaces of infinite genus. Kodai math. Sem. Reports 1951, 43—44 (1951).

Sei $g(z)$ eine ganze Funktion, welche unendlich viele reelle Nullstellen hat, und \mathfrak{F} die durch die Relation $y^m = g(z)$ definierte m -blättrige Riemannsche Fläche. Sei E_1 eine abgeschlossene Punktmenge in \mathfrak{F} und E_0 ihre Projektion PE_1 in der komplexen Ebene F . Es seien ferner E_ν ($\nu = 2, \dots, m$) $m-1$ mit E_1 kongruente Mengen, so daß $PE_\nu = E_0$. Man setze $\prod_{\nu=1}^m E_\nu = E_{1,s}$ und $PE_{1,s} = S_{E_1}$. Verf. beweist folgenden Satz: Damit jede in $\mathfrak{F} - E_1$ beschränkte analytische Funktion in die Menge E_1 analytisch fortgesetzt werden kann, ist es notwendig und hinreichend, daß jede in $F - S_{E_1}$ beschränkte analytische Funktion in S_{E_1} fortgesetzt werden kann. Derselbe Satz gilt für die Funktionen mit beschränktem Dirichlet-Integral. *Kaarlo Veikko Paatero.*

Nagura, Shohei: Kernel functions on Riemann surfaces. Kodai math. Sem. Reports 1951, 73—76 (1951).

F sei eine abstrakte Riemannsche Fläche, $K(z, \zeta)$ und $\tilde{K}(z, \zeta)$ die Bergmann'schen Kernfunktionen für die Klassen der Ableitungen derjenigen regulären Funktionen auf F mit endlichem Dirichlet-Integral, die eindeutig sind bzw. eindeutigen Realteil besitzen; schließlich sei $k(z, \zeta)$ die Szegö'sche Kernfunktion für die Klasse der auf F eindeutigen, regulären und beschränkten Funktionen im Falle, daß F schlicht ist. — Das identische Verschwinden einer dieser Kernfunktionen ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Nicht-Existenz nicht-konstanter regulärer Funktionen auf F , die endliches Dirichlet-Integral besitzen und eindeutig sind, bzw. endliches Dirichlet-Integral und eindeutigen Realteil besitzen, bzw. beschränkt und eindeutig sind. — Aus $k(z, \zeta) = 0$ folgt $K(z, \zeta) = 0$. *H. Tietz.*

Tsuiji, Masatsugu: A theorem of Bloch type concerning the Riemann surface of an algebraic function of genus $p \geq 0$. Kōdai math. Sem. Reports 1951, 77 (1951).

Soit $w = f(z)$ une fonction algébrique de genre $p \geq 0$ et soit F sa surface de Riemann étendue sur la sphère K de la variable z . La surface F contient un disque sphérique simple qui est vu du centre de K sous l'angle $\pi/(p+1)$ si $p \geq 1$, sous l'angle $2\pi/3$ si $p = 0$.

Jacques Dufresnoy.

Mori, Akira: On the existence of harmonic functions on a Riemann surface. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I 6, 247—257 (1951).

The author considers relations between the existence of certain harmonic functions on an open Riemann surface R and on a boundary neighborhood G . He re-establishes, or extends to neighborhoods with a non compact relative boundary, a number of theorems of Bader and Parreau (this Zbl. 42, 85), Royden (this Zbl. 43, 84), Virtanen (this Zbl. 38, 236) and the reviewer [this Zbl. 37, 56 and 11. Skand. Mat. Kongr. Trondheim 1949, 229—238 (1950)]. The essential content of these theorems can be expressed in the following form: There are no harmonic bounded or Dirichlet bounded functions on R if and only if every such function u in G with $\int d\bar{u} = 0$ along the relative boundary satisfies the condition $u \equiv L_0 u$ [Trans. Amer. math. Soc. 72, 281—295 (1952)].

Leo Sario.

Kuroda, Tadashi: Notes on an open Riemann surface. Kōdai math. Sem. Reports 1951, 61—63 (1951).

Existence problems on non-compact subregions of an open Riemann surface are investigated. Theorems, well known for subregions with compact relative boundary, are extended to the case of a non-compact relative boundary.

Leo Sario.

Kuroda, Tadashi: Some remarks on an open Riemann surface with null boundary. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 182—186 (1951).

Let $\{F_n\}$ be an exhaustion of an arbitrary open Riemann surface F and let Γ_n be the boundary of F_n . In $F_{n+1} - F_n$, let x be the harmonic function, determined by $x = 0$ on Γ_n , $x = \log \sigma_n$ = const. (> 0) on Γ_{n+1} , such that $\int d\bar{x} = 2\pi$. The author considers the following type criterion of the reviewer (this. Zbl. 35, 50). If there exists such an exhaustion $\{F_n\}$ that $\pi \sigma_n$ diverges, then the surface is of parabolic type. Noshiro (this Zbl. 43, 301) proved that this condition is also necessary. The author reproves Noshiro's result. He also re-establishes that parabolic type implies the non-existence of harmonic bounded or harmonic „Dirichlet bounded“ functions. — The author refers to the interesting question about the origin of „nullbounded“ surfaces. The historical background is as follows. By his mapping theorem, based upon the existence or non-existence of the Green's function, Riemann introduced the division of open surfaces into two types which are at present termed parabolic and hyperbolic. In the last section of his Inaugural Dissertation, Riemann specifically states that his reasoning is not restricted to the case of simply-connected surfaces. The notion (not the name) „harmonic measure“ was introduced by Schwarz in 1890 (Ges. Werke, vol. II, p. 360). There $\chi/2\pi$ is the harmonic measure, used for giving to the Poisson integral the elegant form $\frac{1}{2\pi} \int f(\theta) d\chi$. The current notation $\omega(\cdot, \gamma, D)$ for the harmonic measure was introduced by Beurling in his Dissertation (1933; this Zbl. 8, 318) on p. 26. A year after this extensive investigation on the subject, ω was named „harmonic measure“ by Nevanlinna (this Zbl. 12, 78). The later application of Schwarz-Beurling's harmonic measure for defining the „nullbounded“ surfaces repeats Riemann's classification (this. Zbl. 37, 56). This equivalence is also reproved in the present paper.

Leo Sario.

Bader, Roger: Différentielles sur une surface de Riemann ouverte. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1564—1565 (1951).

The author attacks the problem of analytic differentials of second and third kind on an open Riemann surface S . Let \tilde{E}_a be the space of analytic differentials with no other singularities than poles on S and with a finite Dirichlet integral over any domain outside the poles. The subspace of regular differentials $\in \tilde{E}_a$ is denoted by E_a . The following theorem is announced. Every differential $\Omega \in \tilde{E}_a$ on S has

two orthogonal components: the one, $\varphi \in \dot{E}_a$, is the limit of Schottky differentials of an exhaustion of S and has, in a specified sense, periodicity and singularity properties of Ω ; the other, $\Omega - \varphi \in E_a$. Two lemmas on differentials with a finite number of poles in a compact subdomain of S are, in addition, reported, in extension of a related lemma of Ahlfors [Commentarii Math. Helvet. 24, 100–134 (1950)].

Leo Sario.

Schiffer, M. and D. C. Spencer: A variational calculus for Riemann surfaces. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 93, 9 S. (1951).

In weitgreifender Verallgemeinerung einer von den Verff., z. T. zusammen mit Schaeffer, entwickelten Variationsmethode, wird hier die Frage behandelt, wie sich gewisse interessante Funktionale auf einer Riemannschen Fläche ändern, wenn diese hinsichtlich ihres topologischen oder konformen Typus geändert wird (die früheren Untersuchungen betrafen nur die zweite Frage). Bei der grundlegenden Wichtigkeit der Greenschen Funktion erscheint eine Beschränkung auf diese zunächst berechtigt. Es werden folgende Abänderungen in Betracht gezogen: I. Ausstanzen von Löchern. II. Anbringen von Henkeln. III. Anbringen von Kreuzhauben. IV. Ausstanzen eines Loches und Ausfüllen desselben durch Identifizierung seines Randes mit dem einer beliebigen Zelle. Diese letzte Operation bedeutet natürlich nur eine konforme Abänderung. — Die Formeln werden mitgeteilt und ihre Herleitung wird skizziert. Eine ausführliche Darstellung in Buchform wird angekündigt.

Helmut Grunsky.

Jenkins, James A.: On a theorem of Spencer. J. London math. Soc. 26, 313–316 (1951).

Ist $w = f(z)$ mit $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ in $|z| < 1$ regulär, so bezeichne W^* das größte $f(0)$ enthaltende, in bezug auf diesen Punkt sternförmige Teilgebiet der durch $f(z)$ erzeugten Riemannschen Fläche, Z^* das Urbild von W^* . Für die Flächeninhalte gilt dann die Ungleichung $A(Z^*) A(W^*) \geq \pi^2$, was Spencer [Proc. nat. Acad. Sci. USA 26, 616–621 (1940)] im Anschluß an Goluzin, Bermant und Ref. bewiesen hat. Das wird hier aufs neue bewiesen und in naheliegender Weise verallgemeinert, indem an Stelle des Flächeninhaltes gewisse Mittelwerte des Randabstandes von W^* vom Nullpunkt herangezogen werden.

Nehari, Zeev: Bounded analytic functions. Bull. Amer. math. Soc. 57, 354–366 (1951).

Bericht über neuere Untersuchungen betreffend eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Bereichen.

Helmut Grunsky.

Nehari, Zeev: On the numerical computation of mapping functions by orthogonalization. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 369–372 (1951).

Bedeutet $K(z, \zeta)$ die Szegö'sche Kernfunktion für ein analytisch berandetes ebenes Gebiet D (das auch mehrfach zusammenhängend sein darf), so existiert nach Garabedian (dies. Zbl. 35, 54) eine in D bis auf $z = \zeta$ reguläre Funktion $L(z, \zeta) = 2\pi/(z - \zeta) + \dots$ mit $L(z, \zeta) ds = -i K(z, \zeta) dz$ auf dem Rande. Unter wesentlicher Benutzung dieser Funktion gewinnt Verf. eine Restabschätzung für die Teilsummen der Bilinearentwicklung von K nach einem vollständigen Orthogonalsystem.

Helmut Grunsky.

Bundscherer, N.: Über die konforme Abbildung gewisser rechtwinkliger Achtecke. Z. angew. Math. Mech. 31, 370–387 (1951).

Von Bergmann [Z. angew. Math. Mech. 5, 319–331 (1925)] stammt die Abbildung gewisser rechtwinkliger Sechsecke auf die obere Halbebene. Verf. gelingt in Verallgemeinerung Bergmann'scher Ansätze die Abbildung rechtwinkliger Achtecke mit Mittelpunkt, von denen drei Seiten beliebig vorgegeben werden können, während die vierte Seite durch die anderen bestimmt ist. Das hyperelliptische Integral, das sich nach der Schwarz-Christoffelschen Formel für die Abbildungs-

funktion ergeben muß, wird hier mittels geometrischer Überlegungen als Summe zweier elliptischer Jacobischer Normalintegrale erster Art, von denen jedes die obere Halbebene auf ein Rechteck mit diametralen geradlinigen Schlitzten abbildet, gewonnen. Auf Grund dieses Verfahrens ist es möglich, für ein vorgeschriebenes Achteck mit den genannten Eigenschaften das Parameterproblem vollständig zu lösen und die Abbildung der oberen Halbebene auf solche vorgegebenen Treppenaechtecke praktisch durchzuführen. Das gelingt auch noch für gewisse ausgearbeitete Acht- und Sechsecke. Durch Spiegelung, ferner durch Zwischenschaltung einfacher Abbildungsfunktionen, wie der Inversion oder der Exponentialfunktion, erhält Verf. aus seinen Ergebnissen eine Fülle von komplizierteren, z. T. mehrfach zusammenhängenden Bereichen, die für die Anwendungen auf ebene Probleme der Strömungslehre, Elektrotechnik, Wärmeleitung und Torsion von praktischer Bedeutung sind.

Josef Heinhold.

Strebel, Kurt: Über das Kreisnormierungsproblem der konformen Abbildung. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 101, 22 S. (1951).*

Unter dem Kreisnormierungsproblem versteht man nach Koebe die Aufgabe, ein gegebenes Gebiet F der komplexen Ebene umkehrbar eindeutig und konform auf ein Gebiet G abzubilden, dessen jede Randkomponente ein Kreis oder ein Punkt ist. Koebe bewies für den Fall des endlichen Zusammenhanges durch ein iterierendes Verfahren Existenz wie Eindeutigkeit der Abbildung. Grötzsch und Sario erweiterten die Koebeschen Resultate für bestimmte Gebiete mit unendlich vielfachem Zusammenhang. Verf. behandelt eine weitere Klasse von Gebieten mit unendlich vielen, auch nicht-punktförmigen Häufungsrandkomponenten, für die er im wesentlichen zwei Eindeutigkeitssätze und einen Existenzsatz aufstellt. In den Eindeutigkeitssätzen wird als 1. Bedingung die Abzählbarkeit der Randkomponenten gefordert und in einer 2. wird die Zuordnung der entsprechenden Randkomponenten festgelegt. Unter diesen Bedingungen ist die gesuchte Abbildung bis auf eine lineare Transformation bestimmt. Unter den Forderungen, daß die Menge der Randkomponenten eines Gebietes F abzählbar und daß jeder Häufungspunkt von Randkomponenten im Sinne von Grötzsch vollkommen punktförmig sei, läßt sich die Existenz einer Abbildung von F auf ein Kreisgebiet beweisen. *H. P. Künzi.*

Davis, Philip and Henry Pollak: A theorem for kernel functions. *Proc. Amer. math. Soc. 2, 686—690 (1951).*

Let B be a domain such that at every boundary point z_1 there exists a circle exterior to B and passing through z_1 . Let $K_B(z, t)$ be the kernel function of B . Then $1/r_B(z) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (e/n) [K_B^{n,n}(z, \bar{z})]^{1/2n}$ where $r_B(z)$ is the shortest distance from

the point z to the boundary of B and $K_B^{m,n}(z, \bar{t}) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m \partial \bar{t}^n} K_B(z, \bar{t})$. For the case of simply-connected domain the quantity $r_B(0)$ is given in terms of the coefficients of the mapping function of the domain onto the unit circle. *Jerzy Górski.*

Tsuji, Masatsugu: A deformation theorem on conformal mapping. *Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 7—12 (1951).*

Soit D un domaine simplement connexe contenant $z = 0$ dans son intérieur et $z = \infty$ sur la frontière composée d'un nombre dénombrable des courbes s'étendant vers l'infini dans les deux directions. Supposons que le produit $D \times \{|z| = r\}$, où $r > r_0 > 0$ soit composé d'un nombre fini $n(r)$ d'arcs et désignons par θ_r la somme (et en même temps la longueur totale) de ceux de ces arcs qui séparent les points $z = 0$ et $z = \infty$ dans D . En généralisant un résultat de L. Ahlfors l'A. démontre que: Lorsque $w = f(z)$ représente conformément le domaine D sur le cercle $|w| < 1$ et $f(0) = 0$, l'image $f(\theta_r)$ de θ_r peut être enfermée dans un nombre fini de cercles coupant orthogonalement la circonférence $|w| = 1$ et

tels que la somme de leurs rayons est plus petite que $\text{const.} \exp \left(-\pi \int_{r_0}^{kr} \frac{dr}{\theta_r} \right)$, où $0 < k < 1$. D'autre part, la mesure harmonique $u_r(z)$ de θ_r par rapport au domaine $D_r = D \times \{|z| < r\}$ satisfait dans l'ensemble $D \times \{|z| \leq \varrho\}$ l'inégalité $u_r(z) \leq C(\varrho) \cdot \exp \left(-\pi \int_{r_0}^{kr} \frac{dr}{\theta_r} \right)$. Une application de cette inégalité à la généralisation du théorème de Phragmén-Lindelöf est donnée.

F. Leja.

Tsuji, Masatsugu: A theorem on the majoration of harmonic measure and its applications. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 13—23 (1951).

Soit D un domaine plan borné limité par des courbes analytiques, D_R un des domaines contenus dans le produit $D \times \{|z| < R\}$, θ_R la partie de la frontière de D_R située sur la circonférence $|z| = R$ et $u(z) = u_R(z)$ la mesure harmonique de θ_R par rapport au domaine D_R . L'A. démontre une inégalité pour la fonction $u(z)$ et donne quelques applications de cette inégalité à l'étude des propriétés frontalières des fonctions analytiques (théorème de Phragmén-Lindelöf) et harmoniques (régularité des points-frontière dans le problème de Dirichlet).

F. Leja.

Gerber, Robert: Sur une condition de prolongement analytique des fonctions harmoniques. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1560—1562 (1951).

L'A. établit la possibilité de prolonger une fonction holomorphe $\varphi(z)$ d'un côté d'un arc analytique, à travers cet arc, sous les conditions suivantes: φ admet une limite sur l'arc $f(s) + i g(s)$, f et g sont bornées, g admet g' bornée et égale d'une fonction analytique de f , g et de l'arc s . On commence par démontrer de proche en proche que f et g admettent des dérivées successives. Application à l'écoulement des liquides parfaits pesants: analyticité de la ligne libre.

Marcel Brelot.

● **Schmidt, Klaus:** Über die Existenzgebiete regulärer Quaternionenfunktionen. (Schriftenreihe des Math. Inst. der Universität Münster. Heft 4.) Münster: Max Kramer 1951. IV, 41 S.

Da reguläre Quaternionenfunktionen mit beliebigen, punktwisen Singularitäten existieren, kann nach einem aus der klassischen Funktionentheorie bekannten Verfahren gezeigt werden, daß jedes Gebiet des vierdimensionalen Raumes Regularitätsgebiet ist. Für die Quaternionenfunktionen von zwei Quaternionenvariablen zeigt es sich, daß die Definition der Regularität nur sinnvoll ist, wenn in der einen Variablen Links-, in der andern Rechtsregularität gefordert wird. In dieser Funktionenklasse ist nun — wie im Falle der analytischen Funktionen von zwei komplexen Variablen — die Regularitätskonvexität eine — allerdings nur notwendige — Bedingung für die Regularitätsgebiete. Nach Ansicht des Ref. ist es daher abwegig, Funktionen von mehreren Quaternionenvariablen zu betrachten, da die Einführung der hyperkomplexen Funktionen unter anderem ja gerade bezweckt, die bekannten Anomalien der Funktionentheorie von mehreren komplexen Variablen auszuschalten.

Adolf Kriszten.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Kulik, S.: Linear difference equations with boundary conditions. Proc. London math. Soc., II. Ser. 53, 331—344 (1951).

Die Funktion $y(\xi)$ sei für $\xi = 0, 1, \dots, n \geq \kappa$ definiert und erfülle zugleich die Differenzengleichung $p_0(x) y(x + \kappa) + p_1(x) y(x + \kappa - 1) + \dots + p_\kappa(x) y(x) = U(x)$. Dabei sind die $p_\lambda(x)$ und $U(x)$ für $x = 0, 1, \dots, n - \kappa$ gegeben, und es wird dort insbesondere $p_0(x) \neq 0$ vorausgesetzt. Dazu sollen die Werte $y(\xi)$ ($\xi = 0, 1, \dots, n$) noch den κ Bedingungsgleichungen

$$\alpha_{r0} y(0) + \alpha_{r1} y(1) + \dots + \alpha_{rn} y(n) = \beta_r \quad (r = 1, \dots, \kappa)$$

genügen, wobei die $\alpha_{r\mu}$ und β_r Konstanten sind, von denen in jeder Zeile mindestens eine nicht Null wird. — Zunächst wird der homogene Fall $\beta_r = 0$ ($r = 1, \dots, \kappa$)

gelöst. Hierzu wird eine Art „Greenscher Funktion“ definiert und unter Anwendung der Matrizenrechnung ein Ausdruck für $y(\xi)$ gewonnen. Beim inhomogenen Fall wird statt der Funktion $y(\xi)$ eine Funktion $y(\xi) + \psi(\xi)$ untersucht, wobei $\psi(\xi)$ so gewählt wird, daß die für $y(\xi)$ inhomogenen Bedingungsgleichungen sich zu homogenen Bedingungsgleichungen für $y(\xi) + \psi(\xi)$ wandeln. Auch dem Fall singulärer Matrizen sind einige Ausführungen gewidmet. Weiter wird der Spezialfall der „symmetrischen Lösung“ mit den Bedingungsgleichungen $y(0) = y(n)$, $y(1) = y(n-1), \dots, y(n-1) = y(n-n+1)$ betrachtet. Zuletzt gibt Verf. noch eine Näherungslösung für $y(\xi)$ an. — Die Arbeit ist ein Beitrag zur Behandlung von Differenzengleichungen mit Methoden aus der Theorie der Differentialgleichungen.

Hans Töpfer.

Germa, R. H. J.: Application de la méthode des fonctions majorantes à la théorie des systèmes d'équations récurro-différentielles. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 2—13 (1951).

L'A. tratta col metodo delle funzioni maggioranti nel campo analitico il sistema di infinite equazioni differenziali di tipo ricorrente $dy_n/dx = F_n(x, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+q})$, ($n = 1, 2, \dots$) dove le $y_n = (y_{n1}, \dots, y_{np})$ indicano una successione di incogniti vettori a p dimensioni, funzioni di x , ai quali è prescritto di ridursi a un dato vettore per $x = x_0$.

Gianfranco Cimmino.

Germa, R. H.: Sur les intégrales infiniment voisines des systèmes d'équations récurro-différentielles. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 238—248 (1951).

Germa, R. H.: Sur les dérivées, par rapport aux paramètres, des intégrales infiniment voisines des systèmes d'équations différentielles récurrentes. — Généralisation des équations aux variations de Poincaré. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 333—346 (1951).

Il sistema di equazioni differenziali indicato nella precedente recensione viene considerato qui nel campo reale, sotto opportune ipotesi (condizioni di Lipschitz) sulle F_n , atte ad assicurare l'esistenza e l'unicità della soluzione verificante date condizioni iniziali, e supponendo inoltre che le F_n medesime dipendano altresì da s parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Viene studiata la dipendenza della soluzione dai parametri e indicata l'estensione al caso in esame della nozione di equazioni alle variazioni secondo Poincaré.

Gianfranco Cimmino.

Bruwier, L.: Sur l'équation récurro-différentielle du premier ordre, de forme normale. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 158—166 (1951).

Per un sistema di infinite equazioni differenziali del tipo

$$y'_n(x) = F_n(x, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+q}), \quad (n = 1, 2, \dots)$$

sotto opportune ipotesi sulle funzioni F_n (condizioni di Lipschitz), viene dimostrata la convergenza verso una soluzione verificante le condizioni iniziali $y_n(x_0) = y_0$ della successione di approssimazioni successive definite da

$$y'_{np}(x) = F_n(x, y_{np}, y_{n+1, p-1}, \dots, y_{n+q, p-1}), \quad y_{np}(x_0) = y_0, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

dove la prima approssimazione si può scegliere arbitrariamente e ogni altra si ottiene dalla precedente, risolvendo un'equazione differenziale ordinaria con prescritta condizione iniziale.

Gianfranco Cimmino.

Segers, Jack G.: Sur les dérivées d'ordre supérieure des intégrales d'une équation récurro-différentielle. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 114—119 (1951).

Delle condizioni di derivabilità per le funzioni F_n secondi membri della successione di equazioni differenziali indicata nella recensione precedente portano di conseguenza delle proprietà di derivabilità per le funzioni $y_n(x)$ soluzioni delle equazioni stesse.

Gianfranco Cimmino.

Hukuhara, Masuo: Le problème aux limites d'un système de deux équations différentielles ordinaires. J. math. Soc. Japan. 3, 99—103 (1951).

Sind $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ für $a \leq x \leq b$, $-\infty < y, z < +\infty$ stetig und beschränkt, so ist trivial, daß die Differentialgleichungen

$$y'(x) = f(x, y, z), \quad z'(x) = g(x, y, z)$$

eine Lösung mit $y(a) = z(b) = 0$ haben. Verf. beweist die Existenz solcher Lösungen unter folgenden Voraussetzungen: (a) $S_\nu(y, z)$ ($\nu = 1, 2$) ist in der ganzen y, z -Ebene stetig und ≥ 0 , $S_\nu(\alpha y, \alpha z) = \alpha S_\nu(y, z)$ für $\alpha \geq 0$, $S_\nu(y, z) = 0$ nur für $y = z = 0$; sind $y(x), z(x)$ in $[a, b]$ differenzierbar, so ist $S_\nu(y(x), z(x))$ sowohl nach rechts als auch nach links differenzierbar, und es ist

$$D_\pm S_\nu(y(x), z(x)) \leq S_\nu(y'(x), z'(x)).$$

(b) $\omega_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2$) sind in $[a, b]$ stetig, > 0 , nach rechts und links differenzierbar, und es ist

$$\frac{S_1(0, z)}{\omega_1(a)} \leq \frac{S_2(0, z)}{\omega_2(a)}, \quad \frac{S_1(y, 0)}{\omega_1(b)} \geq \frac{S_2(y, 0)}{\omega_2(b)}.$$

(c) Ist

$$S(x, y, z) = \text{Max}_{\nu=1,2} \frac{S_\nu(y, z)}{\omega_\nu(x)}$$

und ist A_ν ($\nu = 1, 2$) die Menge der Punkte x, y, z mit $a \leq x \leq b$, $S_\nu(y, z)/\omega_\nu(x) = S(x, y, z) = 1$, so ist

$$\begin{aligned} D_\pm \omega_1(x) &> S_1(f(x, y, z), g(x, y, z)) \quad \text{für } (x, y, z) \in A_1, \\ -D_\pm \omega_2(x) &> S_2(-f(x, y, z), -g(x, y, z)) \quad \text{für } (x, y, z) \in A_2. \end{aligned}$$

Beispiele zur Beleuchtung der Tragweite des Satzes fehlen. *Erich Kamke.*

Richard, Ubaldo: Su un'equazione non lineare del secondo ordine. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **10**, 305—324 (1951).

Siano p, q, n reali, $p > 0$, $n > 0$, x variabile su $(0, \infty)$ e si consideri l'equazione

(1) $\frac{d}{dx} \left[x^p \frac{dy}{dx} \right] + x^q y^n = 0$, la quale se $p = 2$, $q = 0$ è la così detta equazione di Emden, e se $p = 2$, $q > 0$ l'equazione di Fowler. Il problema consiste nel trovare le soluzioni della (1) che soddisfano la condizione $y(0) = c > 0$. La (1), se $p > 1$, si riduce all'equazione di Fowler già studiata dal recensore (questo Zbl. **23**, 318) e basta quindi limitarsi ai casi $0 < p < 1$, $p = 1$. Se $0 < p < 1$ la soluzione cercata esiste se $q > -1$ e si annulla a distanza finita però non è univocamente determinata dalla condizione $y(0) = c$. Se $p = 1$, la soluzione esiste ancora se $q > -1$ ed è univocamente determinata dalla condizione $y(0) = c$; in questo caso $y(x)$ è decrescente e si annulla a distanza finita. — La (1) rientra come caso particolare nella classe di equazioni

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \left[P(x) \frac{dy}{dx} \right] + Q(x) y^n = 0, \quad y(0) = c > 0,$$

dove $P(x), Q(x)$ sono funzioni continue in $(0, \infty)$ per le quali sono soddisfatte le condizioni

$P(0) = 0$ e, per $x > 0$, $dP/dx > 0$, $Q(x) > 0$. Posto $J(a, b) = \int_a^b \frac{dt}{P(t)}$, $0 < a < b$, l'A. studia

i seguenti casi: i) $\lim_{a \rightarrow 0} J(a, b)$ esiste finito; ii) $\lim_{a \rightarrow 0} J(a, b) = \infty$ e $\lim_{b \rightarrow \infty} J(a, b)$ esiste finito;

iii) $\lim_{a \rightarrow 0} J(a, b) = \infty$ e $\lim_{b \rightarrow \infty} J(a, b) = \infty$. Ad es. nel caso iii) l'A. dimostra che se $\int_0^x Q(t) \left[\int_t^x \frac{du}{P(u)} \right] dt$

è finito esiste una ed una sola soluzione della (2), ed essa risulta decrescente e si annulla a distanza finita. Lo studio del caso ii) è ottenuto con la considerazione di una particolare forma F in y ed y' associata alla (2),

$$F = y^{n+1} \int_0^x Q(t) dt + P(x) y y' + \frac{n+1}{2} \frac{P(x) \int_0^x Q(t) dt}{Q(x)} - y'^2.$$

Giovanni Sansone.

Manacorda, Tristano: Sul comportamento asintotico di una classe di equazioni differenziali lineari non omogenee. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **6**, 304—311 (1951).

A. Wintner ha provato (questo Zbl. 33, 60) che l'integrale generale dell'

equazione (1) $u''(t) + f(t)u(t) = 0$, quando sia per $t \geq t_0$ (2) $\int_{t_0}^{\infty} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T f(t) dt$, (3) $\int_{t_0}^{\infty} \left\{ \max_{t \leq u < \infty} \left| \int_u^{\infty} f(s) ds \right| \right\} dt < \infty$ assume asintoticamente la forma $u(t) = c_1 t + c_2 + o(t)$, c_1, c_2 costanti, $t \geq t_0$. — L'A. considera qui l'equazione non omogenea (1') $x'' + f(t)x = \varphi(t)$ e, con lo stesso metodo di Wintner oppor-

tunamente adattato, dimostra che, posto $x_0(t) = \int_{t_0}^t (t - \tau) \varphi(\tau) d\tau$, $\psi(t) = -x_0(t)f(t)$ se $f(t)$ e $\varphi(t)$ sono funzioni continue per $t \geq t_0$ tali che sussistano le (2)

e (3) e, inoltre esista finito (4) $\int_{t_0}^{\infty} \psi(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T \psi(t) dt$ e sia (5) $\int_{t_0}^{\infty} \left| \int_{t_0}^{\infty} \psi(\tau) d\tau \right| dt < \infty$

l'integrale generale della (1') assume asintoticamente la forma (6) $x(t) = x_0(t) + c_1 t + c_2 + o(t)$, dove c_1 e c_2 sono costanti e $t \geq t_0$. La Nota termina con alcune osservazioni. Viene provato, fra l'altro, con considerazioni analoghe a quelle sviluppate da Wintner per l'equazione (1), che se $f(t)$ conserva sempre lo stesso segno, le (2), (3), (4), (5) divengono necessarie, oltre che sufficienti, perchè sussista la (6).

Landolino Giuliano.

Lueg, R., M. Päsler und W. Reichardt: Das Impulsintegral, ein Gegenstück zum Duhamelschen Stoßintegral. Ann. der Physik, VI. F. 9, 307—315 (1951).

Für eine Systemgröße $G(t)$ eines linearen Systems mögen bei Vorhandensein

einer Störung $S(t)$ die Differentialgleichung $\sum_{\nu=0}^n c_{\nu} \frac{d^{\nu} G}{dt^{\nu}} = S(t)$ und die Anfangs-

bedingungen $G^{(\nu)}(0) = G_0^{(\nu)}$ für $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ bestehen. Dann kann $G(t)$ (bei verschwindenden Anfangswerten) durch das Duhamelsche Integral $G(t) =$

$\frac{d}{dt} \int_0^t \Gamma_{\varepsilon}(\tau) S(t - \tau) d\tau$ dargestellt werden, wobei $\Gamma_{\varepsilon}(t)$ die Lösung $G(t)$ ist, falls man als $S(t)$ die Einheitssprungfunktion („Einheitsstoß“) wählt. Die Verff. bringen die Lösung auf die Form

$$G(t) = \int_0^t \Gamma_{\delta}(\tau) S(t - \tau) d\tau = \Gamma_{\delta}(t) * S(t)$$

(der Stern bedeutet in üblicher Weise die Faltung); dabei ist $\Gamma_{\delta}(t)$ die Lösung $G(t)$, wenn man als Störung $S(t)$ die von Physikern öfters verwendete δ -Funktion („Nadelimpuls“) wählt. Sind die Anfangswerte nicht Null, so kommt ein zweiter Anteil hinzu: $G(t) = \Gamma_{\delta} * S + \Gamma_{\delta} * G_f$, wobei G_f sich aus den Anfangsdaten berechnet. Es folgt eine anschauliche spektrale Deutung.

Lothar Collatz.

Putnam, Calvin R. and Aurel Wintner: Linear differential equations with almost periodic or Laplace transform coefficients. Amer. J. Math. 73, 792—806 (1951).

Les AA. étendent au cas d'une équation linéaire du n° ordre des résultats déjà obtenus pour le 2^e ordre (cf. A. Wintner, ce Zbl. 37, 342).

André Revuz.

McLachlan, N. W.: Non-linear differential equation having a periodic coefficient. Math. Gaz. 35, 32—36 (1951).

Die periodischen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + [a + b y^2 - 2 q \cos 2 z] y = 0,$$

welche die Querschwingungen einer Saite mit periodisch veränderlicher Spannung und einer elastischen Rückstellkraft $a y + b y^3$ beschreibt, werden für hinreichend kleine b und q mit Methoden der Störungsrechnung (Ansatz: $y = y_0 + b y_1 + b^2 y_2 + \dots$, $a = a_0 + a_1 b \varepsilon + a_2 b^2 \varepsilon^2 + \dots$; $\varepsilon = q/b$, $a_0 = 1$ bzw. 4 bzw. 9) untersucht. Die Aufschaukelung der Schwingungen, der Einfluß der Energiedissipation, Schwankungen in der Saitenlänge werden behandelt und numerische Details werden angegeben.

Josef Meixner.

Krejn, M. G.: Über die Anwendung eines algebraischen Satzes in der Theorie der Monodromiematrizen. *Uspechi mat. Nauk* 6, Nr. 1 (41), 171—177 (1951) [Russisch].

In a previous communication (this *Zbl.* 37, 206), the author has proved a certain theorem concerning Hermitian forms. As an immediate corollary of this theorem, he here proves the following. Let $G(x, x) = \sum_{j,k=1}^n g_{jk} \xi_j \bar{\xi}_k$ be an Hermitian form with signature $p - q$ (the condition $p + q = n$ is clearly intended but is omitted). Let the non-singular linear transformation $y = Ux$ be such that $G(Ux, Ux) > G(x, x)$ for all $x \neq 0$. Then n -dimensional complex Euclidean space E_n is the direct sum of subspaces L_+ and L_- invariant with respect to U . On L_+ , G is positive and U has characteristic values of absolute value > 1 ; on L_- , G is negative and U has characteristic values of absolute value < 1 . (The dimensions of L_+ and L_- are p and q respectively, which is obvious but not mentioned.) This algebraic theorem is applied to

obtain the following result. Let (1) $\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) \xi_k$ ($i = 1, 2, \dots, n$) be a system of differential equations in which the functions a_{ik} have period η and are in $L_1(0, \eta)$. In matrix form, (1) becomes: (2) $\frac{dx}{dt} = A(t)x$. As is known, an absolutely continuous solution of this equation

has the form $x(t) = U(t)x(0)$, where $dU/dt = A(t)U$. The characteristic values of the numerical matrix $U(\eta)$ are called the multipliers of the equation (2). Let \mathfrak{P}_n denote the set of all matrices $H(t)$ of period η such that for every $x \neq 0$ in E_n and almost all t , the inequality $H(t)(x, x) > 0$ holds. Then, if there exists a constant Hermitian matrix G of signature $p - q$ ($p + q = n$) such that $GA(t) + A^*(t)G \in \mathfrak{P}_n$, it follows that there are exactly p multipliers of (2) with absolute value > 1 and exactly q multipliers of (2) with absolute value < 1 . This result is applied to the case (3) $\frac{d^2y}{dt^2} + P(t)y = 0$ (Lyapunov's theorem). If $-[P(t) + P^*(t)] \in \mathfrak{P}_n$, then (3) has exactly n multipliers of absolute value > 1 and exactly n multipliers of absolute value < 1 . A number of analogous results, for various differential equations and hypotheses, are established as well.

Edwin Hewitt.

Obi, Chike: Periodic solutions of non-linear differential equations of the second order. IV. V. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 47, 741—751, 752—755 (1951).

IV. A detailed study of subharmonic solutions of non linear differential equations has been made by many mathematicians for the last 10 or 12 years. However the case of equations of the form $\ddot{x} + F(x, \dot{x}, \varepsilon, t) = 0$, where F is analytic and of least period $2\pi/\omega$ in t , but not linear in x and \dot{x} for $\varepsilon = 0$, has been little investigated and the paper under review is devoted to the determination of periodic solutions of equations of this type depending on several parameters, in particular equations of the form:

$$(1) \quad \ddot{x} + \chi(x, \dot{x}, t + \beta) = \sum_{i=1}^2 k_i f_i(x, \dot{x}, t + \beta) + f_3(x, \dot{x}, \varepsilon, t + \beta),$$

these solutions having a vertex (stationary value) at $x = \alpha, t = 0$. The author restricts himself to such solutions which reduce to a non constant periodic solution when $\varepsilon, k_1, k_2 \rightarrow 0$. — The author's method is inspired by a well known theorem of Poincaré. If $x = x_0(\alpha, \beta, t) +$

$\sum_{i=1}^2 k_i x_i(\alpha, \beta, t) + \dots$ is an expression of x as a power series in the parameters, x_0 is solution

of the equation (2) $\ddot{x} + \chi(x, \dot{x}, t + \beta) = 0$ and the x_i 's satisfy simple differential equations. Supposing that x_0, x_1, x_2 have been determined, two fundamental lemmas are established, the applications of which, of great interest, are developed in this and other papers of the author. — Let $\Omega(\alpha) = 2\pi q/\omega p$, where p and q are relatively prime integers, be the least period of a solution of (2). The first lemma states that if x , solution of (1), is periodic, its period is a multiple

of $p \cdot \Omega(\alpha)$. — Let ν denote an integer and $\zeta(\alpha, \beta)$ the determinant: $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}$ for the values

α, β , and $p\nu\Omega(\alpha)$ of the arguments. The second lemma states that to each ν and for α, β such that $\zeta(\alpha, \beta) \neq 0$ there exist values of k_1 and k_2 such that equation (1) has a periodic solution of the required type and of period $p\nu\Omega(\alpha)$; x, k_1, k_2 are analytic near $\varepsilon = 0$; the coefficients of the various powers of ε in $x(\alpha, \beta, \nu, \varepsilon, t)$ are separately periodic. — Some applications of these lemmas are studied in this paper, in particular (theorem 1) the case of $\chi = \chi(x, \dot{x}^2)$ and the case of $\chi = \chi(x)$. The more particular case of $\chi = x + 2x^3$ is investigated in detail. — One conclusion of great importance reached by author is that when equation (1) is made to depend on a unique parameter the number of its periodic solutions is cut out.

V. If van der Pol's equation is taken in the form

$$\ddot{x} - \varepsilon_1(1 - x^2)\dot{x} + x = k_1\dot{x} + k_2x + \varepsilon_2\cos\omega t$$

it is known that a necessary condition for subharmonic solutions to exist for all sufficiently small values of the parameters when it is not asymptotic to a constant for $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = k_1 = k_2 = 0$ is that ω should be rational. In the paper under review the author justifies Littlewood's conjecture that if only isolated and not all sufficiently small values of the parameters are considered ω needs not be rational. His proof depends on the two fundamental lemmas of part IV. It is easily seen that the determinant denoted by $\zeta(\alpha, \beta)$ there does not vanish. Further, at most a countable number of values of ε_1 , p and q may be determined so that the least period of the unique periodic solution of the equation $\ddot{x} - \varepsilon_1(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$ be of the form $2q\pi/p\omega$. Then it is shown that, whether ω is rational or not, values of k_1 and k_2 exist for which there is a periodic solution of the given equation with a vertex at $x = \alpha$, $t = \beta$. — The author points out that the same result holds for equations of a slightly more general type, the proofs depending, in exactly the same manner, on his two fundamental lemmas. C. Racine.

Sansone, Giovanni: Soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard. Calcolo del periodo. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 10, 155—171 (1951).

In a previous paper (this Zbl. 37, 190) the author has studied in detail the problem of the existence of periodic (non-zero) solutions of (1) $\ddot{x} + \omega f(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0$, $\omega > 0$, $f(x)$ being continuous for $-\infty < x < +\infty$. In particular, he has shown that a certain set of conditions on $f(x)$ is sufficient to assure the existence of at least one periodic solution of (1). In the present paper this result is extended to the case where $f(x)$ presents only discontinuities of the first kind [the solution of (1) being understood in a certain sense], the set of points of discontinuity having no limit point at a finite distance. Under this more general assumption on f other results are proved. Consider the equations

$$(1. i) \quad \ddot{x}_i + \omega f_i(x_i)\dot{x}_i + \omega^2 x_i = 0, \quad i = 1, 2$$

where f_1 and f_2 are as f (this guarantees that each one has at least one periodic solution); (1. i) are clearly equivalent to

$$(1. i)' \quad \dot{x}_i = dx_i/dt = \omega u, \quad du/dx_i = -f_i(x_i) - x_i/u, \quad i = 1, 2.$$

If one makes the additional assumption that $f_1(x) \leq f_2(x)$ and that (1. i)' has exactly one closed characteristic Γ_i then no point of Γ_1 is interior to Γ_2 . In certain cases where (1) has exactly one periodic solution a procedure for the numerical calculation of the period is indicated. M. M. Peixoto.

Barbašin, E. A.: Die Methode der Schnitte in der Theorie der dynamischen Systeme. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 233—280 (1951) [Russisch].

Let M be a manifold of class C^s with local coordinates (x_1, \dots, x_n) ; let (1): $\dot{x}_i = X^i(x_1, \dots, x_n)$ be a system of equations where the X^i are contravariant components of a vector field defined in M , belonging to the class C^r ($1 \leq r < s$); t is the independent variable and $f(p, t)$, $p \in M$, denotes the general solution of (1), $f(p, 0) = p$. A scalar function $\varphi(p)$ is „admissible“ if $\int_0^\infty \varphi[f(p, t)] dt$ and $\int_0^{-\infty} \varphi[f(p, t)] dt$ diverge; then $\tau = \int_0^t \varphi[f(p, t)] dt$ is a new admissible independent variable. (1) is „translation-like“ if given $p_1, p_2 \in M$, there are neighborhoods U_1, U_2 and a number $T > 0$ such that $f(U_1, t) \cap U_2 = \emptyset$ if $t > T$; then there is a homeomorphism of M into an Euclidean space such that the images of the trajectories of (1) are straight lines. A „section“ is a closed set F such that the trajectory of (1) starting at any point $p \in M$ intersects F in one and only one point q such that the time interval between p and q is arbitrarily small if p is close enough to F . — Typical results of Part I are: (1) is „translation-like“ if and only if a function $u \in C^r$ exists such that $u'_i = \Sigma(\partial u / \partial x_i) \cdot X^i$ is admissible (or even $u'_i = 1$); if (1) is „translation-like“ a section exists which is a manifold of class C^r . Other theorems are proved on the existence in the large of first integrals of an equation $\Sigma(\partial u / \partial x_i) \cdot X^i = 0$; on the existence of functions of Lyapunov of class C^r for systems having an invariant manifold which is asymptotically stable; on the characterization of uniformly dispersive systems (in an Euclidean E_n), i. e. systems for which there is an $R > 0$ such that for any $N > R$ there exists a $t_0 > 0$ such that $f(I(R), t) \supset I(N)$ if $t > t_0$ [$I(R)$ denotes the sphere $\Sigma x_i^2 < R^2$]. — In Part II the manifold M is supposed to be closed (compact) and orientable, $3 \leq r < s$. The form $\omega = \Sigma P_i dx_i$ (P_i : covariant components) is „closed“ if $\partial P_i / \partial x_k - \partial P_k / \partial x_i$, and „admissible“ if $\dot{\omega} = \Sigma P_i X^i > 0$. The closed set $F \subset M$ is a „section“ if there is an admissible change of the independent variable $t \mapsto \tau$ and a $T > 0$ such that for one and only one τ , $0 < \tau < T$, $f(p, \tau) \in F$. Then: if a closed admissible form $\omega \in C^{r-1}$ exists, there is a section which is a manifold

of class C^r ; if a section exists (no smoothness properties assumed), there is a closed admissible form $\omega \in C^{r-1}$. — All the fundamental results obtained in this paper are „rough“ in the sense of Andronow-Pontrjagin (this Zbl. 16, 113). José L. Massera.

Basov, V. P.: Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Stabilität der Lösungen einer gewissen Klasse von Systemen linearer Differentialgleichungen in einem zweifelhaften Falle. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 5—8 (1951) [Russisch].

Consider (1): $\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^n (p_{s\sigma} + t^{-\gamma} q_{s\sigma}(t)) x_\sigma$, where $p_{s\sigma}$ and $\gamma > 0$ are real constants and $q_{s\sigma}$ real continuous bounded functions defined for $t \geq T > 0$; assume that one of the characteristic roots of the matrix $(p_{s\sigma})$ vanishes, the others having negative real parts. Then the solution $x_s = 0$ is stable if and only if $\sup \psi(t) < +\infty$ and asymptotically stable if and only if $\psi(t) \rightarrow -\infty$ as $t \rightarrow +\infty$; $\psi(t)$ is a function which may be calculated explicitly. José L. Massera.

Gradštejn, I. S.: Eine Anwendung der Theorie der Stabilität von A. M. Ljapunov auf die Theorie der Differentialgleichungen mit kleinen Faktoren bei den Ableitungen. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 6 (46), 156—157 (1951) [Russisch].

The author compares the vector-systems

$$(A) \quad dx/dt = f(x, y, t), \quad 0 = h(x, y, t),$$

$$(B) \quad dX/dt = f(X, Y, t), \quad \eta dY/dt = h(X, Y, t),$$

and gives conditions in order that as $\eta \rightarrow +0$ a solution of (B) should tend to the solution of (A) with the same initial values, for $0 \leq t \leq T$ in the case of X and for $0 < t \leq T$ in the case of Y . The conditions include that the integral curve for (A) should belong for $0 \leq t \leq T$ to the interior of a certain region R in the (x, y, t) -space, characterised by $h(x, y, t) = 0$, by the non-vanishing of the Jacobian $D(h_1, \dots, h_n)/D(y_1, \dots, y_n)$, and by a specified property of uniform asymptotic stability for the system $du/d\tau = h(x^*, u, t^*)$; for the latter there is stated a criterion, based on Ljapunov's second method. A generalisation is indicated for systems involving two different powers of the small parameter. There are a few misprints.

Frederick V. Atkinson.

Gradštejn, I. S.: Eine Anwendung der Theorie der Stabilität von A. M. Ljapunov auf die Theorie der Differentialgleichungen mit kleinen Faktoren bei den Ableitungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 985—986 (1951) [Russisch].

This reports in rather less detail the work described in the lecture reviewed above. The author claims that his result includes essentially one of A. N. Tichonov [Mat. Sbornik, n. Ser. 27(69), 147—156 (1950)]. Frederick V. Atkinson.

Putnam, C. R.: On the least eigenvalue of Hill's equation. Quart. appl. Math. 9, 310—314 (1951).

In der Hillschen Differentialgleichung (1) $x''(t) + [\lambda + f(t)] x(t) = 0$ sei $f(t)$ eine reelle stetige Funktion der Periode 1 mit der Fourierreiheentwicklung (2) $f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n t}$. Der kleinste Wert μ des invarianten Spektrums von (1) im Sinne von H. Weyl [Math. Ann. 68, 222—269 (1910)] ist der kleinste Eigenwert von (1) mit Randbedingungen (3) $x(0) = x(Q)$, $x'(0) = x'(Q)$, wo Q eine beliebige natürliche Zahl. Daher ist (4) $\mu = \inf \left\{ \int_0^Q (x'^2 - f x^2) dt \int_0^Q x^2 dt \right\}$, wenn zur Konkurrenz alle reellen stetig differenzierbaren Funktionen mit (3) oder auch nur Q -periodische trigonometrische Polynome zugelassen werden. Letztere liefern obere Schranken für μ , in die die Koeffizienten (2) eingehen. Speziell erhält man für $Q = 2$, $x \equiv 1$, $x \equiv \sin \pi N t$, $x \equiv \cos \pi N t$ ($N = 1, 2, 3, \dots$) der Reihe nach die Schranken: $-c_0$, (5) $\pi^2 N^2 - c_0 + \Re(c_N)$, (6) $\pi^2 N^2 - c_0 - \Re(c_N)$. — Verf. geht, nach Ansicht des Ref., zur Herleitung derartiger Schranken für μ unnötig

umständlich vor, wenn er in (4) nur die trigonometrischen Polynome mit $x(0) = x(Q) = 0$ zuläßt und dafür Q variiert. Verf. gewinnt auf diese Weise nur (5) und erhält die Ergänzung (6) nur für den Fall, daß mit einem reellen c gilt $-f(t) = f(t + c)$.
Friedrich Wilhelm Schäfke.

Gelfand, I. M. und B. M. Levitan: Über die Bestimmung einer Differentialgleichung nach ihrer Spektralfunktion. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **15**, 309—360 (1951) [Russisch].

Let the function $q(x)$ be continuous for $0 \leq x < l$ and h be a real constant. Furthermore, let $\varphi(x, \lambda)$ be that solution of the differential equation

$$(1) \quad y'' + (\lambda - q(x)) y = 0$$

which satisfies the initial conditions (2) $\varphi(0, \lambda) = 1, \varphi'(0, \lambda) = h$. Then if boundary conditions of Weyl's type are prescribed at $x = l$, the relations (1) and (2) define a nondecreasing function

$$\varrho(\lambda) \text{ such that } (3) \int_0^l |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |E(\lambda)|^2 d\varrho(\lambda) \text{ holds for every function } f(x) \in L^2(0, l),$$

the function $E(\lambda)$ being defined by the relations $E_n(\lambda) = \int_0^n \varphi(x, \lambda) f(x) dx$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |E(\lambda) - E_n(\lambda)|^2 d\varrho(\lambda) = 0$. — Conversely, it is known that $\varrho(\lambda)$, h and the Weyl's boundary condition being given, determine the „potential“ function $q(x)$ uniquely. (This was proved under special assumptions by Levinson, this. Zbl. **32**, 207, under Weyl's conditions by Marčenko, this. Zbl. **40**, 343, and also by the reviewer, 11. Skand. Mat. Kongr., Trondheim 1949.) The paper under review presents existence and construction theorems, which correspond to these uniqueness theorems. A principal result is the following ($l = \infty$): Let $\varrho(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda} + \sigma(\lambda), \lambda \geq 0$;

$\varrho(\lambda) = \sigma(\lambda), \lambda < 0$ be a given non decreasing function such that a) the integral $\int_{-\infty}^0 \exp(\sqrt{|\lambda|} x) d\varrho(\lambda)$ exists for all $x > 0$, b) the function $a(x) = \int_1^{\infty} \lambda^{-1} \cos \sqrt{\lambda} x d\sigma(\lambda)$ has 4 continuous derivatives for $0 \leq x < \infty$. Then there exists a function $q(x)$, continuous for $0 \leq x < \infty$ and a real number h which together define a function $\varphi(x, \lambda)$ through (1) and (2), such that (3) holds with the given function $\varrho(\lambda)$. Interesting existence theorems in the case of the inverse Sturm-Liouville problems are also given. — In the proofs a linear integral equation (4) is important. Assume that (1) and h are given, then there exists a Fredholm kernel $K(x, t)$ such that $\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt$ holds. This relation can be transformed into (4) $f(x, y) + \int_0^x f(y, t) K(x, t) dt + K(x, y) = 0$ where $f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda} y d\sigma(\lambda)$. If now, conversely, $\varrho(\lambda)$ is known whereas $q(x)$ and $\varphi(x, \lambda)$ are not, (4) can be used for the determination of $K(x, t)$ and hence $\varphi(x, \lambda)$.
Göran Borg.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

• **Tichonov, A. N. und A. A. Samarskij:** Die Gleichungen der Mathematischen Physik. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1951. 659 S. R. 18,50 [Russisch].

Mathematical textbook for physicists, dealing with the partial differential equations of physics and containing many applications to elasticity, gas dynamics, hydrodynamics, electrodynamics etc. The chapters: Classification of partial differential equations — Hyperbolic equations — Parabolic equations — Elliptic equations — Propagation of waves — Propagation of heat — Elliptic equations (continued) — Appendix: Special functions.
Lars Gårding.

Erdélyi, A.: The analytic theory of systems of partial differential equations. *Bull. Amer. math. Soc.* **57**, 339—353 (1951).

A survey of the many unsolved problems that arise in the attempt to construct a theory of partial differential equations analogous to the theory of Fuchsian ordinary

differential equations. Examples of the novel features that arise are given. A bibliography is provided. — A slight misprint occurs in equation (7). At two places in the bottom row of the determinant the symbol f should be deleted. *W. W. Sawyer.*

Hadamard, J.: Partielle Differentialgleichungen und reelle Funktionen. *Gaz. Mat., Lisboa* **12**, Nr. 50, 3—6 (1951) [Portugiesisch].

In this short expository paper the author stresses the relationship between real variable theory and partial differential equations with non-analytic Cauchy data. For instance, it is shown how the heat equation leads to the consideration of a certain class of functions which have derivatives of all orders but are not analytic. *Mauricio Matos Peixoto.*

Kasuga, Takashi: Generalisation of R. Baire's theorem on differential equation $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} f(x, y) = 0$. *Proc. Japan Acad.* **27**, Nr. 3, 117—121 (1951).

L'A. établit le théorème suivant: „ $f(x, y)$ étant une fonction continue, possédant une dérivée partielle continue $\partial f/\partial y$ dans un ouvert $G \subset R^2$, si $z(x, y)$ est continue en G , y possède des dérivées partielles (dont on ne postule que l'existence) sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable et vérifie presque partout en G : $\partial z/\partial x + f(x, y) \partial z/\partial y = 0$, alors $z(x, y)$ est constante sur les intégrales de l'équation $dz/dx = f(x, y)$ “. Quelques erreurs typographiques: page 119, ligne 10 du bas, lire $\varphi(x_2, \eta_2) = y_2$ au lieu de $\varphi(x_2, \eta_2) = \eta_2$ et ligne 2 du bas, lire $z(x, y)$ au lieu de $f(x, y)$. En outre l'affirmation „ $F - H$ is of the second category as a G_δ in R^2 “ (page 118, ligne 5 du bas) semble devoir être remplacée par „ $F - H$ is of the second category in F “. *André Revuz.*

Lukomskaja, M. A.: Über Zyklen von Systemen linearer homogener Differentialgleichungen. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **29 (71)**, 551—558 (1951) [Russisch].

Es sei gegeben das System T_0

$$c_i \frac{\partial u}{\partial x} + d_i \frac{\partial v}{\partial x} = a_i \frac{\partial u}{\partial y} + b_i \frac{\partial v}{\partial y} \quad (i = 1, 2);$$

ist $\frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{\partial a_i}{\partial y}$; $\frac{\partial d_i}{\partial x} = \frac{\partial b_i}{\partial y}$ ($i = 1, 2$), so kann zu jeder Lösung (u, v) ein Integral (U, V) definiert werden:

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (a_2 u + b_2 v) dx + (c_2 u + d_2 v) dy;$$

$$V(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (a_1 u + b_1 v) dx + (c_1 u + d_1 v) dy.$$

(U, V) genügen wieder einem analogen System T_1 . Im Falle der Cauchy-Riemannschen Gleichungen ist $T_0 \equiv T_1$, dies ist im allgemeinen nicht der Fall. Ausgehend von T_1 kann wieder ein Integral definiert werden, das einem System T_2 genügt. Es kann sein, daß ein T_n äquivalent T_0 ist, dann heißt T_0 in einen Zyklus $T_0 \cdots T_{n-1}$ der Ordnung n eingebettet. Die Ordnung n ist nicht invariant, wenn T_0 durch ein äquivalentes System ersetzt wird. Es erhebt sich die Frage nach der Minimalordnung, und an Hand eines Beispiels wird gezeigt, daß nicht alle Systeme die Minimalordnung 1 besitzen. Die Bedingungen für die Ordnung 1 haben die Form eines wenig übersichtlichen Gleichungssystems. Unter Verwendung von Resultaten des Ref. [Commentarii Math. Helvet. **26**, 6—25 (1952)] lassen sich diese Bedingungen im wesentlichen durch die Kommutativität von zwei Matrizen ausdrücken, wie auch die ganze Darstellung durch Einführung des Matrizenkalküls eine große Vereinfachung erfährt. *Adolf Kriszten.*

Germay, R. H. J.: Extension du théorème de Mme de Kowalewski aux systèmes récurrents d'équations normales aux dérivées partielles d'ordre quelconque. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **20**, 135—142 (1951).

I sistemi di equazioni di ordine qualunque indicati nel titolo si riconducono ad analoghi sistemi del primo ordine nella maniera consueta. *Gianfranco Cimmino.*

Sobolev, S. L.: Über ein neues Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **81**, 1007—1009 (1951) [Russisch].

On considère le système suivant d'équations aux dérivées partielles

$$(1) \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = v_y - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -v_x - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z},$$

v_x, v_y, v_z et p étant des fonctions inconnues du point (x, y, z) d'un domaine Ω intérieur à une surface S , et de la variable du temps t pour $0 \leq t < \infty$. En introduisant le vecteur $v(v_x, v_y, v_z)$ et en désignant par i, j, k les verseurs des axes des coordonnées, on peut représenter le système (1) sous la forme suivante

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (v \times k) - \text{grad } p, \quad \text{div } v = 0,$$

$(v \times k)$ désignant le produit vectoriel de v et de k . En appliquant les méthodes d'analyse fonctionnelle, l'A. démontre que ce système admet une solution, satisfaisant à une condition initiale $v_{t=0} = v_0(x, y, z)$ et aux conditions aux limites $p|_S = 0, v_n|_S = 0$. Cette solution dépend d'une manière continue des conditions initiales.

M. Krzyżański.

Protter, M. H.: A boundary value problem for an equation of mixed type. Trans. Amer. math. Soc. **71**, 416—429 (1951).

L'A. studia l'equazione di tipo misto (1) $K(y) u_{xx} + u_{yy} = 0$, dove $K(y)$ è una funzione continua, non decrescente, ed è $K(0) = 0$, e prova il teorema: „ $F_0(x)$ ($a \leq x \leq b$) e $G_0(x)$ [$\frac{1}{2}(a+b) \leq x \leq b$] siano funzioni continue colle loro derivate dei primi quattro ordini e sia $F_0(b) = G_0(b)$; sia $y = h(x)$ l'equazione della curva caratteristica della (1) per il punto $(b, 0)$ con coefficiente angolare positivo. Allora esiste ed è unica la soluzione $u(x, y)$ della (1), che è definita nel triangolo T a lati curvilinei (posto nel semipiano $y \leq 0$), limitato dal segmento $a \leq x \leq b$ dell'asse x , dalla caratteristica $y = h(x)$ e dalla caratteristica simmetrica per il punto $(a, 0)$, è ivi continua colle sue derivate dei primi due ordini e soddisfa le condizioni $u(x, 0) = F_0(x)$ ($a \leq x \leq b$), $u[x, h(x)] = G_0(x)$ [$\frac{1}{2}(a+b) \leq x \leq b$]; inoltre in tutto T vale la $|u(x, y)| \leq M_0 + 4|y|M_1M_2$, dove $M_0 = \max(|F_0(x)|, |G_0(x)|)$, $M_1 = \max(|F'_0(x)|, |G'_0(x)|)$, $M_2 = \max(-K(y))^{\frac{1}{2}}$. — Il teorema è dimostrato prima nel caso in cui $K(y)$ abbia una forma particolare; in seguito il risultato generale è ottenuto con un passaggio al limite. Si fa presente che la citazione fatta dall'A. di un lavoro della relatrice [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., IV. Ser. **13**, 26—31, 115—118 (1931), questo Zbl. **1**, 209] è inesatta, poichè il lavoro si riferisce ad altro argomento, e che l'A. ignora i numerosi lavori che la relatrice ha dedicato al caso $K(y) = y^n$ (questo Zbl. **4**, 394; **5**, 160; **5**, 356; **6**, 203; **19**, 305; **23**, 38).

Maria Cinquini-Cibrario.

Višik, M. I.: Über stark elliptische Differentialgleichungssysteme. Mat. Sbornik, n. Ser. **29 (71)**, 615—676 (1951) [Russisch].

On considère le système d'équations d'ordre $2m$

$$(1) \quad L_i u = (-1)^m \sum_{j=1}^N \sum_{(k)} a_{ij}^{(k_1 \dots k_{2m})} (x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^{2m} u_j}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{2m}}} + T_i u = f_i(x_1, \dots, x_n),$$

à n variables indépendantes et à N fonctions inconnues; $T_i u$ sont des opérations différentielles linéaires d'ordre $2m-1$ au plus. Ce système s'écrit aussi sous la forme

$$L u = (-1)^m \sum_{(k)} A^{(k_1 \dots k_{2m})} (x) \frac{\partial^{2m} u(x)}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{2m}}} + T u = f(x),$$

$A^{(k_1 \dots k_{2m})}(x)$ désignant la matrice des coefficients $a_{ij}^{(k_1 \dots k_{2m})}$. On effectue une décomposition

$$A^{(k_1 \dots k_{2m})}(x) = C^{(k_1 \dots k_{2m})}(x) + K^{(k_1 \dots k_{2m})}(x),$$

de sorte que $C^{(k_1 \dots k_{2m})}(x)$ soit une matrice symétrique et $K^{(k_1 \dots k_{2m})}(x)$ une matrice symétrique gauche. Le système (1) est dit fort elliptique, lorsque la matrice $C^{(k_1 \dots k_{2m})}(x) \xi_{k_1} \dots \xi_{k_{2m}}$ est définie positive. L'A. démontre des théorèmes concernant le rapport entre l'existence et l'unicité des solutions du 1-er problème aux limites pour le système fort elliptique; ces théorèmes sont analogues à ceux de Fredholm. Lorsque le domaine est assez petit, le 1-er problème aux limites admet une solution et une seule. Ensuite l'A. fait l'étude du spectre du système $Lu + \lambda u = 0$. Dans le cas du système d'équations du second ordre à coefficients constants l'étude est plus approfondi.

M. Krzyżański.

Višik, M. I.: Über die Stabilität der Lösungen von Randwertaufgaben für elliptische Differentialgleichungen (bezüglich Änderung der Koeffizienten und der rechten Seiten). Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **81**, 717—720 (1951) [Russisch].

On cherche une solution de l'équation du type elliptique

$$(1) \quad Lu = - \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x) u(x) = h(x) \quad (x \in D),$$

satisfaisant à une condition aux limites

$$\frac{\partial u(s)}{\partial \nu} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i(s) u(s) + Au(s) = \varphi(s) \quad (s \in \Gamma),$$

D étant un domaine borné de l'espace à n dimensions, Γ la frontière de ce domaine,

$\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos(n, x_k) \frac{\partial}{\partial x_i}$ (dérivée transversale), et Au un opérateur linéaire dans l'espace des fonctions de $s \in \Gamma$ au carré sommable. On suppose que $c(x) -$

$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i} \geq 0$, cette expression étant exactement positive tout au moins en un point de D . D'ailleurs, les hypothèses, concernant les coefficients de (1), ne sont pas précisées par l'A. On pose le problème analogue relatif à l'équation

$$L'v = - \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a'_{ik}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^n b'_i(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} + c'(x) v(x) = h'(x),$$

avec la condition aux limites $\frac{\partial v(s)}{\partial \nu'} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b'_i v(s) + A' v(s) = \varphi'(s)$. Si l'on a

$$|a_{ik}(x) - a'_{ik}(x)| \leq \varepsilon, \quad \left| c(x) - c'(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(x) - b'_i(x)) \right| \leq \varepsilon,$$

$$|b_i(x) - b'_i(x)| \leq \varepsilon, \quad \int \dots \int_{\Gamma} ((A - A') v(s)) \cdot f(s) ds$$

$$\leq \varepsilon \left[\int \dots \int_{\Gamma} (A v(s)) \cdot v(s) ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int \dots \int_{\Gamma} (A f(s)) \cdot f(s) ds \right]^{\frac{1}{2}},$$

ε étant suffisamment petit, alors les problèmes aux limites, qu'on vient de poser, sont résolubles d'une manière univoque pour h et h' sommables avec puissances p , $\varphi(s)$ et $\varphi'(s)$ -sommables avec puissances q^* , les nombres p et q^* dépendant de n . On a, en outre

$$\begin{aligned} & \left[\int_D \dots \int \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right]^2 + (u(x) - v(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \left\{ \left[\int_D \dots \int (h(x) - h'(x))^p dx \right]^{1/p} + \left[\int_{\Gamma} \dots \int (\varphi(s) - \varphi'(s))^{q^*} ds \right]^{1/q^*} \right\} \\ & + C_1 \varepsilon \left\{ \left[\int_D \dots \int (h(x))^p dx \right]^{1/p} + \left[\int_{\Gamma} \dots \int (\varphi(s))^{q^*} ds \right]^{1/q^*} \right\}. \end{aligned}$$

Dans la démonstration l'A. applique les méthodes d'analyse fonctionnelle.

M. Krzyżański.

Birindelli, Carlo: Nuova trattazione di problemi al contorno di uno strato, per l'equazione di Poisson in tre variabili. I, II. Riv. Mat. Univ. Parma 2, 77—102, 235—263 (1951).

I. Es handelt sich (in Anwendung von Methoden Picones) um die Lösung der Poissonschen Gleichung $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$ in einer von zwei parallelen Ebenen $z = 0$ und $z = a$ begrenzten Schicht T ; an den Randebenen sind dabei die Linearkombinationen

$$\alpha_0 u + \beta_0 u_z = \gamma_0(x, y) \quad \text{bzw.} \quad \alpha u + \beta u_z = \gamma_a(x, y)$$

gegeben (α_0, \dots, β Konstante). Die Lösung ist unter einer Zusatzbedingung über das Verhalten im Unendlichen eindeutig. Ausgegangen wird von den Eigenfunktionen $w_h(z)$ der Differentialgleichung $d^2w/dz^2 + \lambda w = 0$ mit den Bedingungen $\alpha_0 w + \beta_0 dw/dz = 0$ und $\alpha w + \beta dw/dz = 0$ für $z = 0$ und $z = a$. Dann ist die Transformierte der Lösung u :

$$u_{h,l}^{(c)}(\varrho) = \frac{1}{\pi} \int_0^a w_h(z) dz \int_0^{2\pi} u(\varrho, \varphi, z) \cos(l\varphi) d\varphi$$

(ϱ, φ Polarkoordinaten der x, y -Ebene, $h, l = 0, 1, 2, \dots$) und analog für den sinus, mit Hilfe von Besselschen Funktionen darstellbar. Die sich danach unter gewissen Bedingungen für γ_0, γ_a und f zunächst formal ergebende Doppelreihe für u selbst ist auf T mit Einschluß des Randes konvergent und stellt eine dort stetige Funktion dar.

II. In Fortsetzung der vorstehend besprochenen Arbeit wird nunmehr die Existenz der partiellen Ableitungen u_x, u_y, u_z und deren Stetigkeit im Innern von T gezeigt; u_z ist auch auf den Rand stetig und erfüllt die oben genannte Randbedingung.

Hans Hornich.

Weyl, Hermann: Radiation capacity. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 832—836 (1951).

Weyl, Hermann: Kapazität von Strahlungsfeldern. Math. Z. 55, 187—198 (1952).

Gegenstand beider Arbeiten ist das Außenraumproblem für die Differentialgleichung $\Delta U + k^2 U = 0$, das hier folgendermaßen verstanden wird: Der dreidimensionale Raum werde durch eine oder mehrere Randflächen Ω in das innere (und endliche) Gebiet V und das äußere (und zusammenhängende) Gebiet W zerlegt. Gesucht ist eine Lösung U der Wellengleichung (in W), die auf Ω vorgegebene Werte annimmt und den Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingungen genügt. Es wird U als Schwingungspotential von Doppelbelegungen auf Ω angesetzt, so daß die Randbedingungen nach dem Vorgang der Potentialtheorie zu einer Integralgleichung zweiter Art führen. Besitzt diese Integralgleichung Eigenlösungen — dies ist der Fall, wenn k^2 Eigenwert zum zweiten Randwertproblem für V ist —, so treten charakteristische Schwierigkeiten auf, die das Hauptthema der Arbeiten darstellen. — Es wird dabei notwendig, die genannte Integralgleichung und die zu ihr transponierte gleichzeitig zu untersuchen, und das Randwertproblem reduziert sich auf die Frage, ob die Eigenlösungen der transponierten Integralgleichung als Randwerte zugelassen werden können. Genau wie in der Potentialtheorie werden hier Schwingungspotentiale von einfachen Belegungen herangezogen. Bezeichnet man mit φ_i eine Basis für die Lösungen der homogenen und mit ψ_i eine Basis für die Lösungen der homogenen transponierten Integralgleichungen, so läßt sich zeigen, daß jedes φ_i als Potential einer einfachen Belegung dargestellt werden kann. Es gibt somit zu jedem ψ_i auch eine Lösung des Randwertproblems, wenn die Determinante der (φ_i, ψ_k) nicht entartet ist, da dann zu jedem ψ_i ein φ_i^* (eine Linearkombination der φ_i) so existiert, daß $\psi_i - \varphi_i^*$ zu allen Lösungen der homogenen transponierten Integralgleichungen orthogonal ist. — Während die entsprechende Determinante beim Außenraumproblem der Potentialtheorie, die Determinante der Kapazitätskoeffizienten, mit Hilfe des Dirichletschen Integrals leicht diskutiert werden kann, treten hier Schwierigkeiten auf, die Verf. veranlassen, die Fragestellung im Rahmen einer allgemeineren Theorie der Elementarteiler höheren Grades für lineare Integralgleichungen zu untersuchen. Diese Theorie wird kurz entwickelt, und es kann gezeigt werden, daß nach Übergang zu einer erweiterten Kapazitätsmatrix das Randwertproblem allgemein lösbar ist. — Wichtiges Hilfsmittel bei den Beweisen ist ein Satz von F. Rellich (dies. Zbl. 28, 128). Die erste der beiden Arbeiten skizziert die Beweise und gibt Möglichkeiten zu Anwendungen und Erweiterungen der Theorie, die zweite liefert die Einzelheiten der Beweise.

Claus Müller.

Maljužinec, G. D.: Mathematische Formulierung des Problems der erzwungenen harmonischen Schwingungen in einem beliebigen Gebiet. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 78, 439—442 (1951) [Russisch].

Die dem Randwertproblem der Wellengleichung $\Delta u + \lambda u = F$ entsprechende Greensche Funktion wird in der allgemeinsten, für einen beliebigen zusammenhängenden Bereich gültigen Form definiert, wobei den Überlegungen die Randwertbedingung $\partial u / \partial n + h(\lambda) u = 0$ zugrunde gelegt wird [$h(\lambda)$ ist eine stückweise stetige Funktion der Randpunkte]. In Anlehnung an eine von W. A. Fok angegebene Methode werden zunächst λ -Werte mit negativem Realteil betrachtet, und es wird vorausgesetzt, daß eine Folge von λ_n -Werten mit Häufungspunkt existiert, für die überall auf dem Rand $\operatorname{Re} h(\lambda_n) < 0$ ist. Hiermit kann dann der Verf. unter Benutzung eines früher von ihm bewiesenen Satzes die Eindeutigkeit der Greenschen Funktion zeigen. Unter der weiteren Voraussetzung, daß die Greensche Funktion eine meromorphe Funktion des Parameters λ ist, läßt sich diese dann analytisch fortsetzen bis zu dem erforderlichen λ -Wert, gegebenenfalls auch mit positivem Realteil. Zusätzliche Forderungen bezüglich des Verhaltens der Greenschen Funktion im Unendlichen werden behandelt, und eine Anwendung des Prinzips auf ein spezielles Randwertproblem wird gezeigt. K. Krienes.

Simola, Inkeri: Potentialtheoretische Randwertprobleme für mehrfach zusammenhängende Gebiete. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 90, 50 S. (1951).

L'A. ne considère que des domaines plans limités par un nombre fini de courbes de Jordan sans points communs. A partir de la notion de mesure harmonique d'un arc étudiée directement, il traite de manière autonome des généralités sur le problème de Dirichlet et même le principe des singularités > 0 , qui sont des cas très particuliers de résultats connus pour des domaines quelconques. Mais il étend les précisions du cas classique circulaire: intégrale de Poisson-Stieltjes représentant les différences de fonctions harmoniques > 0 , théorème de Fatou sur les limites radiales, remplacées par les limites selon les trajectoires orthogonales des lignes $G = C^e$, et présentation d'un problème de Dirichlet avec ces limites. Signalons que les propriétés de ces trajectoires et un principe de maximum correspondant sont des cas particuliers d'une étude récente pour domaines quelconques (Brelot et Choquet, ce Zbl. 34, 204).

Marcel Brelot.

Martin, Monroe H.: Riemann's method and the problem of Cauchy. Bull. Amer. math. Soc. 57, 238—249 (1951).

Die Riemannsche Methode zur Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems einer linearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen wird derart modifiziert, daß Verallgemeinerungen auf mehr unabhängige Veränderliche möglich sind. Die Modifikation erfolgt, indem anstatt der adjungierten Differentialgleichung eine ähnlich gebaute „assozierte“ Diffgl. verwendet wird, deren Koeffizienten von einer beliebigen Lösung der vorgelegten Diffgl. abhängen. Die Ersatzfunktion für die Riemannsche Funktion wird in ähnlicher Weise wie jene als Lösung der assoziierten Gleichung festgelegt. Die Lösungsformel ist der Riemannschen völlig analog. — Die Verallgemeinerung der Methode auf 3 unabhängige Veränderliche wird explizit durchgeführt aber nur für die Diffgl. $u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0$. Die erhaltene Lösungsformel wird in die bekannte Volterra'sche Lösungsformel umgeformt. — Die hier angegebene Verallgemeinerung der Riemannschen Methode ist etwas einfacher als die von Hans Lewy (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1928, 118—123), jedoch scheint insbesondere die Verallgemeinerung auf noch mehr Variable hier nicht wie dort ohne weiteres ersichtlich.

Karl Stellmacher.

Vasilache, S.: Un nouveau problème aux limites pour les équations à dérivées partielles de type hyperbolique. Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 35—38, russische und französ. Zusammenfassgn. 38—39, 39 (1951) [Rumänisch].

L'A. traite le problème aux limites suivant: Déterminer une solution de l'équation aux dérivées partielles de type hyperbolique, de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + r(x, y) z = f(x, y),$$

lorsqu'on se donne les valeurs de z sur une caractéristique et les valeurs de l'une de ses dérivées sur l'autre caractéristique. Il résout ce problème par la méthode de Riemann.

(Aus der französ. Zusammenfassung.)

Cinquini-Cibrario, Maria: Alcuni nuovi teoremi di esistenza per equazioni non lineari di ordine n di tipo iperbolico. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 5, 329—353 (1951).

Vorgelegt ist eine Differentialgleichung n -ter Ordnung vom hyperbolischen Typ: $F(x, y, z, p_{r,s}) = 0$; $p_{r,s} = \partial^{r+s} z / \partial x^r \partial y^s$; ($r + s = 1, 2, \dots, n$). Um die Charakteristikentheorie dieser Differentialgleichung zu einem gewissen Abschluß zu bringen, stellt sich Verf. das „verallgemeinerte Goursatsche Problem“: Gesucht ist ein Integral $z(x, y)$ von $F = 0$, welches einen gewissen charakteristischen Streifen n -ter Ordnung enthält und außerdem für $x = g(y)$ eine vorgegebene lineare Relation zwischen z und seinen Ableitungen bis zur n -ten Ordnung erfüllt. [Im Spezialfall, daß diese lineare Relation lautet $z(g(y), y) = \varphi(y)$, hat man das Goursatsche Problem.] Die Projektion der Trägerkurve des vorgegebenen charakteristischen Streifens in die (x, y) -Ebene soll die Kurve $x = g(y)$ im Definitionsgebiet schneiden, und in diesem Schnittpunkt sollen die Daten des Streifens die lineare Relation befriedigen. Eingeschlossen wird (durch eine zusätzliche Überlegung) auch der Fall, wo die vorgegebene lineare Relation längs einer charakteristischen Kurve der gesuchten Integralfäche erfüllt ist, wobei von dieser charakteristischen Kurve lediglich der Schnittpunkt mit der Trägerkurve des charakteristischen Streifens und ihre (charakteristische!) Richtung dort vorgegeben werden muß. [Die Charakteristikenbedingung allein tritt hierbei an die Stelle der Gleichung $g(y) = x$.] — Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung wird bewiesen durch Zurückführung auf ein quasilineares System partieller Differentialgleichungen unter Benutzung von Ergebnissen zweier Arbeiten derselben Verf. (dies. Zbl. 30, 358, 37, 68). Vorausgesetzt wird F von der Differenzierbarkeitsklasse $D^{II} - L$, die den Streifen definierenden Funktionen von der Klasse D^I und schließlich die Kurve $x = g(y)$ von der Klasse $D^{II} - L$. Alsdann ist im Existenzgebiet $z(x, y)$ von der Klasse $D^{n+2} - L$, und es gibt dort nur eine Lösung des Problems von dieser Klasse. Karl Stellmacher.

Nagumo, Mitio et Seturo Simoda: Note sur l'inégalité différentielle concernant les équations du type parabolique. Proc. Japan Acad. 27, 536—539 (1951).

Le travail contient une généralisation importante du résultat de H. Westphal (ce Zbl. 35, 65). Soit $\Phi(x, t, u, p, q, r)$ [avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $r = r_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, m$] une fonction semi-elliptique, c'est à dire, telle que, pour toute $u(x, t)$ de classe C^2 (admettant les dérivées secondes continues) par rapport aux x_i , on ait $\Phi(x, t, u, \partial_x u, \partial_t u, r) - \Phi(x, t, u, \partial_x u, \partial_t u, \partial_x^2 u) = \sum_{i,j=1}^m \Phi_{ij} [r_{ij} - \partial_{ij}^2 u(x, t)]$,

la forme $\sum_{i,j=1}^m \Phi_{ij} \lambda_i \lambda_j$ étant semi-définie positive. On suppose en outre que Φ est non croissante par rapport à q . Ensuite, D étant un ensemble ouvert, on appelle S la partie de sa frontière, composée par les points (x, t) tels que pour tout $\varepsilon > 0$ les inégalités $|x - \xi| < \varepsilon$ et $0 \leq t - \tau < \varepsilon$ entraînent $(\xi, T) \in D + S$. Soient $v(x, t)$ et $w(x, t)$ deux fonctions de classe C^2 par rapport aux x , et de classe C^1 par rapport à t . L'A. démontre que si: 1° pour toute suite $\{x^{(n)}, t^{(n)}\}$ de points de $D + S$, dont les points d'accumulation n'appartiennent pas à $D + S$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} [w(x^{(n)}, t^{(n)}) - v(x^{(n)}, t^{(n)})] > 0$, 2° $\Phi(x, t, v, \partial_x v, \partial_t v, \partial_x^2 v) > \Phi(x, t, w, \partial_x w, \partial_t w, \partial_x^2 w)$ dans $D + S$, alors $v(x, t) < w(x, t)$ partout dans $D + S$. M. Krzyżanski.

Ossicini, Alessandro: Il calcolo simbolico e la propagazione del calore in una ipersfera dello spazio euclideo ad n dimensioni. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 5, 269—278 (1951).

L'equazione di propagazione del calore nello spazio ad n dimensioni: $\sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_r^2}$

— $\frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ (u è una funzione delle variabili spaziali $x_1, \dots, x_r, \dots, x_n$ e del tempo

t , D una costante) viene risolta, con metodo operativo, in una ipersfera di raggio 1 supposta assegnata la u per $t=0$ e supposto che sulla superficie σ dell'ipersfera stessa valga per ogni $t \geq 0$ la relazione: $\partial u / \partial n + \lambda u = 0$ in cui $\partial u / \partial n$ indica la derivata di u in direzione normale a σ , h una costante.
Dario Graffi.

Tolstov, G. P.: Über beschränkte Funktionen, die der Laplaceschen Differentialgleichung genügen. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 559—564 (1951) [Russisch].

It is shown that if a function u is bounded in a region of the plane and $\Delta u = 0$, then u is harmonic (the example $u = \Re e^{-1/z^2}$ shows that some condition besides $\Delta u = 0$ is necessary; usually u is assumed to be continuous).
Lars Gårding.

Michlin, S. G.: Über eine Ungleichung für die Randwerte harmonischer Funktionen. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 6 (46), 158—159 (1951) [Russisch].

As a complement to an inequality by Vishik (this Zbl. 42, 337) it is shown that $\int_{x_m=0} (|u_1|^2 + \dots + |u_{m-1}|^2 - C |u_m|^2) dx_1, \dots, dx_{m-1} \leq 0$, where C is a constant and u is harmonic and $O(|x|^{-m})$ when $x_m > 0$ and sufficiently well-behaved when $x_m = 0$, ($u_k = \partial u / \partial x_k$).
Lars Gårding.

Neustadter, Siegfried F.: Multiple valued harmonic functions with circle as branch curve. Univ. California Publ. Math., n. Ser. 1, Nr. 11, 397—432 (1951).

C étant un cercle de l'espace R^3 , l'A. considère des fonctions harmoniques dans $R^3 - C$, fonctions qui sont définies et uniformes sur un espace de recouvrement Ω de $R^3 - C$. Il construit la fonction de Green $\chi(A, M)$ de Ω [χ est harmonique de M pour $M \neq A$, $M \in \Omega$; χ est bornée sauf au voisinage de A où $\chi - 1/r$ est borné; $\chi \rightarrow 0$ quand $M \rightarrow \infty$ sur chaque „feuille“ de Ω]. L'existence et l'unicité de χ ayant été établies par G. C. Evans (ce Zbl. 43, 103) l'A. en fait le calcul explicite par des méthodes qui se rattachent au travail bien connu de A. Sommerfeld [Proc. London math. Soc. 28, 395—429 (1897)]. Il utilise les coordonnées $\eta = \log(AM/BM)$, $\theta = \widehat{AMB}$, (AB étant le diamètre de C sur lequel M se projette orthogonalement) et φ angle de AB avec un diamètre fixe de C ; il obtient χ explicitement pour n feuillets; étude de χ quand on approche C ($\eta \rightarrow +\infty$) et de ses dérivées. Quand le nombre des feuillets est infini l'A. obtient χ avec l'hypothèse supplémentaire $\chi \rightarrow 0$ quand $M \rightarrow C$. Expression de χ au moyen des fonctions de Legendre.
Pierre Lelong.

Rudin, Walter: Green's second identity for generalized Laplacians. Proc. Amer. math. Soc. 2, 970—972 (1951).

Il est élémentaire que si U et V sont pourvus de dérivées secondes finies continues dans un domaine, et nuls au voisinage de la frontière, l'intégrale de $U \Delta V - V \Delta U$ est nulle. L'A. étend cela au cas où U, V satisfont à des conditions bien moins restrictives (mais essentiellement la continuité) en prenant le laplacien au sens généralisé de Privaloff (mais avec moyennes périphériques). Aucune allusion aux distributions de Schwarz.
Marcel Brelot.

Rudin, Walter: Positive infinities of potentials. Proc. Amer. math. Soc. 2, 967—969 (1951).

Un lemme important de G. C. Evans (ce Zbl. 14, 113) établit que, étant donné un compact E (dans R^3 , mais c'est analogue dans R^r , $r \geq 2$), on peut former une distribution μ de masses ≥ 0 , dont le potentiel est infini sur E , si E est de capacité nulle. L'A. montre qu'on peut définir une μ au moyen d'une fonction-densité sommable. Pour cela, reprenant, comme Evans, une suite de systèmes de points servant à définir le diamètre transfini, l'A. remplace les masses ponctuelles mises en ces points (et dont on envisageait une limite) par leurs répartitions uniformes sur de petits domaines sphériques centrés en ces points. — On passe aisément à E seulement fermé.
Marcel Brelot.

Frostman, Otto: Distributions de masses normées par la métrique de L^p . Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl. **21**, Nr. 13, 119—129 (1951).

A toute mesure de Radon μ dans R^m , à support compact, associons le nombre $\|\mu\|_{\alpha,p} = [\int |U_\alpha(x)|^p dx]^{1/p}$, où U_α est le potentiel d'ordre α engendré par μ , et p un nombre ≥ 1 . $\|\mu\|_{\alpha,p}$ est une norme sur l'ensemble des μ pour lesquelles il est fini (pour des valeurs convenables de p cet ensemble comprend toutes les μ à support compact et de masse totale nulle). Pour $m \geq 3$, $\alpha = 1$, $p = 2$, $\|\mu\|_{\alpha,p}$ est, à un facteur > 0 près, l'énergie newtonienne de μ . Un autre cas intéressant est $m = 3$, $\alpha = 2$, $p = 2$, à cause des applications au potentiel newtonien du théorème suivant: si μ_n , de masse totale nulle, est portée par un compact fixe et converge faiblement vers μ , $\|\mu_n - \mu\|_{\alpha,p} \rightarrow 0$ (voir O. Frostman, ce Zbl. **36**, 70). Ici ce théorème de continuité est étendu au cas $m \geq 1$, $0 < \alpha < m$, $m/(m+1-\alpha) < p < m/(m-\alpha)$. L'A. compare ensuite les normes $\|\mu\|_{\alpha,p}$ correspondant à des valeurs différentes des indices α ou p .

Jacques Deny.

Emersleben, Otto: Das Selbstpotential einer endlichen Reihe neutraler äquidistanter Punktepaare. Math. Nachr. **6**, 155—170 (1951).

The author continues his meticulous study by elementary means of partial sums of the Riemann zeta-function, and similar sums; cf. O. Emersleben, Z. angew. Math. Mech. **30**, 252—254 (1950). Physical applications of the results are to be discussed by him elsewhere (Z. phys. Chemie **199** (1951)).

Frederick V. Atkinson.

Variationsrechnung:

Kerimov, M. K.: Über notwendige Bedingungen für das Extremum bei unstetigen Variationsproblemen mit beweglichen Endpunkten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 565—568 (1951) [Russisch].

Kerimov, M. K.: Über die Jacobischen Bedingungen für unstetige Variationsprobleme mit beweglichen Endpunkten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 719—722 (1951) [Russisch].

In Form eines Berichtes, ohne Beweise, werden die notwendigen Bedingungen für ein ebenes Variationsproblem in gewöhnlicher Darstellung angegeben, bei dem die Endpunkte auf zwei Kurven C_1 und C_2 beweglich sind, während längs einer zwischen ihnen verlaufenden dritten Kurve C_0 der Integrand eine Unstetigkeit (einen Sprung) besitzt: in der ersten Arbeit Eulersche Gleichung, Transversalitätsbedingungen auf C_1 und C_2 , Unstetigkeitsbedingung auf C_0 , Legendresche Bedingung, Jacobische Bedingung mit Hilfe des Vorzeichens der zweiten Variation bzw. des Minimums des akzessorischen Variationsproblems. In der zweiten Arbeit werden weitere Formen der Jacobischen Bedingung angegeben: Brennpunkts- und Eigenwertkriterium; hinzu kommt, daß die Wronskische Determinante zweier akzessorischer Extremalen das Vorzeichen (beim Überschreiten von C_0) nicht wechseln darf. Weierstraßsche Bedingung für starkes Extrem. Vereinfachungen ergeben sich, wenn C_0 eine vertikale Gerade ist.

Hermann Boerner.

Sigalov, A. G.: Zweidimensionale Probleme der Variationsrechnung. Uspechi mat. Nauk **6**, Nr. 2, 16—101 (1951) [Russisch].

In der Einleitung gibt Verf. eine Übersicht über den gegenwärtigen Stand der Theorie des absoluten Minimums für zweidimensionale reguläre Variationsprobleme. U. a. werden die Resultate von Tonelli, die Theorie von Morrey sowie die Beiträge von Haar und S. Bernstein zur Variationsrechnung besprochen. Den Hauptteil dieses in allen Einzelheiten präzise angelegten Berichtes bildet die weitreichende Theorie des Verf. über zweidimensionale Variationsprobleme in Parameterform, hierbei sind die fundamentalen Sätze wie Halbstetigkeit des Integrals, die Theoreme von Young über Existenz eines ε - δ -Gitters einer Funktionenfolge mit beschränktem Dirichletintegral und von MacShane über die gleichgradige Stetigkeit am Rande mit in den Artikel aufgenommen. Verf. hat bewiesen: In der Klasse L^2 (im Sinne von MacShane) der zulässigen Flächen $(x_i(u_1, u_2))$, die von einer festen Jordankurve Γ begrenzt

werden und dem Integral J einen endlichen Wert zuerteilen,

$$J = \iint_R F(x_1, x_2, x_3, A_1, A_2, A_3) du_1 du_2,$$

nimmt J das absolute Minimum an, falls: 1. F stetig, 2. F positiv homogen 1. Grades bez. A_i , 3. stets: $F(x_i, A_i + A'_i) \leq F(x_i, A_i) + F(x_i, A'_i)$ (Quasiregularität bekanntlich identisch mit der Konvexitätsbedingung), 4. $m = \inf F(x_i, A_i) > 0$, $M = \sup F(x_i, A_i) < \infty$; $x_i \in R_3$, $\|A_i\| = 1$. Die A_i kürzen die 3 Funktionaldeterminanten ab. Weiter wird noch ein Existenzsatz aufgestellt, falls die zulässigen Flächen innerhalb eines abgeschlossenen endlichen Bereiches liegen. Beim Existenzbeweis geht Verf. in der Minimalfolge der Polyeder, deren Ränder im Sinne von Fréchet gegen Γ konvergieren, zur stückweis konformen Parameterdarstellung über, was die Beschränktheit des Dirichletintegrals verbürgt. Ein grundlegendes, über ein scharfsinniges Nivellierungsverfahren laufendes Theorem des Verf. sagt dann aus, daß jede solche Minimalfolge zu einer mit gleichgradig stetigen Parameterdarstellungen korrigiert werden kann, woraus bekanntlich die Existenz einer gleichmäßig konvergenten Minimalfolge resultiert. Damit hat Verf. das bekannte Auswahltheorem von Hilbert über Kurven mit beschränkter Bogenlänge auf Flächen mit beschränktem Inhalt im Sinne von Lebesgue erweitert. *Herbert Beckert.*

Sigalov, A. G.: Existenzbedingungen für das Minimum von Doppelintegralen in einem unbeschränkten Bereich. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 741—744 (1951) [Russisch].

Dans une étude antérieure (ce Zbl. 38, 264) relative au minimum absolu de l'intégrale $\iint_D F(x, y, z, p, q) dx dy$, où D est un domaine borné, l'A. ne considérait que des surfaces $z = f(x, y)$ situées dans une région bornée de l'espace: $(x, y) \in D$, $|z| \leq z_0$. Dans le présent Article, il étend les résultats précédemment obtenus au cas où on considère des surfaces situées dans la région infinie: $(x, y) \in D$.

Jacques Dufresnoy.

Magenes, Enrico: Sul minimo semi-forte degli integrali di Fubini-Tonelli. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 401—424 (1951).

Soit K la classe des courbes $C: y_1 = y_1(x)$, $a \leq x \leq b$; $y_2 = y_2(z)$, $c \leq z \leq d$, (y_i fonctions absolument continues) donnant une valeur finie à

$$I[y_1, y_2] = \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), y'_1, y'_2) dx dz.$$

L'A. établit un ensemble de conditions suffisantes pour qu'une courbe $\bar{C}: y_1 = \bar{y}_1(x)$, $y_2 = \bar{y}_2(z)$, de classe 1 (fonctions \bar{y}_i continûment différentiables) jouisse de la propriété suivante: A tout $N > 0$ on peut associer $p > 0$ tel que pour toute $C \in K$, de mêmes extrémités que \bar{C} et

$|y_1(x) - \bar{y}_1(x)| \leq p$, $|y_2(z) - \bar{y}_2(z)| \leq p$, $|y'_1 - \bar{y}'_1| \leq N$, $|y'_2 - \bar{y}'_2| \leq N$ resp. presque partout sur (a, b) et sur (c, d) , entraîne $I(y_1, y_2) \geq I(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, l'égalité n'ayant lieu que si C coïncide avec \bar{C} . *Th. Lepage.*

Young, Laurent Chisholm: Surfaces paramétriques généralisées. Bull. Soc. math. France 79, 59—84 (1951).

In Analogie zu seiner Theorie der verallgemeinerten Kurven entwickelt Verf. eine solche der verallgemeinerten Flächen. Unter der Klasse elementarer Parameterdarstellungen einer Fläche: $x(u, v)$; $\Re: 0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$; im m -dimensionalen euklidischen Raum wird im wesentlichen eine solche verstanden, wo die $x(u, v)$ in \Re einer Lipschitzbedingung genügen. Sei \mathfrak{F} der Raum der stetigen Funktionen $f(x, \mathfrak{S})$ (x bezeichne die Komponenten eines m -dimensionalen Vektors, \mathfrak{S} diejenigen eines $\binom{m}{2}$ -dimensionalen). Für ein beliebiges $f(x, \mathfrak{S})$ betrachtet Verf. das lineare Funktional:

$$(*) \quad L(f) = \iint_{\Re} f[x(u, v), \mathfrak{S}(u, v)] du dv$$

zu der in elementarer Darstellung vorliegenden Fläche $x(u, v)$, wobei \mathfrak{S} den Vektor des vektoriellen Produktes der Ableitungen x_u, x_v bedeutet. Zwei elementare Darstellungen heißen äquivalent, falls für alle f in \mathfrak{F} die jeweiligen Werte von $L(f)$ übereinstimmen. In der Absicht, die traditionellen Schwierigkeiten der Variationsrechnung über die Annahme des Minimums zu umgehen, identifiziert Verf. für die Klasse elementarer Darstellungen das Funktional $L(f)$ mit der jeweiligen Fläche. Unter einer verallgemeinerten Fläche wird das Funktional $L(f) = \lim L_n(f)$

(für jedes f in \mathfrak{F}) verstanden, wobei

$$L_n(f) = \iint_{\mathfrak{R}} f(x_n(u, v), \mathfrak{I}_n(u, v)) du dv$$

eine Folge von Flächen in elementaren Klassen ist. Innerhalb einer Menge verallgemeinerter Flächen mit beschränktem $|x(u, v)|$ und beschränkter Oberfläche im Sinne von Lebesgue-Fréchet nimmt das Funktional (*) das Minimum an. Der geometrische Teil enthält Untersuchungen über Berandung, Einbettung und Zerlegung sowie besondere Parameterdarstellungen der betrachteten Flächen. U. a. folgt noch ein wichtiges Theorem über die Möglichkeit, die Fläche $L(f)$ mit beschränkter Oberfläche $< N$ durch Flächen $x_n(u, v)$ zu approximieren [lim $L_n(f) \rightarrow L(f)$, für alle f in \mathfrak{F}], wobei $x_n(u, v)$ auf dem Rande gleichgradig stetig sind und das Dirichletintegral der Ableitungen unterhalb N bleibt. Nach dem Studium einer wichtigen speziellen Flächenklasse folgen Ausblicke für eine Fortführung der Theorie. *Herbert Beckert.*

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Ghermănescu, M.: Sur une équation intégrale de type Volterra. Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 151—154, russische und französ. Zusammenfassgn. 154, 155 (1951) [Rumänisch].

L'A. considère l'équation intégrale de seconde espèce

$$(\mathfrak{F}) \quad \varphi(x) + \int_0^x K(x-s) \varphi(s) ds = f(x),$$

où les fonctions connues et inconnues sont supposées de la forme

$$K(x-y) = \sum_0^{\infty} a_n \frac{(x-y)^n}{n!}, \quad f(x) = \sum_0^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}, \quad \varphi(x) = \sum_0^n c_n \frac{x^n}{n!},$$

les séries $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ étant convergentes. Il donne, entre autres, la relation

$$U(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} u(xz) dx, \quad U(z) = \sum c_n z^n, \quad u(x) = \sum c_n \frac{x^n}{n!}$$

qui lie une fonction $u(x)$ à son adjointe de Pincherle $U(z)$ et qui constitue l'inversion de

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zx} \Phi\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zx} F(1/z) dz}{z + \Psi(1/z)},$$

où $\Phi(x) = \sum c_n x^n$, $\Psi(x) = \sum a_n x^n$, $F(x) = \sum b_n x^n$, C étant un cercle, dont le centre est à l'origine, contenant tous les points singuliers de $z^{-1}\Phi(1/z)$, ainsi que l'identité

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zx} \left[\int_0^{\infty} e^{-s} \varphi\left(\frac{s}{z}\right) ds \right] \frac{dz}{z} = \int_0^{\infty} e^{-s} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zx} \varphi\left(\frac{s}{z}\right) \frac{dz}{z} \right] ds,$$

satisfaite par toute fonction telle que les intégrales y figurant aient un sens. — Le procédé est

appliquée ensuite à l'équation de Volterra de première espèce $\int_0^x K(x-s) \varphi(s) ds = f(x)$. —

Finalement, l'A. déduit, inversement, les suites récurrentes c_n données par $a_0 c_{n-1} + a_1 c_{n-2} + \dots + a_{n-1} c_0 = b_n - c_n$, $c_0 = b_0$, à l'aide de la solution d'une équation intégrale du type (1).

(Autoreferat.)

Conti, Roberto: Criteri sufficienti di stabilità per i sistemi di equazioni integrali lineari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 11, 164—169 (1951).

Consider the integral equation (1) $x = x^0 + \int_{t_0}^t [(A(\tau) + B(\tau))x + a + b(\tau)] d\tau$

where t_0 , t are real and x , x_0 , a , $b(t)$ are n -dimensional complex vectors, $A(t)$ and $B(t)$ being $n \times n$ complex matrices; $b(t)$, $A(t)$ and $B(t)$ are supposed to be bounded and measurable. If every one of the solutions of (1) is bounded for $t > t_0$ then (1) is said to be bounded. The paper gives two sets of conditions, (2) and (3), every one of which, together with the assumption that the „reduced“ equation $y = x^0 +$

$\int_{t_0}^t [A(\tau)y + a] d\tau$ is bounded imply that (1) is also bounded. Define $Y(t)$ as the

$n \times n$ matrix such that $Y(t) = I + \int_{t_0}^t A(\tau)Y(\tau) d\tau$ (I being the identity matrix)

and call $\|C\|$ the sum of the absolute values of the elements of the matrix (or vector) C . (2): there exist constants L, M, N such that for $t, \tau \geq t_0$ $\|Y(t) Y^{-1}(\tau)\| \leq L$, $\int_{t_0}^t \|B(\tau)\| d\tau \leq M$, $\int_{t_0}^t \|b(\tau)\| d\tau \leq N$. (3): $A(t)$ and $B(t)$ are such that $A(t) B(t) = B(t) A(t)$, $B(t) \int_{t_0}^t B(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t B(\tau) d\tau B(t)$, $t \geq t_0$ and there exist constants M_1, N_1 such that $\left\| \int_{t_0}^t B(\tau) d\tau \right\| \leq M_1$, $\int_{t_0}^t \|B(\tau) z + b(\tau)\| \leq N_1$, $t \geq t_0$ where $z = \int_{t_0}^t [A(\tau) z + a] d\tau$. M. M. Peixoto.

Vajnberg, M. M.: Zur Variationstheorie der Eigenwerte nicht-linearer Integralgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **80**, 309—312 (1951) [Russisch].

Verf. gelangt durch Anwendung von Methoden der Variationsrechnung, die L. A. Ljusternik u. a. entwickelt haben, zu folgendem Ergebnis: $K(x, y)$ sei ein symmetrischer, positiver und nicht ausgearteter Kern mit den Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ und den Eigenwerten λ_ν , $\nu = 1, 2, \dots$; $0 < \lambda_\nu \leq \lambda_{\nu+1}$. Die Folge der ausgearteten Kerne $K_n(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(y)}{\lambda_i}$, $n = 1, 2, \dots$, konvergiere in L_p ($p \geq 2$). Es sei $h u = g(u(x), x)$ ein stetiger Operator mit dem Definitionsbereich L_p und dem Bildbereich in L_q ($p^{-1} + q^{-1} = 1$). Es gelte $g(-u, x) = -g(u, x)$, und für $u > 0$ sei $g(u, x) > 0$ fast überall. Die Integralgleichung.

$$\mu u(x) = \int_B K(x, y) g(u(y), y) dy$$

hat für jedes $c > 0$ unendlich viele Eigenfunktionen, die paarweise linear unabhängig sind und zu L_p gehören. Sie lassen sich durch Formeln:

$$\psi_\nu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k^{(\nu)}}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(x), \quad \eta^{(\nu)} \in l_2, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

darstellen, dabei ist $\|\eta^{(\nu)}\| = c$. Diesen Eigenfunktionen entsprechen Eigenwerte gemäß der Formel:

$$\mu_\nu = \frac{1}{c^2} \int_B \psi_\nu g(\psi_\nu(x), x) dx.$$

Die Zahlen μ_ν bilden eine abnehmende Folge mit dem Grenzwert 0. Walter Thimm.

Tranter, C. J.: On some dual integral equations. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **2**, 60—66 (1951).

Bei gegebenen $f(\varrho)$ und $F(\varrho)$ soll die Funktion $\varphi(t)$ in den Intervallen $0 < \varrho < 1$ und $\varrho > 1$ zwei verschiedenen Integralgleichungen genügen:

$$\int_0^\infty t \varphi(t) J_\nu(\varrho t) dt = f(\varrho) \quad (0 < \varrho < 1), \quad \int_0^\infty \varphi(t) J_\nu(\varrho t) dt = F(\varrho) \quad (\varrho > 1).$$

Auf formalem Weg wird folgende Lösung abgeleitet:

$$\varphi(t) = H(t) + \left(\frac{\pi t}{2}\right)^{1/2} \int_0^1 s^{\nu+1/2} \chi(s) J_{\nu+1/2}(ts) ds$$

mit

$$H(t) = F(1) J_{\nu+1}(t) + t \int_1^\infty \varrho F(\varrho) J_\nu(t\varrho) d\varrho,$$

$$\chi(s) = \frac{2}{\pi} s^{-2\nu} \int_0^s \varrho^{\nu+1} \left[f(\varrho) - \int_0^\infty t H(t) J_\nu(\varrho t) dt \right] (s^2 - \varrho^2)^{-1/2} d\varrho.$$

Auf ähnliche Weise wird eine Lösung des Paares von Integralgleichungen

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) J_{\nu}(\varrho t) dt = G(\varrho) \quad (0 < \varrho < 1), \quad \int_0^{\infty} t \varphi(t) J_{\nu}(\varrho t) dt = g(\varrho) \quad (\varrho > 1)$$

angegeben. Für $F(\varrho) \equiv 0$ bzw. $g(\varrho) \equiv 0$ stimmen die Lösungen mit den von L. V. King [Philos. Mag., VII. Ser. 21, 133 (1936)] abgeleiteten überein.

Gustav Doetsch.

Mandžavidze, G. F.: Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen mit unstetigen Koeffizienten. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 11, 269—274 (1950) [Russisch].

Die Theorie der singulären Integralgleichungen mit Cauchyschem Kern wird verallgemeinert für Integralgleichungen folgender Art:

$$(1) \quad A(t_0) \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} B(t_0) \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt + \int_L R_1(t_0, t) \varphi(t) dt + \int_L R_2(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0).$$

Hierbei sind $A(t_0)$, $B(t_0)$, $R_1(t_0, t)$, $R_2(t_0, t)$, $f(t_0)$ Funktionen, die überall auf L einer Hölderbedingung genügen mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Unstetigkeitsstellen 1. Art. L bestehe aus einer endlichen Auswahl sich nicht schneidender, geschlossener, glatter Kurven, die ein zusammenhängendes Gebiet der Ebene begrenzen. Für die Integralgleichung (1) wird eine „adjungierte“ Integralgleichung definiert. Für die Lösbarkeit von (1) erhält man wie in der Fredholmschen Theorie Integralbedingungen, welche die Lösungen der homogenen adjungierten Integralgleichung enthalten.

Walter Thimm.

Mandžavidze, G. F.: Über eine singuläre Integralgleichung mit unstetigen Koeffizienten und ihre Anwendung in der Elastizitätstheorie. Priklad. Mat. Mech. 15, 279—296 (1951) [Russisch].

Die in der vorstehend besprochenen Note entwickelte Theorie wird auf zwei gemischte Randwertaufgaben der (ebenen) Elastizitätstheorie angewandt. 1. Der Rand L (vgl. vorsteh. Referat) eines elastischen Körpers wird in eine gerade Anzahl von Teilbögen geteilt. Auf diesen werden abwechselnd Spannungen und Verschiebungen vorgegeben. Es ist das elastische Gleichgewicht des Körpers zu bestimmen. Nach D. I. Šerman (dies. Zbl. 24, 89) führt diese Aufgabe auf eine Integralgleichung der untersuchten Art. Verf. zeigt daß diese Integralgleichung stets lösbar ist. — 2. Eine dünne elastische Platte, deren Mittelfläche ein einfach zusammenhängendes ebenes Gebiet bedeckt, werde senkrecht belastet. Die Randkurve werde in eine gerade Anzahl von Teilbögen geteilt, die abwechselnd fest eingespannt und frei gelassen werden. Auch diese Aufgabe ergibt eine Integralgleichung der besprochenen Klasse, deren Lösbarkeit diskutiert wird.

Walter Thimm.

Sunouchi, Gen-ichirô: A class of singular integral equations. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 220—222 (1951).

Verf. gibt für die in der Aerodynamik auftretende Integralgleichung

$$f(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{x-y} dx - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(y, x) u(x) dx, \quad (-1 < y < 1),$$

bei der das erste Integral als Cauchyscher Hauptwert zu verstehen ist, eine Lösungsmethode, die von der E. Reissners [Bull. Amer. math. Soc. 51, 922—924 (1945)] verschieden ist. Mit den Bezeichnungen $U(\varphi) = u(\cos \varphi) \sin \varphi$, $F(\theta) = -f(\cos \theta) \sin \theta$,

$c = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U(\theta) d\theta$, $K(\theta, \varphi) = k(\cos \theta, \cos \varphi)$, $x = \cos \varphi$, $y = \cos \theta$, und unter $\tilde{K}_{\varphi}(\theta, \varphi)$ die bzgl. φ zu $K(\theta, \varphi)$ konjugierte Funktion, unter $\mathfrak{K}(\theta, \varphi)$ der lösende

Kern von $K_\varphi(\theta, \varphi)/\pi$ verstanden, lautet die Lösung:

$$\begin{aligned} U(\theta) = & -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{F(\varphi) \sin \varphi}{\cos \theta - \cos \varphi} d\varphi - \frac{c}{\pi^2} \int_0^\pi \frac{\sin \varphi}{\cos \theta - \cos \varphi} d\varphi \int_0^\pi K(\varphi, u) du \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \varphi}{\cos \theta - \cos \varphi} d\varphi \int_0^\pi \Re(\varphi, u) F(u) du \\ & + \frac{c}{\pi^2} \int_0^\pi \frac{\sin \varphi}{\cos \theta - \cos \varphi} d\varphi \int_0^\pi \Re(\varphi, u) du \int_0^\pi K(u, t) dt + c. \end{aligned}$$

Viktor Garten.

Vasilache, S.: Sur la solution générale des équations intégral-différentielles linéaires à limites fixes d'intégration. Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 1—4, russische und französ. Zusammenfassgn. 5, 6 (1951) [Rumänisch].

L'A. démontre le théorème suivant: Etant donnée une équation intégral-différentielle linéaire

$$(1) \quad \sum_{i=0}^n H_i(x) y^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{r=0}^m K_r(x, s) y^{(r)}(s) ds$$

où $y^{(i)}(x)$ est la dérivée d'ordre i de la fonction inconnue $y(x)$, $H_i(x)$ des fonctions continues et données pour $a \leq x \leq b$; $K_r(x, s)$ et $f(x)$ des fonctions bornées et intégrables dans $a \leq s \leq x \leq b$, si (y_1, \dots, y_n) est un système fondamental (S) de solutions de l'équation différentielle

homogène $\sum_{i=0}^n H_i(x) y^{(i)}(x) = 0$, $H_n(x) = 1$, et si $D(s)$ est le wronskien du système (S),

l'équation intégral-différentielle (1) se transforme en une équation intégral-différentielle linéaire de la forme

$$y(x) = h(x) + \lambda \int_a^b \sum_{r=0}^m P_r(x, s) y^{(r)}(s) ds$$

dans laquelle les dérivées n'entrent plus que sous le signe d'intégration, et où

$$h(x) = (-1)^n \int_a^x \frac{D_0(x, s)}{D(s)} f(s) ds + A_p y_p(x), \quad P_r(x, s) = (-1)^n \int_a^x \frac{D_0(x, s)}{D(s)} K_r(t, s) ds.$$

$$\text{avec } D_0(x, s) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1(s) & y_2(s) & \dots & y_n(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) & \dots & y_n'(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(s) & y_2^{(n-2)}(s) & \dots & y_n^{(n-2)}(s) \end{vmatrix}.$$

(Autoreferat.)

Haimovici, Ad.: Sur un système d'équations intégral-différentielles. Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 13—17, russische und französ. Zusammenfassgn. 17—18, 18 (1951) [Rumänisch].

L'A. considère le système d'équations

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = x_i \left[a_i + \sum_{j=1}^n \left(a_{ij} x_j + \int_{-\infty}^t f_{ij}(t-\tau) x_j(\tau) d\tau \right) \right], & i = 1, \dots, p, \\ \frac{dx_k}{dt} = a_k + \sum_{j=1}^n \left(a_{kj} x_j + \int_{-\infty}^t f_{kj}(t-\tau) x_j(\tau) d\tau \right), & k = p+1, \dots, n, \end{cases}$$

qui généralise les systèmes obtenus dans 5 Notes antérieures. Il démontre l'existence et l'unicité de l'intégrale de ce système dans un intervalle (t_0, T) , (T quelconque), en supposant: a) a_i, a_{ij}

des constantes; b) f_{ij} des fonctions bornées, telles que les intégrales $\Gamma_{ij} = \int_{-\infty}^t f_{ij}(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty f_{ij}(\tau) d\tau$ aient un sens, de même que les intégrales analogues des fonctions \bar{f}_{ij} , où $\bar{f}_{ij}(x) = f_{ij}(x)$, si $f_{ij}(x) \geq 0$, et $= 0$, si $f_{ij}(x) < 0$; c) $x_i(t)$ des fonctions positives, bornées, connues

dans l'intervalle $(-\infty, t_0)$, égales aux fonctions $\varphi_i(t)$. Cette intégrale prolonge d'une manière continue les fonctions $\varphi_i(t)$. La démonstration part de la considération de deux systèmes d'équations, dont les intégrales sont des majorantes des intégrales de (1), et s'accomplit par la méthode des approximations successives. — On démontre encore le théorème suivant: Si pour $t \rightarrow \infty$, les fonctions $x_i(t)$ tendent à des limites finies, alors ou bien ces limites sont égales aux valeurs stationnaires, ou les s premières ($s \leq p$) tendent à zéro tandis que toutes les autres tendent

aux racines du système $\sum_{j=s+1}^n (a_{ij} + \Gamma_{ij}) \eta_j - a_i = 0$ ($i = s+1, \dots, n$). — Enfin, on démontre des théorèmes qui généralisent ceux de Volterra relativement aux valeurs moyennes des fonctions $x_i(t)$ et aux perturbations de ces moyennes. (Autoreferat.)

Tsuji, Masatsugu: On the compactness of space L^p ($p > 0$) and its application to integral equations. Kōdai math. Sem. Reports 1951, 33–36 (1951).

Nach F. Riesz (dies. Zbl. 8, 7) ist eine Menge F von Funktionen $f(x)$ aus $L^p(-\infty, \infty)$ ($p \geq 1$) dann und nur dann kompakt, wenn für alle $f \in F$ 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \leq M$, 2. es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_0 gibt, so daß $\int_{|x| \geq N} |f(x)|^p dx < \varepsilon$ für $N \geq N_0$, 3. es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ gibt, so daß $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|^p dx < \varepsilon$ für $|t| < \delta$. Verf. erweitert diesen Satz auf den Fall $0 < p < 1$ und benutzt ihn dazu, die Carlemansche Verallgemeinerung der Fredholmschen Sätze über Integralgleichungen von stetigen auf quadratisch integrierbare Kerne zu beweisen.

Gustav Doetsch.

● **Tranter, C. J.:** Integral transforms in mathematical physics. (Methuen's monographs on physical subjects.) London: Methuen 1951. IX, 118 p. 6 s.

Das im Format einem Göschens-Band entsprechende Büchlein behandelt die Lösung von Differentialgleichungen mittels Integraltransformationen. Da es sich ganz an den Praktiker wendet, bringt es keine systematische Theorie, sondern zeigt die Methoden an Beispielen und wendet sie rein formal an, d. h. ohne Abgrenzung der Gültigkeit. Dabei werden nicht nur die Transformationen von Laplace und Fourier vorgeführt, die generell die Ableitung in die Multiplikation mit der Variablen verwandeln, sondern auch noch weitere Transformationen, die wenigstens gewisse spezielle Differentialoperatoren eliminieren, wie die Hankel- und Mellin-Transformation sowie im endlichen Intervall die mit cos-, sin-, Besselschen und Legendreschen Funktionen als Kernen gebildeten Transformationen. Es werden einige Methoden angegeben, um die bei den Lösungen auftretenden Integrale mit oszillierenden Funktionen als Kernen praktisch auszuwerten. Ferner wird an Beispielen gezeigt, wie die Funktionaltransformationen durch Reduktion der Anzahl der Variablen, nach denen differenziert wird, dazu dienen können, Differentialgleichungen der bekannten Approximationsmethode zugänglich zu machen, die in dem Ersatz der Ableitungen durch Differenzen besteht. *Gustav Doetsch.*

Tanaka, Chuji: Note on Laplace-transforms. II. III. On some class of Laplace-transforms. I. II. Kōdai math. Sem. Reports 1951, 55–58, 59–60 (1951).

I. Eine Folge von Intervallen $I_\nu: t_\nu - \varepsilon(t_\nu) \leq t \leq t_\nu + \varepsilon(t_\nu)$ habe die Eigenschaften $t_\nu \rightarrow \infty$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon(t_\nu) = 0$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{t_\nu} \log \varepsilon(t_\nu) = 0$. Die Funktion $f(t)$ erfülle die Bedingungen: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |f(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty, t \in I_\nu} \frac{1}{t} \log |f(t)| = \alpha < \infty$; $f(t)$ ist stetig in $\{I_\nu\}$; $\Im f(t) = f_1(t)$ ist differenzierbar in $\{I_\nu\}$ und $\lim_{t \rightarrow \infty, t \in \{I_\nu\}} \frac{1}{t} \log |f_1'(t)| \leq \alpha$. Dann fallen für die Laplace-Transformation $F(s) = \int_0^\infty \exp(-st) f(t) dt$ die Abszissen einfacher, absoluter und gleichmäßiger Konvergenz zusammen und sind gleich α .

II. Die Funktion $f(z)$ ($z = r e^{i\theta}$) erfülle die Bedingungen: $f(z)$ ist in D : $|\theta| \leq \vartheta < \pi/2$ analytisch, außer in 0 und ∞ , und von Exponentialtyp; in D ist gleichmäßig $\lim_{r \rightarrow 0} r f(r e^{i\theta}) = 0$; in D existiert $\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} |f(r e^{i\theta})| dr$ ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$). Liegt

auf dem Rand der Holomorphiehalbebene von $F(s) = \int_0^\infty \exp(-sx) f(x) dx$ mindestens ein singulärer Punkt, so fallen für $F(s)$ die Abszissen der einfachen, der gleichmäßigen und der absoluten Konvergenz mit der Holomorphieabszisse zusammen. Gustav Doetsch.

Tanaka, Chuji: Note on Laplace-transforms. IV.V. On the determination of the regularity-abscissa. I, II. Kōdai math. Sem. Reports 1951, 64–66, 67–70 (1951).

I. Die Holomorphieabszisse σ_r des Laplace-Stieltjes-Integrals $F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\alpha(x)$, wo $\alpha(x)$ in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation ist, bestimmt sich durch die Formel:

$$\sigma_r = \sup_{-\infty < t < +\infty} \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \{ \log \log^+ |\varphi(\sigma + it)| + \sigma \}$$

$$\text{mit } \varphi(s) = \int_0^\infty \exp(-sx) d\beta(x), \quad \beta(x) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(1+t)} d\alpha(t).$$

II. Fortsetzung von Teil I und Abschluß des dortigen Beweises. Als Anwendung ergibt sich: Die Riemannsche Vermutung ist äquivalent mit

$$\frac{1}{2} = \sup_{-\infty < t < \infty} \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \{ \log \log^+ |\varphi(\sigma + it)| + \sigma \},$$

$$\text{wo } \varphi(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{\Gamma(1 + \log n)} \frac{1}{n^s}$$

Gustav Doetsch.

Tanaka, Chuji: Note on Laplace-transforms. VI. On the distribution of zeros of partial sums of Laplace-transforms. VII. On the overconvergence and singularities of Laplace-transforms. Kōdai math. Sem. Reports Nr. 5 and 6, 96–99, 100–102 (1951).

Vgl. die vorangehenden Referate. Teil VI: In Analogie zu den Sätzen von Jentzsch und Szegő über die Nullstellen der Partialsummen von Potenzreihen

wird bewiesen: Satz I. Die Laplace-Transformierte $F(s) = \int_0^\infty \exp(-sx) d\alpha(x)$

$[\alpha$ in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation, $s = \sigma + it$] habe die Konvergenzhalbebene $\sigma > 0$. Dann ist jeder Punkt auf $\sigma = 0$ Häufungspunkt

von Nullstellen der Partialintegrale $S_y(s) = \int_0^y \exp(-sx) d\alpha(x)$, $[x_r] \leq y \leq x_r$,

wo die x_r der Bedingung $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{x_r} \log \left| \int_{[x_r]}^{x_r} d\alpha(x) \right| = 0$ genügen. Satz II. Ist die Kon-

vergenzhalbebene $\sigma > 0$ zugleich Holomorphiehalbebene, so ist jeder Punkt von $\sigma = 0$

Häufungspunkt von Nullstellen der Partialintegrale $S_{y_r}(s) = \int_0^{y_r} \exp(-sx) d\alpha(x)$

mit $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log y_r}{y_r} = 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{y_{r+1}}{y_r} = 1$. — Teil VII: Satz I. $F(s)$ habe die

Konvergenzhalbebene $\sigma > 0$. Wenn $d\alpha(x) = 0$ in $\lambda_r \leq x \leq \tau_r$ und $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\tau_r}{\lambda_r} > 1$,

$\tau_{\nu-1} < \lambda_{\nu} < \tau_{\nu}$, so ist in einer gewissen Umgebung jedes regulären Punktes von $F(s)$ auf $\sigma = 0$ die Folge $\int_0^{\lambda_{\nu}} \exp(-sx) d\alpha(x)$ gleichmäßig konvergent. Satz II. Wenn

unter denselben Bedingungen wie in Satz I außerdem $\int_{\tau_{\nu}}^{\lambda} |d\alpha(x)| = o(\exp(-\varepsilon \lambda_{\nu+1}))$ mit $\tau_{\nu} \leq \lambda < \lambda_{\nu+1}$ für ein gewisses $\varepsilon > 0$ gilt, so ist $\sigma = 0$ die natürliche Grenze von $F(s)$. Gustav Doetsch.

Parodi, Maurice: Sur quelques nouvelles conséquences d'un théorème de Laguerre. Bull. Sci. math., II. Sér. **75 I**, 41—47 (1951).

L'A. dà alcune applicazioni del seguente teorema di Laguerre: L'integrale $\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ sia convergente per $s > s_0$, e sia ν il numero dei cambiamenti di segno di $f(t)$ in $(0, \infty)$; allora, $\varphi(s)$ ha al massimo ν zeri reali maggiori di s_0 . A. Zitarosa.

Erdélyi, Arthur: Nota ad un lavoro di L. Toscano. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **11**, 44—45 (1951).

Wesentlich einfacherer Beweis der von Toscano (dies. Zbl. **39**, 300) bewiesenen Formel

$$\sqrt{\pi} (\alpha + \tfrac{1}{2})_n L_n^{(\alpha)}(s) = s^{n+1/2} \mathfrak{L}_s \left\{ \frac{(1+t)^n}{\sqrt{t}} P_{2n}^{(\alpha+1/2)} \left(\sqrt{\frac{t}{1+t}} \right) \right\}$$

(\mathfrak{L} = Laplace-Transformierte) durch Entwicklung von $P_n^{(\lambda)}(\mu)$ nach Potenzen von $1 - \mu^2$ statt der von Toscano verwendeten nach Potenzen von μ , sowie Hinweis auf die analoge Formel für ungerade ultrasphärische Polynome:

$$\sqrt{\pi} (\alpha + \tfrac{1}{2})_{n+1} L_n^{(\alpha)}(s) = s^{n+1/2} \mathfrak{L}_s \left\{ (1+t)^{n+1/2} P_{2n+1}^{(\alpha+1/2)} \left(\sqrt{\frac{t}{1+t}} \right) \right\}.$$

Otto Volk.

Delerue, P.: Calcul symbolique à 2 ou n variables et équations intégrales. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. **65**, 96—102 (1951).

Estendendo una precedente ricerca di M. Parodi (questo Zbl. **42**, 340), l'A. dà una formula integrale, che fornisce le immagini di $x^{\alpha-1} F(1/x, y)$ e $x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \cdot F(1/x, 1/y)$ mediante l'immagine di $F(x, y)$ in una trasformazione doppia di Laplace; ne risultano le formule risolutive esplicite di alcune speciali equazioni integrali lineari di seconda specie a una, o a due dimensioni, nelle quali l'integrazione è estesa rispettivamente a una semiretta, o a un quadrante di piano. Breve cenno anche su una analoga applicazione dell'estensione al caso di n variabili del teorema integrale di Fourier. Gianfranco Cimmino.

Humbert, Pierre: Fonctions de Bessel et calcul symbolique. II. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. **65**, 93—95 (1951).

Teil I s. dies. Zbl. **39**, 328.

Humbert, Pierre: Nouvelles images pour la fonction de Gauss. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 1567—1569 (1951).

Wing, G. M.: On the L^p theory of Hankel transforms. Pacific J. Math. **1**, 313—319 (1951).

È noto (H. Kober, questo Zbl. **17**, 169) che, se $f(x) \in L^p$, $1 < p \leq 2$, la funzione $g_a(t) = \int_0^a (xt)^{\frac{1}{2}} J_{\nu}(xt) f(x) dx$, $0 \leq t$, per $a \rightarrow +\infty$ converge in media, di ordine $p' = p/(p-1)$, su $(0, +\infty)$ verso una $g(t)$. L'A. dimostra che la funzione $f_a(x) = \int_0^a (xt)^{\frac{1}{2}} J_{\nu}(xt) g(t) dt$ per $a \rightarrow +\infty$ converge in media, di ordine p , su $(0, +\infty)$, verso la $f(x)$. Nel caso $p = 1$, detta $g(t)$ la trasformata di Hankel della

$f(x): g(t) = \int_0^{+\infty} (xt)^{\frac{1}{2}} J_\nu(xt) f(x) dx$, l'A. dimostra che la funzione $f_a(x) = \int_0^a (1-t/a)^k (xt)^{\frac{1}{2}} J_\nu(xt) g(t) dt$, $k > 0$, per $a \rightarrow +\infty$ converge in media, di ordine 1, su $(0, +\infty)$, verso la $f(x)$. A. Zitarosa.

Erdélyi, A.: On some functional transformations. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **19**, 217—243 (1951).

The author investigates the functional transformations

$$\mathfrak{S} f(x) = \int_0^\infty h(\alpha, \beta, \zeta, m; xy) f(y) dy \quad \text{and} \quad \mathfrak{I} f(x) = \int_0^\infty k(\alpha, \beta, \eta, m; xy) f(y) dy$$

where

$$h(\alpha, \beta, \zeta, m; x) = x^\beta \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma[(\beta + \zeta + n + 1)/m]}{\Gamma[\alpha + (\beta + \zeta + n + 1)/m]} \frac{(-x)^n}{n!}$$

and

$$k(\alpha, \beta, \eta, m; x) = x^\beta \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma[(\eta - \beta - n)/m]}{\Gamma[\alpha + (\eta - \beta - n)/m]} \frac{(-x)^n}{n!} + m x^\eta \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\beta - \eta - m n)}{\Gamma(\alpha - n)} \frac{(-x^m)^n}{n!}.$$

The transformation \mathfrak{I} includes, as special cases, the Laplace, Meijer, Whittaker and other transformations. The author's investigations are based on H. Kober's (this Zbl. **25**, 185) idea of operators of fractional integration. By using these operators, the transformations \mathfrak{S} and \mathfrak{I} can be written in simpler forms. The author discusses in details the connections of \mathfrak{S} and \mathfrak{I} with the Laplace transformation and shows that inversion formulae for \mathfrak{S} or \mathfrak{I} may be obtained from any of numerous known inversion formulae for the Laplace transformation. Jan Mikusiński.

Widder, D. V.: Necessary and sufficient conditions for the representation of a function by a Weierstrass transform. Trans. Amer. math. Soc. **71**, 430—439 (1951).

The main result of this paper is contained in the following theorem: For a function $f(x)$ to be represented in the form of Weierstrass transform $f(x) =$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4}\right) d\alpha(y), \quad \text{where the integral converges for all } x \text{ and } \alpha(y)$$

is nondecreasing, it is necessary and sufficient that: 1. $f(x)$ should be entire; 2. $f(x + iy) = O(e^{y^2/4})$, $y \rightarrow \pm\infty$, uniformly in $-R \leq x \leq R$ for every $R > 0$; 3. $e^{-tD^2} f(x) \geq 0$, $0 < t < 1$, $-\infty < x < \infty$. Here, the symbol

$$e^{-tD^2} f(x) \text{ is to be read } \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) \{\cos y D\} f(x) dy, \text{ where } \{\cos y D\} f(x)$$

$= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} f^{(2k)}(x)$. — The paper contains detailed historical informations on the Weierstrass transform and gives its physical interpretation.

Jan Mikusiński.

Jenkins, James A.: Generalization of a theorem of Mandelbrojt. Amer. J. Math. **73**, 807—812 (1951).

Mandelbrojt initiated the study of the problem to infer from the fact that a function $f(x)$ is small at a point and its Fourier series is lacunary that $f(x) = 0$ almost everywhere (cf. Hirschman and Jenkins, this Zbl. **38**, 45). If $f(x)$ is considered on the whole real line and the point, where $f(x)$ is to be small, is $+\infty$, then the problem is related with the general principle of Wiener that a function and its Fourier transform cannot be both too small at infinity, without both vanishing almost everywhere. Some results in this direction were given by Hirschman (this Zbl. **35**, 331), the present note gives more general and also simpler theorems. —

1. Let $f(t)$ and $\Phi(x)$ be in $L^2(-\infty, \infty)$ and be the Fourier transforms of each other: $\Phi(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} (2\pi)^{-1/2} \int_{-T}^T e^{-ixt} f(t) dt$. Let $u(r) = \pi^{-1} \int_{-r}^r (1+x^2)^{-1} \log |\Phi(x)| dx \rightarrow -\infty$, as $r \rightarrow \infty$. Let there exist a non-decreasing function $V(y)$ ($y > 0$) such that $\int_{V(y)} e^{ty} |f(t)| dt = O(e^{yV(y)})$ as $y \rightarrow \infty$. Then if $\liminf_{r \rightarrow \infty} (u(r) + V(r)) = -\infty$, $f(t) = 0$ and $\Phi(x) = 0$ almost everywhere. — 2. Let $g(t)$ ($-\infty < t < \infty$) be infinitely differentiable and such that $|g(t)| \leq A k^n M_n$ ($n = 0, 1, \dots$) where $\sqrt[n]{M_n} \rightarrow \infty$. Put $T(r) = \max_{n \geq 1} (r^n / M_n)$. Let there exist a non-decreasing function $V(y)$ ($y > 0$) such that $\int_{V(y)} e^{ty} |g(t)| dt = O(e^{yV(y)})$ as $y \rightarrow \infty$. Let $W(r, h) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot \int_0^r \frac{\log T(x/h)}{1+x^2} dx$ satisfy for some $h > k$ $\liminf_{h \rightarrow \infty} (V(r) - W(r, h)) = -\infty$. Then $g(t) \equiv 0$. János Horváth.

Takano, Kunsaku: Certain Fourier transforms of distributions. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 306—315 (1951).

E. Lukacs und O. Szász (dies. Zbl. 42, 114) gaben eine notwendige Bedingung dafür an, daß das Reziproke eines Polynoms eine charakteristische Funktion ist. Verf. gibt einen Beweis, bei dem sich die von den obigen Verff. gemachte Voraussetzung, daß das Polynom keine mehrfachen Nullstellen haben soll, als überflüssig erweist, und zeigt, daß die Bedingung auch hinreichend ist, wenn der Grad des Polynoms ≤ 4 ist. Ferner wird folgende Frage behandelt: Das Wahrscheinlichkeitsgesetz L mit der Dichtefunktion $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ ($x \geq 0$), $= 0$ ($x < 0$) mit $\alpha > 0$ hat die charakteristische Funktion $\varphi(t) = (1 - i t / \alpha)^{-1}$. Diese Funktion erfüllt die Funktionalgleichung (*) $\frac{1}{2} [\varphi(t) + \varphi(-t)] = \varphi(t) \varphi(-t)$, die zum Ausdruck bringt, daß $X_1 - X_2$ und εX_1 demselben Gesetz gehorchen, wenn X_1 und X_2 dem Gesetz L gehorchen und ε die Werte ± 1 mit gleicher Wahrscheinlichkeit annimmt. Es war bisher unbekannt, ob es weitere charakteristische Funktionen φ gibt, die (*) erfüllen. Verf. zeigt: Damit die charakteristische Funktion $\varphi(t) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{it}{\alpha_j}\right)^{-1}$ (α_j reell $\neq 0$) die Gleichung (*) erfüllt, ist notwendig und hinreichend, daß n ungerade ist und alle elementarsymmetrischen Funktionen geraden Grades von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ verschwinden. Gustav Doetsch.

Charles, H.: Sur la synthèse de la solution des équations de composition. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 100—106 (1951).

Bei Benutzung der Schwartzschen Theorie der Distributionen genügt es, statt der Integralgleichung vom Faltungstypus $F(t) = G(t) + K(t) * F(t)$ die spezielle Gleichung $\Phi(t) = \delta(t) + K(t) * \Phi(t)$ zu lösen (was auf dem üblichen Wege durch Laplace-Transformation geschieht, siehe G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, S. 280—282, dies. Zbl. 18, 129), weil dann die Lösung der allgemeinen Gleichung sich durch $F(t) = \Phi(t) * G(t)$ ergibt. Hierbei kann $G(t)$ eine beliebige Distribution sein. Ebenso genügt es, statt der allgemeinen Differentialgleichung $Y^{(n)} + a_{n-1} Y^{(n-1)} + \dots + a_0 Y = F(t)$, wo die Ableitungen im Sinne der Distributionstheorie zu verstehen sind und $F(t)$ eine beliebige Distribution ist, die spezielle $(\delta^{(n)} + a_{n-1} \delta^{(n-1)} + \dots + a_0 \delta) * Z = \delta$ zu lösen (was wiederum durch Laplace-Transformation geschieht), weil dann $Y(t) = Z(t) * F(t)$ ist. Bei partiellen Differentialgleichungen wie der Wellen- und Wärmeleitungsgleichung genügt es, als eine der vorgeschriebenen Randfunktionen die Funktion $\delta(t)$ zu nehmen, weil man die Lösung für den allgemeinen Fall aus der für den speziellen durch Faltungen gewinnen kann. Gustav Doetsch.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Klee jr., V. L.: Convex sets in linear spaces. II. Duke math. J. 18, 875—883 (1951).

Bezeichnungen wie in Teil I (dies. Zbl. 42, 362). L sei ein reeller linearer Raum. Ist X ein konvexer Kegel in L oder konvex und der Kern X_0 leer, ferner $L - X$ nicht polygonal zusammenhängend, so ist X eine maximale (lineare) Mannigfaltigkeit. Ist X konvex, ferner X_0 leer, so können zwei Punkte u und v aus L durch einen aus drei Strecken bestehenden Weg in $(L - X) \cup \{u, v\}$ verbunden werden. Es wird eine größere Zahl von Eigenschaften angegeben, durch die Hyperebenen in Hausdorffschen und allgemeineren linearen Räumen charakterisiert werden können; sie verwenden in der Mehrzahl Konvexitätseigenschaften. Ferner wird bewiesen, daß kein separabler Banachraum durch weniger als kontinuumviele Hyperebenen überdeckt werden kann. Nach P. Erdős kann jedoch ein Hilbertscher Raum der Dimension \aleph_1 mit \aleph_1 Hyperebenen überdeckt werden. Mit Hilfe von Sätzen von Smulian und Eberlein wird bewiesen, daß in jedem nicht reflexiven separablen Banachraum ein Paar disjunkter beschränkter abgeschlossener konvexer Mengen existiert, das nicht durch eine Hyperebene getrennt werden kann. Ist $x \neq 0$ ein Element des unendlichdimensionalen Banachraumes E , so gibt es eine abgeschlossene lokalkompakte konvexe Teilmenge B von E , die zur Geraden Rx fremd ist, aber keiner der aus allen $tx, t \geq r$, bestehenden Strahlen kann von B durch eine Hyperebene getrennt werden (Verallgemeinerungen von Resultaten von Dieudonné und Tukey). Schließlich wird unter Mitwirkung von P. Erdős eine in Teil I aufgeworfene Frage beantwortet durch die Konstruktion einer Hausdorffschen Topologie auf der reellen Geraden, durch die R zu einem unzusammenhängenden $(T\alpha)$ -Raum wird.

Gottfried Köthe.

Takenouchi, Osamu: Une démonstration directe d'un théorème de M. G. W. Mackey. Kodai math. Sem. Reports 1951, 49—50 (1951).

Let X be a (real or complex) linear space. $N(x)$ being a pseudonorm on X , a linear functional $f(x)$ is said to be (N) -bounded if $|f(x)| \leq CN(x)$ with C independent of x . The author gives a direct proof of the following theorem contained in an equivalent form in the memoir of Mackey [Trans. Amer. math. Soc. 57, 155—207 (1945)]. Let $N_1(x)$ and $N_2(x)$ be two pseudonorms in X ; if a linear functional $f(x)$ is $(N_1 + N_2)$ -bounded, then there exist two linear functionals $f_1(x)$ and $f_2(x)$, (N_1) - and (N_2) -bounded respectively, such that $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Andrzej Alexiewicz.

Nakamura, Masahiro: Complete continuities of linear operators. Proc. Japan Acad. 27, 544—547 (1951).

L'A. montre que les conclusions du théorème de Gantmacher [Mat. Sbornik, 7, 301—307 (1940)] subsistent sans les hypothèses de séparabilité primitivement introduites et énonce l'équivalence des propriétés suivantes d'un opérateur linéaire T appliquant un espace de Banach E dans lui-même: 1. T est faiblement complètement continu. 2. Le transposé T^* est faiblement complètement continu. 3. T^* applique tout ensemble ordonné filtrant (directed set de Moore-Smith) faiblement convergent dans un ensemble de même nature. 4. T^{**} applique le bidual E^{**} dans E . — Puis il donne une nouvelle formulation et une nouvelle preuve des résultats parallèles, déjà connus concernant la complète continuité forte. André Revuz.

Wilansky, Albert: The basis in Banach space. Duke math. J. 18, 795—798 (1951).

B sei ein Banachraum mit der Basis $\{x_n\}$, $\{x_n, f_n\}$ sei das zugehörige Biorthogonalsystem, $f_n \in B^*$. In Ergänzung von Arbeiten von R. James, B. Gelbaum, S. Karlin wird bewiesen: Die folgenden vier Eigenschaften von B sind äquivalent: (B) $\{f_n\}$ ist eine Basis von B^* , (N) $\|h\|_n \rightarrow 0$ für jedes $h \in B^*$, wobei $\|h\|_n$ die

Norm von h auf der abgeschlossenen Hülle B_n der x_n, x_{n+1}, \dots bedeutet, (W) eine beschränkte Folge $y_n \in B$ konvergiert schwach gegen 0, wenn für jedes k gilt $\lim_n f_k(y_n) = 0$, (W') eine beschränkte Folge $y_n \in B_n$ konvergiert stets schwach gegen 0. Die Eigenschaft (B) gilt in B dann und nur dann, wenn in B^* die Eigenschaft $(B \rightarrow C)$ gilt, d. h. daß aus $\sup_n \left\| \sum_1^m a_n f_n \right\| < \infty$ stets die Konvergenz von $\sum_1^\infty a_n f_n$ folgt. B ist dann und nur dann reflexiv, wenn es die Bedingungen (B), (N), (W), (W'), $(B \rightarrow C)$ erfüllt. Es wird für den Fall, daß B eine Basis hat, ein einfacher Beweis des Satzes von Eberlein gegeben. *Gottfried Köthe.*

Wilansky, Albert: Norms of matrix type for the spaces of convergent and bounded sequences. Proc. Amer. math. Soc. 2, 738—741 (1951).

Auf den Räumen (c) und (m) der konvergenten bzw. beschränkten Folgen $x = (x_n)$ wird neben der üblichen Metrik $|x| = \sup_n |x_n|$ die durch eine Matrix

$A = (a_{nk})$ erzeugte Metrik $\|x\|_A = \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k \right|$ betrachtet und untersucht, unter welchen Bedingungen für A (c) und (m) Banachräume werden. Eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung ist, daß neben $\|A\| < \infty$ auch $\|A^{-1}\| < \infty$ gilt, wobei A als oberhalb der Hauptdiagonalen verschwindend vorausgesetzt wird und $\|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^\infty |a_{nk}|$ bedeutet. Dann ist übrigens die Metrik $\|x\|_A$ äquivalent $|x|$. Ist (m) bezüglich $\|x\|_A$ ein Banachraum, so auch (c), wenn A überdies als konservativ vorausgesetzt wird. *Gottfried Köthe.*

Nakano, Hidegorô: Modularized sequence spaces. Proc. Japan Acad. 27, 508—512 (1951).

L'A. considère l'espace $l(p_1, p_2, \dots)$ formé des suites $x = (x_1, x_2, \dots)$ pour lesquelles il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $m(\alpha x) = \sum_{v=1}^\infty \frac{1}{p_v} |\alpha x_v|^{p_v} < +\infty$, (p_v) étant une suite de nombres ≥ 1 . Si on désigne par $\|x\|$ la borne inférieure des nombres $1/\xi$ tels que $m(\xi x) \leq 1$, $\|x\|$ est une norme sur $l(p_1, p_2, \dots)$ qui en fait un espace de Banach, dont le dual est $l(p'_1, p'_2, \dots)$, avec $\frac{1}{p_v} + \frac{1}{p'_v} = 1$. L'A. donne la condition nécessaire et suffisante pour que deux espaces $l(p_1, p_2, \dots)$ et $l(q_1, q_2, \dots)$ soient équivalents, c'est-à-dire qu'il existe une transformation de la forme $(x_v) \rightarrow (x'_v)$ appliquant le premier espace sur le second; cette condition est la suivante: $\sum_{v=1}^\infty \alpha^{p_v q_v} |p_v - q_v|^{-1} < +\infty$ pour un $\alpha > 0$. Il montre d'autre part que si $\lim_{v \rightarrow \infty} p_v = 1$, la convergence faible et la convergence forte pour les suites sont les mêmes dans $l(p_1, p_2, \dots)$, généralisant un théorème classique correspondant au cas où tous les p_v sont égaux à 1. *Jean Dieudonné.*

Aulbach, Helmut: Some geometrical inequalities for sets in Hilbert space. Proc. Amer. math. Soc. 2, 36—45 (1951).

Es handelt sich um Punktmengen im Hilbertschen Raum. Ist T_k ein k -dimensionales Simplex, so heiße die Kantenlänge des k -dimensionalen regulären Simplexes, das denselben k -dimensionalen Inhalt wie T_k hat, die Seite $s^{[k]}(T_k)$ von T_k . Die obere Grenze der Seiten aller k -dimensionalen Simplexe mit Eckpunkten in der Punktmenge S heiße die k -dimensionale Seite $s_k(S)$ von S . Für eine beschränkte Menge S existiert $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(S) = \sigma(S)$ und heißt die transfinite Seite von S . Bezeichnen wir mit $G_{P_1 P_2 \dots P_{n+1}}^k$ das geometrische Mittel der k -dimensionalen

Seiten aller k -dimensionalen Flächen des Simplexes mit Eckpunkten P_1, P_2, \dots, P_{n+1} und ist $\Delta_{n,k}(S) = \sup_{P_1, \dots, P_{n+1} \in S} G_{P_1 \dots P_{n+1}}^k$ ($k \leq n$), so gilt $\Delta_{n+1,k}(S) \leq \Delta_{n,k}(S)$ und $\Delta_{n,k+1}(S) \leq \Delta_{n,k}(S)$, und es existiert daher für eine beschränkte Menge S $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{n,k}(S) = \Delta_k(S)$, der k -te transfinite Durchmesser von S [$\Delta_1(S)$ gibt den transfiniten Durchmesser von Fekete, Math. Z. 32, 108—114 (1930)]. Es gilt $\Delta_{k+1}(S) \leq \Delta_k(S)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k(S) = \sigma(S)$. Es wird bewiesen, daß zwischen den eingeführten Zahlen und dem transfiniten Radius $\varrho(S)$ von Loewner (dies. Zbl. 24, 64) die für beschränkte Mengen gültige Relation $\varrho(S) \leq \sigma(S)/\sqrt{2}$ gilt, die man nicht verbessern kann. Es wird ferner bewiesen, daß eine abgeschlossene Menge S dann und nur dann kompakt ist, wenn ihre transfinite Seite Null ist.

Ákos Császár.

Mackina, R. Ju.: Eine universelle stetige Abbildung des Hilbertschen Raumes. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 15, 533—544 (1951) [Russisch].

The paper is dealing with the existence of some universal elements in connection with the Hilbert space C_ω (e. g. G_δ -universal sets, A -universal sets and particularly „everywhere A -universal“ continuous mappings of C_ω into itself). A continuous mapping f of C_ω into itself is everywhere A -universal if for every A -set $E \subseteq C_\omega$ and every neighborhood $V \subseteq C_\omega$ there is in V a closed set F (depending of E and V) such that E be homeomorphic with fF . The existence of such a f is a consequence of the existence of a A -universal set \mathfrak{A} (meaning that \mathfrak{A} contains a closed homeomorphic image of every A -set $E \subseteq C_\omega$). \mathfrak{A} is obtained as projection of a G_δ -universal set $M \subseteq C_\omega$; the definition of such a M is: any G_δ -set M with the property that every G_δ -set S of C_ω is isometric to an intersection of M with a variable hyperplane parallel with a coordinate hyperplane of C_ω . The construction of f is backed on the fact that every V contains a closed set homeomorphic with the Baire's space

George Kurepa.

Cronin, Jane: A definition of degree for certain mappings in Hilbert space. Amer. J. Math. 73, 763—772 (1951).

The notion of degree of a continuous mapping introduced by Brouwer [Math. Ann. 71, 97 (1911)] was generalized by Leray and Schauder to the case of a continuous mapping of a Banach space into itself, when the mapping is of the form $I + F$, I standing for the identity mapping and F for a completely continuous transformation. It is known that no notion of degree may be defined, in general, for continuous mappings in a Banach space. However, in the paper under review, the author shows that for mappings of a Hilbert space into itself [when these are of the form: $I + C + T$, where C stands for a linear, self adjoint and completely continuous transformation and T for an operator such that: (1) $T(0) = 0$ and (2) $\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq B(\|x_1\| + \|x_2\|) \cdot \|x_1 - x_2\|$, where x_1, x_2 lie in a sufficiently small neighbourhood of 0, B denoting a suitable constant], the notion of degree may still be defined. It is true that he succeeds in developing a theory of this generalized degree only when the domain of the transformation is a small sphere, the range being a small neighbourhood of 0. His method is a skilful combination of the theory of linear operators due to Riesz and of a theorem of existence of implicit functions in general Analysis due to Hildebrandt and Graves [Trans. Amer. math. Soc. 29, 127 (1927)]. The properties of Cronin's degree are the same as those of the degree of Leray and Schauder. The condition of its existence is slightly different and established in theorem 2,1 of this paper. Naturally when T is completely continuous the Cronin's degree is the same as the degree of Leray and Schauder. An example is given in the last paragraph, in which a degree exists and yet T is not completely continuous. — No mention is made of a more recent and important article of Leray [J. Math. pur. appl., IX. Sér. 24, 95 (1945)] in which the notion of the total index of a transformation is defined. Its domain and range are in a connected, compact, Hausdorff space and it needs only be continuous. It might be interesting to study the relation between this notion and that of the degree explained in this paper.

C. Racine.

Pini, Bruno: Su una classe di forme quadratiche dello spazio hilbertiano. Giorn. Mat. Battaglini, IV. Ser. 80, 129—141 (1951).

Es sei A eine reelle, im Hilbertschen Sinne beschränkte, symmetrische Matrix.

Mit $A^{[k]}$ wird eine Matrix bezeichnet, die in der Hauptdiagonale als Elemente alle Hauptminoren k -ter Ordnung von A hat, deren Zeilen bzw. Spalten je aus allen k -reihigen Minoren einer festen Gruppe von k Zeilen bzw. Spalten bestehen. $A^{[k]}$ ist bis auf gewisse Permutationen von Zeilen und Spalten eindeutig bestimmt. Es wird bewiesen, daß $A^{[k]}$ beschränkt bzw. vollstetig bzw. von konvergenter Quadratsumme über alle Elemente ist, wenn A diese Eigenschaften hat. Ist A positiv definit, so auch $A^{[k]}$, ist A negativ definit, so ist $A^{[k]}$ positiv bzw. negativ definit, je nachdem k gerade oder ungerade ist.

Gottfried Köthe.

Karush, William: Determination of the extreme values of the spectrum of a bounded self-adjoint operator. Proc. Amer. math. Soc. 2, 980—989 (1951).

Es sei A ein beschränkter selbstadjungierter Operator eines Hilbertschen Raumes \mathfrak{H} ; in \mathfrak{H} gebe es ein Element x_0 derart, daß \mathfrak{H} der kleinste abgeschlossene lineare Teilraum ist, der alle Iterierten $A^i x_0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) enthält. Zur Bestimmung der oberen Grenze λ_1 des Spektrums \mathfrak{S} von A bildet Verf. nach Wahl einer festen natürlichen Zahl $s > 1$ eine Folge $x_n \in \mathfrak{H}$ nach der Vorschrift: x_{i+1} sei diejenige eindeutig bestimmte Linearverbindung von x_i , $A x_i, \dots, A^{s-1} x_i$, welche den Rayleighschen Quotienten $\mu(x) = (x, Ax)/(x, x)$ zum Maximum macht und durch die Forderung $(x_{i+1} - x_i, x_i) = 0$ normiert ist. Bewiesen wird der nach der vorangegangenen entsprechenden Untersuchung über Räume endlicher Dimension (dies. Zbl. 43, 16) zu erwartende Satz: Es konvergiert $\mu(x_n) \rightarrow \lambda_1$; die normierten Vektoren $y_n = x_n/|x_n|$ konvergieren schwach, und zwar gegen einen zu λ_1 gehörigen Eigenvektor von A , falls λ_1 Eigenwert ist, andernfalls gegen 0; ist λ_1 ein isolierter Punkt von \mathfrak{S} , so konvergiert sogar die Folge x_n stark gegen einen Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 .

Helmuth Wielandt.

Fan, Ky: Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 760—766 (1951).

L'A. établit tout d'abord deux propriétés extrémales des valeurs propres du produit d'un nombre fini d'opérateurs complètement continus; l'une d'elles, appliquée au cas de deux opérateurs, donne le théorème suivant: Si A et B sont complètement continus de valeurs propres $\{\lambda_i\}$, $\{\kappa_i\}$ rangées par modules décroissants, $\sum \sqrt{\lambda_i \kappa_i}$ est le maximum de $\text{Tr}(UAVB)$, où U, V sont unitaires quelconques. Si $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$ et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots$ sont les valeurs propres de $(AB) * AB$, resp. $(A + B) * (A + B)$, l'A. montre encore que

$$\mu_{m+n+1} \leq \lambda_{m+1} \kappa_{n+1}, \quad (\sigma_{m+n+1})^{\frac{1}{2}} \leq (\lambda_{m+1})^{\frac{1}{2}} + (\kappa_{n+1})^{\frac{1}{2}}$$

(m, n entiers ≥ 0 quelconques). Enfin, après avoir obtenu un théorème sur les distributions asymptotiques de ces valeurs propres, il montre que l'on a

$$\Phi(\sqrt{\sigma_1}, \dots, \sqrt{\sigma_n}) \leq \Phi(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) + \Phi(\sqrt{\kappa_1}, \dots, \sqrt{\kappa_n})$$

pour toute fonction de jauge symétrique (au sens de v. Neumann), Φ à n variables. ($n = 1, 2, \dots$).

Armand Borel.

Taldykin, A. T.: Über lineare Gleichungen im Hilbertschen Raum. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 529—550 (1951) [Russisch].

Verf. befaßt sich mit Gleichungen der Form $(*) \ x - \lambda A x = f$ in einem Hilbertsraum, wo x gesucht, λ komplex und A ein linearer (beschränkter) Operator ist. Er knüpft an die bekannten Arbeiten von Schauder [Studia math. 2, 183—196 (1930)], Radon [Uspechi mat. Nauk Nr. 1, 200—227 (1936)] und F. Riesz [Uspechi mat. Nauk Nr. 1, 175—199 (1936)] an. § 1. Eigenelemente von A und A^* (konjugierter Operator); Orthogonalität von Eigenelementen; Verhalten der Resolvente und der Lösung von $(*)$ in der Nähe eines Eigenwertes λ_0 . (Meist wird vorausgesetzt, daß die Resolvente nur einfache Pole hat.) § 2 behandelt den Fall, daß die Eigenwerte von A ein vollständiges System bilden, § 3 die Klasse der Operatoren A , die darstellbar sind in der Form $A = V$ (vollstetig) $+ B$ (umkehrbar) mit $|A| > |B|$. § 4. Green-

scher Operator bei Randwertaufgaben. § 5. Lösbarkeitsbedingungen und Lösungen von (*) werden mit Hilfe des Biorthogonalsystems der Eigenwerte von A und A^* ausgedrückt. § 6. Unbeschränkte Operatoren A . § 7. Die Randwertaufgabe bei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen n -ter Ordnung. — Vgl. auch Verf. (dies. Zbl. 43, 106, 118), Gochberg (dies. Zbl. 43, 119 unten), Atkinson (dies. Zbl. 42, 120).

Karl Zeller.

Bondarenko, P. S.: Zur Frage der Eindeutigkeit für unendliche Systeme linearer Gleichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 403—418 (1951) [Russisch].

Es werden unendliche Gleichungssysteme der Form (1) $x_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k + b_i$ ($i = 1, 2, \dots$) daraufhin untersucht, wann sie eine eindeutig bestimmte Lösung haben. Es wird die Methode der sukzessiven Approximationen zur Konstruktion der Lösungen benutzt und die von L. Kantorovitch entwickelte Methode der Majorantensysteme. Dabei heißt das System (2) $X_i = \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} X_k + B_i$ mit $A_{ik} \geq 0$, $B_i \geq 0$ majorant zu (1), wenn $|a_{ik}| \leq A_{ik}$, $|b_i| \leq B_i$ für alle i, k gilt. Hauptlösung von (1) heißt die Lösung von (1), die durch die Iteration $x_i^{(0)} = 0$, $x_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k^{(n-1)} + b_i$ gegebenenfalls entsteht. Es gilt, daß (2) höchstens eine Lösung besitzt, wenn die Bedingung (c) $\sum_{k=i+1}^{\infty} A_{ik} \leq MB_i$, $i = 1, 2, \dots$, gilt. Besitzt (1) ein (c) erfüllendes Majorantensystem (2) mit einer Lösung $X_i \geq \alpha > 0$ ($i = 1, 2, \dots$), so besitzt (1) eine eindeutige beschränkte Lösung. Ist (2) regulär, d. h. gilt $\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} < 1$, und besitzt (2) mindestens zwei beschränkte Lösungen, von denen eine nichtnegativ ist, so besitzt (2) unendlich viele nichtnegative Lösungen. (1) besitzt eine eindeutige beschränkte Lösung, die als Hauptlösung gefunden werden kann, wenn es zu (1) ein majorantes System gibt, das (c) erfüllt, regulär ist und eine nichtnegative Lösung besitzt. Ist (1) vollständig regulär, d. h. gilt $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \leq 1 - \theta < 1$ für alle i , so besitzt (1) genau eine beschränkte Lösung. Ist (1) nur vollständig, d. h. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| = 1 - \varrho_i < 1$, gilt aber $|b_i| \leq K \varrho_i$ und $\sum_{k=i+1}^{\infty} |a_{ik}| < N \varrho_i$ für alle i , so ergibt die Hauptlösung die eindeutig bestimmte beschränkte Lösung. Ein reguläres System besitzt höchstens eine Lösung mit $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$. Ein Beispiel aus der Elastizitätstheorie wird als Anwendung gebracht.

Gottfried Köthe.

Makar, Raouf H.: Algebraic and non-algebraic infinite matrices. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 426—435; Indagationes math. 13, 426—435 (1951).

Eine unendliche Matrix $A = (a_{ik})$ mit komplexen Elementen heißt selbstassoziativ, wenn alle ihre Potenzen A^n eindeutig gebildet werden können, sie heißt algebraisch, wenn sie einer algebraischen Gleichung genügt. A sei im Folgenden stets als selbstassoziativ vorausgesetzt. Beispiele zeigen, daß $A + B$, AB nicht wieder algebraisch zu sein brauchen, wenn A, B es sind. Zu jeder algebraischen Gleichung gibt es eine algebraische Matrix, die Wurzel dieser und keiner Gleichung niedrigeren Grades ist. Bemerkungen über die Anzahl der Gleichungen, der eine vorgegebene algebraische Matrix genügt, über die Minimalgleichungen ihrer Polynome, sowie einer eventuell existierenden Reziproken. P_A bezeichne den Polynomring in A , P'_A die Menge der Polynome vom Grad ≥ 1 . Es gilt: A ist dann und nur dann algebraisch, wenn zwei zueinander reziproke Matrizen in P_A existieren; ist A algebraisch und hat A in einem assoziativen Matrizenring eine eindeutige rechts- oder linksseitige Reziproke, so ist diese Reziproke wieder algebraisch. Die Matrizen in

P_A sind entweder alle algebraisch oder alle nicht. Die transponierte, die konjugierte und die assoziierte Matrix zu A sind mit A algebraisch oder alle nicht.

Gottfried Köthe.

Ghika, Al.: Approximation des éléments d'un espace module normé général. Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 19–20, russische und französ. Zusammenfassgn. 20–21 (1951) [Rumänisch].

Définition: Un espace module (E, A) par rapport à un anneau F -ordonné est total, si pour chaque élément singulier $x \in E$ il existe un élément régulier $x' \in E$ tel que $x = \omega x'$ où ω est un diviseur idempotent de 0. Théorème 1: Étant donné un sous-espace module C d'un espace module total normé général (E, A) et un élément régulier $x_0 \in E$ tel que $\inf_{x \in C} \|x_0 - x\| = \eta\gamma > 0$

où $\eta^2 = \eta$ et γ est un élément inversible, il existe une forme linéaire bornée f définie sur E telle que 1. $f(x_0) = \eta$, 2. $f(x) = 0$ pour tout $x \in C$ et 3. $\|f\| = \eta\gamma^{-1}$. Théorème 2: Étant donné une partie G d'un espace module total normé général (E, A) et un élément régulier $x_0 \in E$, la condition nécessaire et suffisante pour que la distance générale entre x_0 et l'ensemble H des combinaisons linéaires des éléments de G soit nulle, est que l'égalité $f(x) = 0$, pour tout $x \in G$, implique $f(x_0) = 0$ quelle que soit la forme linéaire f . (Autoreferat.)

Grothendieck, Alexandre: Sur une notion de produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques, et une classe remarquable d'espaces vectoriels liée à cette notion. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1556–1558 (1951).

Soient E et F deux espaces localement convexes séparés, $B(E, F)$ l'espace des formes bilinéaires continues sur $E \times F$, $\mathcal{B}(E, F)$ l'espace des formes bilinéaires séparément continues sur $E \times F$. L'A. définit sur le produit tensoriel $E \otimes F$ deux topologies, savoir les topologies de la convergence uniforme sur les parties équi continues de $B(E, F)$ et sur les parties séparément équi continues de $\mathcal{B}(E, F)$;

il désigne par $\widehat{E \otimes F}$ et $\widehat{E \otimes F}$ les complétés de $E \otimes F$ pour ces deux topologies, espaces dont les duals respectifs sont $B(E, F)$ et $\mathcal{B}(E, F)$. Soit F'_τ le dual de F muni de la topologie $\tau(F', F)$; si E et F sont complets, il y a une application linéaire naturelle de $\widehat{E \otimes F}$ dans l'espace $\mathcal{L}(F'_\tau, E)$ des applications linéaires continues de F'_τ dans E , muni de la topologie de la convergence uniforme dans les parties équi continues de F' . L'A. appelle opérateurs à trace les images des éléments de $\widehat{E \otimes F}$ par cette application naturelle, et annonce que ces opérateurs constituent le domaine naturel de la théorie de Fredholm. Lorsque, pour tout espace

complet F , l'application naturelle précédente est un isomorphisme de $\widehat{E \otimes F}$ sur $\mathcal{L}(F'_\tau, E)$, l'A. dit que E est un espace nucléaire, et annonce toute une série d'importantes propriétés de ces espaces, notamment une remarquable stabilité pour les opérations usuelles (sous-espace, espace quotient, dual). Il donne aussi des énoncés se rapportant au cas plus particulier où E et F sont des espaces (\mathcal{F}) . La Note ne contient aucune démonstration. Jean Dieudonné.

Dieudonné, Jean: Sur les espaces de Köthe. J. Analyse math. 1, 81–115 (1951).

Von O. Toeplitz und dem Referenten wurde die Theorie der vollkommenen Räume entwickelt, in der die Dualität durch eine Bilinearform $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n$ definiert wird. Verf. verallgemeinert diese Theorie auf Funktionenräume, für die als Bilinearform der Ausdruck $(1) \int f g d\mu$ genommen wird. Im ersten Teil wird der Raum $L^1(E, \mu)$ der auf einem beliebigen lokalkompakten Raum E bezüglich eines Radonschen Maßes μ integrierbaren Funktionen f mit der Norm $N_1(f) = \int |f| d\mu$ untersucht. Es werden die Kriterien von Banach, Saks, Dunford und Pettis über die schwache und starke Konvergenz und die schwach kompakten Mengen in L^1 auf diesen allgemeinen Fall (keine Voraussetzung über die Abzählbarkeit von E im Unendlichen) übertragen. Im zweiten Teil wird der lineare Raum Ω der auf E

lokal integrierbaren f eingeführt mit den Halbnormen $N_K(f) = \int_K |f| d\mu$, K irgendeine kompakte Teilmenge von E . Ω ist stark vollständig, sein dualer Raum ist der Raum Φ der meßbaren und beschränkten Funktionen g mit kompaktem Träger in E . Ist E abzählbar im Unendlichen, was im folgenden vorausgesetzt wird, so ist Ω ein Raum (F) und Φ ein Raum (LF) , nämlich induktiver Limes von Banachräumen $L^\infty(K_n, \mu)$, K_n kompakt in E . Ω und Φ gehen im Fall eines diskreten Maßes μ in die vollkommenen Räume ω bzw. φ über. Ist Γ eine Teilmenge von Ω , so bildet die Menge aller $f \in \Omega$, für die fg für jedes $g \in \Gamma$ integrierbar ist, einen linearen Teilraum Λ von Ω . Entsprechend ist Λ^* aus der Menge $\Gamma = \Lambda$ abgeleitet, Λ und Λ^* sind dann in schwacher Dualität durch die Bilinearform (1) und werden als zwei assoziierte Räume von Köthe bezeichnet. Die Theorie dieser Räume wird nun im dritten Teil in engem Anschluß an eine Arbeit des Referenten (dies. Zbl. 42, 116) über die Theorie der vollkommenen Räume durchgeführt. Ein solcher Raum Λ wird aufgefaßt als Durchschnitt von Räumen L^1_σ , die durch eine Menge Γ , die nur aus einem $g \geq 0$ besteht, erklärt sind. Diese Räume L^1_σ sind im wesentlichen von der Form $L^1(E, \nu)$, deren im ersten Teil vorausgeschickte Theorie also die Grundlage bildet. Es lassen sich so alle wesentlichen Resultate aus der Arbeit des Ref. auf den vorliegenden allgemeinen Fall übertragen, sogar die Beweise lassen sich teilweise ohne größere Modifikationen übernehmen.

Gottfried Köthe.

Arens, Richard and James Dugundji: Topologies for function spaces. Pacific J. Math. 1, 5—31 (1951).

Soit Z^r l'ensemble des applications continues $f: Y \rightarrow Z$, où Y, Z sont des espaces topologiques (pas d'axiome de séparation). Une topologie t de Z^r est appelée admissible, si $\omega(y, f) = f(y)$ est continue. Elle est nommée propre, si pour chaque espace X , et pour chaque application continue $g: X \times Y \rightarrow Z$, l'application $g^*(x) = g(x, y)$ (de X en Z^r) est continue. (Ces topologies t peuvent être définies à l'aide de la convergence continue également.) Les auteurs étudient l'ordre (partiel) des topologies admissibles et propres des espaces fonctionnels Z^r . Ils démontrent entre autres les résultats suivants: Soient s, t topologies de Z^r . Si $s \leq t$ et t est propre, s est propre. Si $s \leq t$ et s est admissible t l'est également. Si s est propre et t admissible, on a $s \leq t$. Une topologie à la fois propre et admissible est unique, mais elle n'existe pas nécessairement. Si Y est complètement régulier, mais il n'est pas localement compact, il n'existe pas de topologie qui soit à la fois propre et admissible. Si Y est métrique et non localement compact, il existe un couple de topologies admissibles, dont la borne inférieure n'est pas admissible. Les topologies propres forment un idéal dans le lattis de toutes les topologies; la plus grande topologie propre existe toujours. Pour les topologies admissibles les auteurs trouvent des résultats dans le cas, où Z est la droite numérique. Il est connu que, si Y est localement compact il existe une topologie à la fois propre et admissible; les auteurs donnent des résultats concernant une généralisation de cette topologie. Ils discutent diverses questions concernant l'espace des sous-ensembles fermés d'un espace (qui peut être considéré comme espace fonctionnel), et trouvent le résultat suivant concernant le produit: s et t soient topologies sur X . Si S est la topologie de $X(s) \times X(s)$, T celle de $X(t) \times X(t)$, R celle de $X(s \wedge t) \times X(s \wedge t)$, alors R peut être différent de $S \wedge T$.

István Fáy.

Motchane, Léon: Espaces compacts au sens de la convergence simple. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1569—1571 (1951).

L'A. annonce le résultat suivant: „La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille (\mathcal{F}) d'applications f d'un ensemble E dans un espace compact K soit un espace compact métrisable pour la topologie de la convergence simple est que (\mathcal{F}) soit équi-associée à un système essentiel“. Un „système essentiel“ est une famille de sous-ensembles de E , $e(n, i)$ avec n entier et $i \in I$ (ensemble quelconque d'indices) tels que pour tout n , $\bigcup_{i \in I} e(n, i) = E$, et que pour tout n , il existe un ensemble dénombrable $I_n \subset I$ tel que si $s(n) = \bigcup_{i \in I_n} e(n, i)$ la réunion des $e(n, i)$ qui rencontrent $s(n)$ soit identique à E . (\mathcal{F}) est „équi-associée“ à un tel système si, pour tout n , tout $i \in I$ et toute $f \in \mathcal{F}$ l'oscillation de f sur $e(n, i)$ est inférieure à $1/n$. André Revuz.

Nagata, Jun-iti: A characterization of the lattice of lower semi-continuous functions on T_1 -space. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 2, 23—29 (1951).

L'A considère sur un ensemble L une structure d'ensemble réticulé („lattice“) complet (toute partie majorée a une borne supérieure) distributif et ayant un plus petit élément 0, et une multiplication par les nombres réels ≥ 0 , telle que $\alpha \geq \beta$ entraîne $\alpha f \geq \beta f$ pour tout $f \in L$, $f \geq g$ dans L entraîne $\alpha g \geq \alpha f$, $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$ et $1 \cdot f = f$. Il donne un système de conditions nécessaires et suffisantes, trop compliquées pour être reproduites ici, pour que L soit isomorphe (au sens de la structure précédente) à l'ensemble des fonctions positives, bornées et semi-continues inférieurement sur un espace topologique satisfaisant à l'axiome T_1 .

Jean Dieudonné.

Novák, Josef et Ladislav Mišík: Über L -Räume von stetigen Funktionen. Mat.-fyz. Sbornik, Slovensk. Akad. Vied Umeni 1, 1—13, russische und französ. Zusammenfassg. 14—15, 16—17 (1951) [Slowakisch].

Les AA. étudient des espaces (L) de Fréchet. Ils disent qu'un point x possède la propriété (Q) ou qu'il est un (Q) -point s'il existe une suite double x_{nk} ($n, k < \omega$) de points de l'espace telle qu'il n'existe aucune „suite diagonale“ $x_{n_k k_i}$ ($i < \omega$) (c. à. d. aucune suite $n_1 < n_2 < \dots$) tendant vers x bien que $\lim x_{nk} = x$ ($n < \omega$). On démontre l'existence des espaces $(L)^k$ possédant des (Q) -points; le caractère d'un point pareil est $> \aleph_0$ (Th. 2; dans le texte slovaque dans le Th. 2 il faut lire $>$ au lieu de $=$). Si un groupe topologique commutatif contient un (Q) -point, tous ses points sont pareils (L. 2); la non-existence de (Q) -points y est équivalente à la condition $\overline{A} = \overline{A}$ (Th. 3); dans le cas général, les deux conditions chevauchent (p. p. 9/10). Le produit de deux espaces (L) non isolés dont l'un possède un (Q) -point ne peut pas être un espace (L) (Th. 5); par ex. L_1 désignant l'espace ordinaire des fonctions réelles continues le produit $L_1 \times L_2$ n'est pas un espace (L) . Soit f_k ($k < \omega$) une suite de fonctions réelles uniformes continues définies dans $[0, 1]$ vérifiant $\lim_k f_k(x) = 0$, $f_k(0) = f_k(1)$; par le „procédé d “ que voici on en déduit

une suite double de fonctions f_{ik} comme suit: $f_{1k}(x) = f_k(x)$; pour tout $i > 1$ on pose $f_{ik}(x) = f_k(ix)$ ($0 \leq ix \leq 1/i$), $f_{ik}(x) = f_{ik}(x + v/i)$ ($v = 1, 2, \dots, i-1$). Le procédé d sert comme un moyen de construction; par ex. si la suite considérée converge non uniformément vers 0, alors de la suite double f_{ik} précédente on peut extraire une suite double partielle par rapport à laquelle le point 0 jouit de la propriété (Q) .

George Kurepa.

Calderón, A. P. and A. Zygmund: A note on the interpolation of linear operations. Studia math. 12, 194—204 (1951).

Weiterführung der von den Verff. in einer früheren Abhandlung erzielten Resultate (vgl. dies. Zbl. 40, 29). $L^{r, \mu}$ bedeute die Funktionenklasse, für welche $\|f\|_{r, \mu} = \left(\int_E |f|^r d\mu \right)^{1/r}$ endlich ist, wobei f eine auf E erklärte meßbare Funktion und $r > 0$ ist. E_1, E_2 seien zwei Maßräume vom Maß μ bzw. ν . Eine Operation $h = Tf$ heiße „vom Typus (r, s) “, wenn sie für alle $f \in L^{r, \mu}$ definiert und additiv ist, wobei h auf E_2 erklärt ist, und wenn eine endliche Konstante M derart existiert, daß für alle f in $L^{r, \mu}$ die Ungleichung $\|h\|_{s, \nu} \leq M \|f\|_{r, \mu}$ gilt. Eine auf E definierte Funktion heiße „einfach“, wenn sie nur eine endliche Anzahl von Werten annimmt und wenn sie außerhalb einer Menge von endlichem Maß verschwindet. Ein grundlegender Satz von M. Riesz über Operationen, die gleichzeitig von zweierlei Typus sind, wurde von den Verff. (loc. cit.) in folgender Form bewiesen: A. Die lineare Operation $h = Tf$ sei für alle einfachen Funktionen f in E_1 (h auf E_2) definiert. T sei gleichzeitig vom Typus $(1/\alpha_1, 1/\beta_1)$ und vom Typus $(1/\alpha_2, 1/\beta_2)$, d. h.

$$\|Tf\|_{1/\beta_1} \leq M_1 \|f\|_{1/\alpha_1}, \quad \|Tf\|_{1/\beta_2} \leq M_2 \|f\|_{1/\alpha_2},$$

wo die Punkte (α_1, β_1) und (α_2, β_2) dem Quadrat $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$ angehören. Dann ist T auch vom Typus $(1/\alpha, 1/\beta)$ für alle

$\alpha = (1-t)\alpha_1 + t\alpha_2$, $\beta = (1-t)\beta_1 + t\beta_2$ ($0 < t < 1$) mit $(*) \|Tf\|_{1/\beta} \leq M_1^{1-t} M_2^t \|f\|_{1/\alpha}$. Ist insbesondere $\alpha \neq 0$, so läßt sich die Operation T unter Beibehaltung von $(*)$ eindeutig auf den ganzen Raum $L^{1/\alpha, 1/\beta}$ ausdehnen. — Die Verff. beweisen jetzt die folgende Erweiterung

dieses Satzes: A'. Der Satz A gilt noch, wenn die Punkte $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ dem Streifen $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta < \infty$ angehören. — Der von den Verff. bereits früher bewiesene entsprechende Satz für multilineare Operationen und ein weiterer Satz über die Interpolation linearer Operationen werden in ähnlicher Weise verallgemeinert.
Viktor Garten.

Riesz, Frédéric: Sur la représentation des opérations fonctionnelles linéaires par des intégrales de Stieltjes. Eysioogr. Sällsk. Lund Förhdl. 21. Nr. 16, 147—151 (1951).

Neuer Beweis des folgenden klassischen Satzes des Verf.: Ist die Operation Af für jede in $[a, b]$ stetige Funktion $f(x)$ erklärt und genügt sie den Bedingungen (1) $A(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 Af_1 + c_2 Af_2$ und (2) $|Af| \leq M \cdot \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, wo M eine feste Zahl bedeutet, so gibt es eine Funktion $\lambda(x)$, die in $[a, b]$ von beschränkter Variation ist, so daß $Af = \int_a^b f(x) d\lambda(x)$ für jede in $[a, b]$ stetige Funktion $f(x)$ gilt. Der Beweis läuft über den folgenden Satz: Genügt die Operation Af (die wieder für die in $[a, b]$ stetigen Funktionen erklärt ist) den Bedingungen (1) und (2') $|Af| \leq M \cdot \int_a^b f(x) dx$, so gilt $Af = \int_a^b f(x) d\beta(x)$, wo $\beta(x)$ eine feste Funktion mit beschränkten Differenzenquotienten ist.
Akos Császár.

Hewitt, Edwin and H. S. Zuckerman: Integration in locally compact spaces. II. Nagoya math. J. 3, 7—22 (1951).

Es sei X ein lokal kompakter Hausdorffscher Raum. \mathfrak{C} sei die Menge der in X definierten und außer einer kompakten Teilmenge von X verschwindenden reellen Funktionen. Mit \mathfrak{A} bezeichnen wir das System aller kompakten, mit \mathfrak{F} das aller abgeschlossenen, mit \mathfrak{G} das aller offenen Teilmengen von X . Es sei $M(f)$ eine für $f \in \mathfrak{C}$ definierte Operation, die die Eigenschaften a) $M(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 M(f_1) + c_2 M(f_2)$ und b) $M(f) \geq 0$ für $f \geq 0$ besitzt. Für $A \in \mathfrak{A}$ definieren wir $\mu(A) = \inf_{c \leq t_A} \mu(c)$ (t_A bedeutet dabei die charakteristische Funktion von A). Es sei dann $\mu'(G) = \sup_{A \in \mathfrak{A}, A \subset G} \mu(A)$ für $G \in \mathfrak{G}$. Endlich sei für $P \subset X$ $\mu^*(P) = \inf_{G \in \mathfrak{G}, G \supset P} \mu'(G)$. Dann ist $\mu^*(P)$ ein äußeres Maß auf X , jede Menge von F ist μ^* -meßbar, und es gilt für $c \in \mathfrak{C}$ $M(c) = \int_X c(x) d\mu^*(x)$. Das Hauptergebnis der Arbeit besteht darin, daß die obige Konstruktion einer anderen von H. Cartan (dies. Zbl. 26, 227) vollkommen äquivalent ist.
Akos Császár.

Kawada, Yukiyosi: Correction to my paper on equivalence of measures on an infinite product space. Math. Japonicae 2, 102 (1951).

Berichtigung zu der in dies. Zbl. 41, 73 besprochenen Arbeit.

Dieudonné, Jean: Addition à mon article „Sur la convergence des suites de mesures de Radon“. Anais Acad. Brasil. Ci. 23, 277—282 (1951).

All measures under consideration are (signed) Radon measures on a compact space E . Let μ denote the absolute variation of a measure μ , and let $\|\mu\| = \mu(E)$. — Let μ_n be a sequence of measures. The following theorems are proved: If the sequence $\mu_n(A)$ is bounded for every finite set $A \subset E$ and for every open set $A \subset E$ such that $\mu_n(A - A) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), then the sequence $\|\mu_n\|$ is also bounded. (II) If $\lim \mu_n(A)$ exists for every finite set $A \subset E$ and for every open set $A \subset E$ such that $\mu_n(A - A) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), then there is a measure μ such that $\lim \int f d\mu_n = \int f d\mu$ for every bounded function f such that $\mu_n(D) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) where D is the set of points of discontinuity of f . — These theorems are stronger than some analogous theorems in Dieudonné's paper mentioned in the title (see this Zbl. 43, 112. Theorems IX and VIII).

Roman Sikorski.

Lindgren, Bernhard W.: An integral on a space of continuous functions. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 634—642 (1951).

Nach dem Muster des Wiener'schen Integralbegriffs [Acta Math. **55**, 117—258 (1930)] definiert Verf. ein Maß und ein Integral im Raume C der in $[0, 1]$ stetigen reellen Funktionen. Es sei $0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1$ und die Menge B aller Funktionen $x(t) \in C$ mit $a_i < x(t_i) < b_i$ ($i = 1, \dots, n$), wo $-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty$ gegebene reelle Zahlen sind, heiße ein Quasi-Intervall des Raumes C . Dem Quasi-Intervall B werde das Maß $m(B) = \int_{\mathfrak{B}} E(u, t) du$ zugeschrieben, wo

$$E(u, t) = E(u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_n) \\ = \exp \left[- \sum_{i=2}^n \frac{(u_i - u_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} \right] \cdot \frac{1}{\pi^{(n-1)/2}} \sqrt{(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})} \quad (n \geq 2),$$

$E(u, t) = 1$ ($n = 1$) ist und \mathfrak{B} die Menge der Punkte (u_1, \dots, u_n) mit $a_i < u_i \leq b_i$ ($i = 1, \dots, n$) im n -dimensionalen euklidischen Raum bedeutet. Mit Hilfe dieses für Quasi-Intervalle definierten Maßes wird durch Überdeckungen ein äußeres Maß definiert und dann eine Carathéodory'sche Maßtheorie aufgebaut, endlich geschieht die Definition des Integrals in der üblichen Weise. Die Beziehungen dieses Integrals mit dem Wiener'schen werden untersucht und denen des Wiener'schen Integrals analoge Eigenschaften werden bewiesen. Akos Császár.

Graves, Ross E.: Additive functionals on a space of continuous functions. II. Ann. of Math., II. Ser. **54**, 275—285 (1951).

Für die Definitionen und Bezeichnungen sei auf das Referat vom Teil I (dies. Zbl. **42**, 117) verwiesen. Es wird die Vermutung von Cameron bewiesen, daß jedes additive und meßbare Funktional $F(x)$ auf dem Wiener'schen Raum C zu $L_2(C)$ gehört, dem Raum der bezüglich des Wiener'schen Maßes auf C quadratisch integrierbaren Funktionale. Aus einem Satz über die Fourier-Hermite'sche Entwicklung von $e^{iF(x)}$ folgt eine Darstellung (1) $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F(\beta_k) \int_0^1 \alpha_k(t) \tilde{d}x(t)$, die für fast alle $x(t) \in C$ gilt, wobei $\{\alpha_k(t)\}$ das bei der Definition der Fourier-Hermite'schen

Polynome verwendete vollständige Orthonormalsystem ist und $\beta_k(t) = \int_0^t \alpha_k(u) du$ bedeutet. Aus (1) ergibt sich die Cameronsche Vermutung. Für einige Sätze aus Teil I werden einfachere Beweise gegeben, zum Teil lassen sie sich in verschärfter Form aussprechen. Schließlich ergibt sich eine Charakterisierung der stetigen linearen Funktionale auf dem Raum K der Funktionen f der Klasse L_2 auf $[0, 1]$: $G(f)$ ist dann und nur dann ein stetiges lineares Funktional auf K , wenn ein meßbares additives Funktional $F(x)$ auf C existiert, so daß $G(f) = F \left[\int_0^t f(u) du \right]$ für alle $f \in K$ gilt.

$F(x)$ ist bis auf Äquivalenz bestimmt und die Norm von $G(f)$ ist gleich $\sqrt{2}$ -mal der Norm von F in $L_2(C)$. Gottfried Köthe.

Cameron, Robert H.: The first variation of an indefinite Wiener integral. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 914—924 (1951).

Es sei C der Wiener'sche Raum der in $[0, 1]$ stetigen Funktionen $x(t)$ mit $x(0) = 0$, $F(x)$ sei ein meßbares Funktional auf C und $G(u) = \int_{x(t) \leq u(t)}^W F(x) dW x$ das Wiener'sche unbestimmte Integral über F ; die Funktion $u(t)$ kann eine beliebige Borelmebare Funktion auf $[0, 1]$ sein. Es wird untersucht, wann $G(u)$ eine erste Variation besitzt. Ist $y_0(t) \in C$ absolut stetig und ist $y'_0(t)$ von wesentlich beschränkter Schwankung in $[0, 1]$, besitzt ferner $F(x)$ eine erste Variation $\delta F = \frac{d}{dh} F(x + h y_0)|_{h=0}$, dann wird unter gewissen zusätzlichen Summier-

barkeitsvoraussetzungen gezeigt, daß $G(u)$ eine erste Variation $\delta G(u/y_0) = \frac{d}{dh} G(u + h y_0)|_{h=0}$ besitzt, die sich nach der Formel

$$\delta G(u/y_0) = \int_{x(t) \leq u(t)}^W \delta F(x/y_0) d_W x - 2 \int_{x(t) \leq u(t)}^W F(x) \left[\int_0^1 y'_0(t) dx(t) \right] d_W x$$

berechnen läßt. Wird über den ganzen Raum C integriert (also $u(t) \equiv +\infty$), so wird $\delta G = 0$. Daraus ergibt sich eine Regel für partielle Integration:

$$\int_C^W F(x) \delta G(x/y_0) d_W x = \int_C^W G(x) \left[2 \int_0^1 y'_0(t) dx(t) - \delta F(x/y_0) \right] d_W x.$$

Ein weiterer Satz gibt unter gewissen Summierbarkeitsvoraussetzungen eine Dar-

stellung $\int_C^W F'(x/t) d_W x = -2 \frac{d^2}{dt^2} \int_C^W F(x) x(t) d_W x$ des Wienerischen Integrals einer

Volterraderivierten $F'(x/t)$ des Funktional $F(x)$; dabei ist $F'(x/t)$ durch eine Dar-

stellung $\delta F(x/y) = \int_0^1 F'(x/t) y(t) dt$ bestimmt.

Gottfried Köthe.

Sunouchi, Gen-ichirô: Harmonic analysis and Wiener integrals. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 187—196 (1951).

Die Note knüpft an die Arbeiten von R. H. Cameron und W. T. Martin über die Transformation von Wienerischen Integralen an [Ann. of Math., II. Ser. 45, 386—396 (1944); Trans. Amer. math. Soc. 58, 184—219 (1945)] und beweist etwas allgemeinere Resultate mit einer anderen Methode (harmonische Analysis der Brownschen Bewegung). Für die einfachste Transformation, die Translation, wird bewiesen: Theorem 2: Es sei $F(y)$ ein Wiener-integrables Funktional über C (alle in $0 \leq t \leq 1$ stetigen Funktionen) und $x_0(t)$ eine absolut stetige Funktion mit $x'_0(t) \in L^2(0, 1)$. Dann gilt unter der Translation $y(t) = x(t) + x_0(t)$ die Transformationsformel

$$\int_0^W F[y] d_W y = \exp \left(- \int_0^1 [x'_0(t)]^2 dt \right) \int_C^W F(x + x_0) \exp \left(- 2 \int_0^1 x'_0(t) dx(t) \right) d_W x,$$

wo $\int_0^1 x'_0(t) dx(t)$ im Paley-Wienerischen Sinn zu nehmen ist. Sodann wird eine ent-

sprechende Formel für die allgemeinere Transformation $y(t) = x(t) + \int_0^1 K(t, s) x(s) ds$ aufgestellt, wo $K(t, s)$ eine gewisse Anzahl von einfacheren (Theorem 3) oder komplizierteren Bedingungen (Theorem 4) erfüllen muß, die hier nicht aufgezählt werden können.

Gustav Doetsch.

Itô, Kiyosi: Multiple Wiener integral. J. math. Soc. Japan 3, 157—169 (1951).

Das von N. Wiener (dies. Zbl. 19, 354) eingeführte mehrfache Wienerische Integral wird hier auf andere Weise definiert, und zwar zunächst für eine spezielle Klasse S_n von Funktionen und dann, da sich der dadurch bestimmte Operator als beschränkt erweist, durch Fortsetzung für die abgeschlossene Hülle von S_n . Als eine fundamentale Eigenschaft wird bewiesen, daß Integrale verschiedenen Grades orthogonal sind, was bei der Wienerischen Definition nicht zutrifft. Es wird eine Identität zwischen Wienerischen Integralen bewiesen, in der die Hermiteschen Polynome auftreten, und mit ihrer Hilfe eine Orthogonalentwicklung für „ L_2 -Funktionale“ abgeleitet (vgl. hierzu R. H. Cameron und W. T. Martin, dies. Zbl. 29, 143). Schließlich wird gezeigt, daß in dem Falle, daß das zugrunde liegende „normale Zufallsmaß“ auf Grund einer „Brownschen Bewegung“ definiert ist, das mehrfache Wienerische Integral durch iterierte stochastische Integrale [S. Kakutani, Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 319—323 (1950)] ausgedrückt werden kann.

Gustav Doetsch.

Hartman, S., E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski: Théorèmes ergodiques et leurs applications. Colloquium math. 2, 109—123 (1951).

Verff. zeigen, wie durch ihre neueren Beiträge dem Problemkreis des asymptotischen Verhaltens der Mittelwerte $\Phi_n(x) = \{f(x) + f[\varphi(x)] + \dots + f[\varphi^{n-1}(x)]\}/n$ und dessen Anwendungen auf die metrische Theorie der Kettenbrüche eine übersichtliche und abgerundete Zusammenfassung gegeben werden kann. Hierbei ist x Element einer abstrakten Menge X , und über einem abzählbar additiven Körper M der Teilmengen von X ist eine höchstens abzählbar additive Maßfunktion $\mu > 0$ mit $\mu(X) = 1$ gegeben. $\varphi(x)$ ist eine, möglicherweise mehrdeutig umkehrbare, meßbare Abbildung von X auf sich und $f(x)$ ist irgendeine, $g(x)$ eine geeignete meßbare Funktion über X . Dann gilt I. die Birkhoffsche Beziehung $\Phi_n(x) - g(x) \rightarrow 0$ fast überall bzw. II. die v. Neumannsche $\int_X |\Phi_n(x) - g(x)| d\mu \rightarrow 0$ bei integrierbarem f und g nach F. Riesz bereits bei maßtreuem φ . Ist φ auch unzerlegbar, d. h. beläßt φ nur die Mengen vom 0- oder 1-Maß, dann läßt sich I. zu III. bzw. IV.: $g(x) = \int_X f(x) d\mu < \text{bzw.} = +\infty$ spezialisieren. Ist V. bei solchem φ f nur meßbar, dann gibt es ein U mit $\mu(U) = 1$, innerhalb dessen für jedes reelle y die Häufigkeit von $f[\varphi^n(x)] < y$ gleich der Verteilungsfunktion $F(y)$ von f , d. h. des μ -Maßes der x -Menge mit $f(x) < y$, ist. VI. In einem metrischen, kompakten X mit $\mu > 0$ für die offenen Mengen eines Borelschen M erfolgt nach Hartman die Konvergenz in III. überall, wenn die φ^n äquikontinuierlich sind und f durch zwei stetige g_1, g_2 mit $\int_X |g_2(x) - g_1(x)| d\mu < \varepsilon$ eingeeengt werden kann. Weyls Satz wonach VII. $\Phi_n(x) \rightarrow \int_0^1 f(z) dz$ bei R -integrierbarem $f(x+1) = f(x)$ und $\varphi(x) = x + \xi$ mit irrationalem ξ für alle bzw. VIII. nach Khintchin bei L -integrierbarem f für fast alle x eintritt, ist eine Folge von VI. bzw. III. Raikovs Satz IX., wonach VIII. auch bei $\varphi(x) = 2x$ gilt und somit Borels Satz über die normalen Zahlen folgt aus III. mit dem Rieszschen $\varphi(x) = [2x]$. Verff. zeigen auch, daß Kolmogoroffs starkes Gesetz der großen Zahlen bzw. ein von Doob 1940 verallgemeinerter Satz von Khintchin aus III. bzw. I. abgeleitet werden kann. Für die übrigen sechs Sätze von Dunford und Miller sowie von Ryll-Nardzewski und Hartmann vgl. die drei folgenden Referate.

Tibor Szentmártony.

Ryll-Nardzewski, C.: On the ergodic theorems. I. Generalized ergodic theorems. Studia math. 12, 65—73 (1951).

Es sei 1. S das gegenüber Ergänzung und höchstens abzählbare (kurz σ -) Vereinigung geschlossene System von Teilmengen einer abstrakten Menge X , 2. μ ein über S σ -additives und σ -endliches Maß, 3. f irgendeine und g eine geeignete reellwertige, über X μ -integrierbare Funktion, 4. φ eine S -meßbare und nullmaßtreue Abbildung von X auf sich, 5. $\Phi_n(x) = \{f(x) + f[\varphi(x)] + \dots + f[\varphi^{n-1}(x)]\}/n$ und 6. $M_n(Y, E) = \{\mu(Y \cdot E) + \mu(Y \cdot \varphi^{-1}E) + \dots + \mu(Y \cdot \varphi^{-(n-1)}E)\}/n$ bei jedem E und $Y \subset S$. Dunford und Miller zeigten 1946, daß im Falle $\mu(X) < \infty$ statt der Maßtreueheit von $\varphi(x)$ bereits $M_n(X, E) \leq K \mu(E)$ bei festem K notwendig und hinreichend für das Bestehen der v. Neumannschen Ergodenbeziehung $\int_X |\Phi_n(x) - g(x)| d\mu \rightarrow 0$ (kurz N) ist und die Gültigkeit der Birkhoffschen Ergodenrelation $\Phi_n(x) - g(x) \rightarrow 0$ fast überall (kurz B) sichert. Im X der irrationalen Zahlen von $(0,1)$ und mit dem Lebesgueschen Maß μ genügt aber Marczewskis $\varphi(x) = x^{-1} - [x^{-1}]$ nach Hartman nur der (kurz H) Bedingung $\lim_n \overline{M_n(X, E)} \leq K \mu(E)$. — Verf. zeigt nun, daß zu B jede der folgenden Bedingungen allein notwendig und hinreichend ist: a) $\lim_n \overline{M_n(Y, E)} \leq K \mu(E)$, b) $\lim_n \overline{M_n(Y, E)} \leq K \mu(E)$ für alle Y und E mit $\mu(Y) < \infty$, also bei $\mu(X) < \infty$ die Bedingung H, c) bei $X = Y_1 + Y_2 + \dots$ mit $Y_i \subset Y_{i+1}$: $\lim_n \overline{M_n(Y_i, E)} \leq K \mu(E)$. — Verf. gibt mit Hilfe dieses Satzes einen zweiten Beweis des Dunford-Millerschen Satzes sowie ein Beispiel dafür, daß H dessen Bedingung nicht sichert. Das Beispiel ist eine Modifikation des von Dowker 1949 gegebenen und zeigt, daß aus B allein N nicht folgt.

Tibor Szentmártony.

Ryll-Nardzewski, C.: On the ergodic theorems. II. Ergodic theory of continued fractions. *Studia math.* **12**, 74—79 (1951).

Es bezeichne $\varphi(x)$ eine Abbildung des abstrakten Raumes X auf sich. Sie sei bezüglich eines, über einem σ -Ring der Teilmengen E von X σ -additiven Maßes μ mit $\mu(X) = 1$ einerseits maßtreu, andererseits unzerlegbar, belasse also nur die Mengen mit 0- oder 1-Maß. Als ein Folgesatz des individuellen Ergodensatzes gilt dann für jede über X integrierbare Funktion $f(x)$ fast überall $\frac{1}{n} \{f(x) + f[\varphi(x)] + \dots + f[\varphi^{n-1}(x)]\} \rightarrow \int_X f d\mu$. Im X der irrationalen Zahlen von $(0,1)$ und bezüglich des Lebesgueschen Maßes ist aber Marczewskis $\delta(x) = x^{-1} - [x^{-1}]$, also die Zuordnung des ersten vollständigen Quotienten $\frac{1}{c_2(x)} + \frac{1}{c_3(x)} + \dots$ in der Kettenbruch-

entwicklung von $x = \frac{1}{c_1(x)} + \frac{1}{c_2(x)} + \dots$ zu x nach der ergodentheoretischen Deutung eines Satzes von Knopp (1926) — wie das Verf. auch unmittelbar beweist — bezüglich des L -Maßes zwar unzerlegbar, aber nicht maßtreu. Verf. zeigt nun, daß, wenn in diesem X alle L -meßbaren Mengen E mit der Gaußschen Grenzverteilungsfunktion des reziproken Wertes des n -ten vollständigen Quotienten der Kettenbruch-Entwicklung von x bewertet werden, also $\nu(E) = \frac{1}{\log 2} \int_E \frac{dx}{1+x}$ gesetzt wird, diesbezüglich δ schon unzerlegbar und maßtreu wird. So strebt

$\frac{1}{n} \{f(x) + f[\delta(x)] + \dots + f[\delta^{n-1}(x)]\}$ gegen $\int_0^1 f d\nu = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx$ fast überall. Als Folgesätze ergeben sich bei speziellen $f(x)$ vier Sätze aus der metrischen Theorie der Kettenbrüche.

Zwei bekannte von P. Lévy bzw. Khintchin, ein neuer von Hartman und als Verallgemeinerung der beiden letzten bei $f(x) = F[c_1(x)]$ mit einer stetig und ständig wachsenden $F(x)$ der Satz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{-1} \left\{ \frac{F[c_1(x)] + \dots + F[c_n(x)]}{n} \right\} = F^{-1} \left\{ \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{F[c_1(x)]}{1+x} dx \right\} \text{ für fast alle } x.$$

Tibor Szentmártony.

Hartman, S.: Quelques propriétés ergodiques des fractions continues. *Studia math.* **12**, 271—278 (1951).

Auf den vorangehend ref. Satz von Ryll-Nardzewski sich stützend, zeigt Verf. in Verschärfung einiger Feststellungen von F. Bernstein (1912) und Khintchin (1924, 1935) folgendes. Für fast alle irrationalen $x = \frac{1}{c_1(x)} + \frac{1}{c_2(x)} + \dots$ innerhalb $(0,1)$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [c_1(x) + \dots$

$+ c_n(x)] = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{c_2(x)}{c_1(x)} + \dots + \frac{c_{n+1}(x)}{c_n(x)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{c_1(x)}{c_2(x)} + \dots + \frac{c_n(x)}{c_{n+1}(x)} \right] = \infty$. Die

hieraus ersichtliche starke Oszillation von $\{c_i(x)\}_{i=1}^\infty$ war aus P. Lévy's Satz, wonach jedes natürliche p in dieser Folge mit der Häufigkeit $\frac{1}{\log 2} \frac{\log(p+1)^2}{p(p+2)}$ erscheint, zwar zu erwarten,

der neue Satz ist aber kein Folgesatz des letzteren. Aus Lévy's Satz folgt allerdings nach Ryll-Nardzewski sofort, daß für jede Folge $\gamma_n \rightarrow \infty$ die Häufigkeit der Indizes n mit $c_n(x) \geq \gamma_n$ für fast alle x Null ist. Hieraus ergibt sich aber folgende Feststellung. Ist $p_n(x)/q_n(x)$ der n -te Näherungsbruch von x und gilt $\varphi(n) \rightarrow \infty$, dann ist die Häufigkeit der n_k mit $|x - p_{n_k}(x)/q_{n_k}(x)| < 1/[q_{n_k}^\varphi(x) \varphi(q_{n_k}(x))]$ für fast alle x gleich Null. Abschließend zeigt Verf. — die von Ryll-Nardzewski angewandte Maßfunktion im Raume obiger x benützend —, daß, wenn $\{E_n\}_{n=1}^\infty$

bzw. $\{E_n^q\}_{n=1}^\infty$ die Mengen jener natürlichen q bzw. r bezeichnen, für welche ein x mit $q_n(x) = q$

bzw. außerdem noch $q_{n+1}(x) = r$ gibt, dann $\sum_{q \in E_n} \sum_{r \in E_n^q} \frac{1}{r^2} \leq 2$ ist. *Tibor Szentmártony.*

Ionescu Tulcea, C. T.: Un théorème ergodique. *Commun. Acad. Republ. popul. Române* **1**, 23—25, russische und französ. Zusammenfassgn. **26**, 26—27 (1951) [Rumänisch].

Soit W un espace métrique compact, E un espace métrique et $P^1(t, A)$ une fonction numérique définie sur $W \times B(E)$ [$B(E)$ est la tribu des parties boreliennes de E] ayant les propriétés: (1) $P^1(t, A)$ est, pour t fixe, complètement additive sur $B(E)$ et $P^1(t, W) = 1$; (2) quels que soient

$A, t_1, t_2, |P^1(t_1, A) - P^1(t_2, A)| \leq M d(t_1, t_2)$, $d(t_1, t_2)$ étant la distance entre t_1, t_2 . Soit pour tout $x \in E$ une application τ_x de W dans \bar{W} satisfaisant aux conditions: (1') $d(\tau_x(t_1), \tau_x(t_2)) \leq \alpha d(t_1, t_2)$ où α est une constante, $0 < \alpha < 1$, (2') $\tau_{(x_1, \dots, x_p)}(t)$ est continue sur l'espace produit $E \times \dots \times E = E_p$ quel que soit $t \in W$. Soit encore (CL) l'espace de Banach des fonctions complexes définies sur W telles que le rapport $|f(t_1) - f(t_2)|/d(t_1, t_2)$ ait une borne supérieure finie $m(f)$, normé par $\|f\| = m(f, d) + \max |f(t)|$ sur W . On sait [C. T. Ionescu Tulcea et G. Marinescu, Ann. of Math., II. Ser. 52, 146 (1950); ce Zbl. 40, 65] que l'application $f \rightarrow U(f) = \int_E P^1(t, dx) f(\tau_x(t))$ est quasi-compacte [c'est-à-dire qu'il existe une application

compacte V et un m entier (≥ 1) tel que $\|U^m - V\| < 1$ et que les normes $\|U^n\|$ sont bornées uniformément]. — On peut démontrer le théorème ergodique suivant: S'il existe une mesure $m(A)$ positive dénombrablement additive, définie sur $B(E)$ avec $m(E) = 1$, strictement positive pour tout voisinage ouvert d'un point $x \in E$, et un $\lambda > 0$ tel que $P^1(t_1, A) \geq \lambda m(A)$ quel que soit $(t_1, A) \in W \times B(E)$ alors il existe une application distributive et bornée $F(f)$, de (CL) dans le sous-espace de (CL) formé par les nombres complexes, et deux nombres $M > 0$, $\varepsilon > 0$ tels que $\|U^n - F\| \leq M/(1 + \varepsilon)^n$, $n = 1, 2, \dots$ Autoreferat.

Dunford, Nelson: An individual ergodic theorem for noncommutative transformations. Acta Sci. math. 14, 1–4 (1951).

Ω : measure space of finite measure; ω : point in Ω ; f : function in $L_p(\Omega)$; $\bar{f}_A(\omega)$: absolute value of $f(\omega)$; $\varphi_1, \dots, \varphi_k$: one-to-one measure preserving maps of Ω onto itself. $T_i(f, \omega) = f(\varphi_i \omega)$, $i = 1, \dots, k$; $U(i, m) = \frac{1}{m} \sum_{v=0}^{m-1} T_i^v$, $m = 1, 2, \dots$;

$D_i(f, \omega) = \lim_{1 \leq m} U(i, m)(f, \omega)$; $V(m_1, \dots, m_k)(f, \omega) = \frac{1}{m_1 \dots m_k} \sum_{v_1=0}^{m_1-1} \dots \sum_{v_k=0}^{m_k-1} f(\varphi_1^{v_1} \dots \varphi_k^{v_k} \omega) = U(k, m_k) \dots U(2, m_2) U(1, m_1)(f, \omega)$. Theorem:

If $p > 1$, $V(m_1, \dots, m_k)(f, \omega)$ is convergent (as $m_1, \dots, m_k \rightarrow \infty$ independently) almost everywhere on Ω , as well as in the mean of order p . Furthermore, this multiple sequence is dominated by a function in $L_p(\Omega)$. Sketch of the proof: By the mean ergodic theorem of F. Riesz (this Zbl. 19, 414), there is a projector E_i with $\lim U(i, m)f = E_i f$, hence easily $\lim V(m_1, \dots, m_k)f = E_k \dots E_1 f$ in $L_p(\Omega)$. Induction with respect to k shows that for every f in a set dense in $L_p(\Omega)$, the sequence $V(m_1, \dots, m_k)(f, \omega)$ converges a. e. on Ω . According to N. Wiener (this Zbl. 21, 235) $D_i f \in L_p(\Omega)$, therefore $g_k(\omega) = D_k D_{k-1} \dots D_1(f, \omega)$ dominates $|V(m_1, \dots, m_k)(f, \omega)|$ and $g_k \in L_p(\Omega)$. From a Lemma by the author and D. S. Miller [Trans. Amer. Math. Soc. 60, 538–549 (1946)] follows the pointwise convergence a. e. for any f in $L_p(\Omega)$. Complement for $p = 1$: If $\int_{\Omega} |f(\omega)| \log^+ |f(\omega)| \cdot d\omega < \infty$, $G_1(f) \in L_1(\Omega)$ (N. Wiener, ibid.), $\lim V(m_1, m_2)(f, \omega)$ exists a. e. in Ω (result also obtained by Zygmund). Christian Pauc.

Anzai, Hirotada: On an example of a measure preserving transformation which is not conjugate to its inverse. Proc. Japan Acad. 27, 517–522 (1951).

L'A. poursuit l'étude des transformations ergodiques T conservant la mesure sur le produit $X \times Y$ (X et Y sont les cercles unités munis de la mesure de Lebesgue) du type $T(x, y) = [x + \gamma, y + \alpha(x)]$ où γ est un nombre irrationnel et $\alpha(x)$ une application mesurable de X dans Y . (Cf. H. Anzai, ce Zbl. 43, 112). Il prouve que la condition nécessaire et suffisante pour que T , ergodique, soit conjuguée de son inverse (c'est-à-dire qu'il existe V telle que $VT V^{-1} = T^{-1}$) est qu'il existe un $v \in x$ et une application mesurable $\theta(x)$ de X dans Y tels que $\alpha(-x + v) \pm \alpha(x) = \theta(x) - \theta(x + \gamma)$; puis il construit une fonction $\alpha(x)$ telle que la transformation correspondante soit ergodique et ne soit pas conjuguée de son inverse.

André Revuz.

Harada, Shigeharu: Remarks on the topological group of measure preserving transformation. Proc. Japan Acad. 27, 523–526 (1951).

G est la groupe des applications biunivoques du segment $(0, 1)$ sur lui-même,

qui conservent la mesure. Avec la topologie dont une base des voisinages est constituée des ensembles $N(S, A, \varepsilon)$ de transformations T telles que les différences symétriques $S(A) \ominus T(A)$ et $S^{-1}(A) \ominus T^{-1}(A)$, où A est un ensemble mesurable de $(0, 1)$, aient des mesures inférieures à ε , G est un groupe topologique complet dont l'A. prouve qu'il est 1°) simple 2°) connexe par arcs. *André Revuz.*

Bellman, Richard and David Blackwell: On moment spaces. *Ann. of Math.*, II. Ser. 54, 272—274 (1951).

The purpose of the paper is to determine the range of two functions taking the values of the space R^{n+1} : $\Phi_1(E) = (\varphi_0(E), \dots, \varphi_n(E))$ and $\Phi_2(S) = (\varphi_0(E_0), \dots, \varphi_n(E_n))$ where $\varphi_k(E) = \int_E t^k dt$ and $S = \{E_0, \dots, E_n\}$ denotes a partition of $[0, 1]$ into $n + 1$ disjoint Borel sets. In the first case E varies over all Borel sets in $[0, 1]$, in the second over all partitions. It is known that the range in both cases is convex, hence it is sufficient to determine the boundary points. The sets E yielding boundary points for Φ_1 are of the form $[a_0, a_1] \cup [a_2, a_3] \cup \dots$ or $[a_1, a_2] \cup [a_3, a_4] \cup \dots$ with $0 = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n+1} = 1$. In the case of Φ_2 the partitions yielding boundary points are of the form $S = \{[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_n, a_{n+1}]\}$ and $S = \{[a_n, a_{n+1}], [a_{n-1}, a_n], \dots, [a_0, a_1]\}$, the a_i 's having the same meaning as above. This result enables the author to give parametric representations of the boundary points. *Andrzej Alexiewicz.*

Ryll-Nardzewski, C.: Certains théorèmes des moments. *Studia math.* 12, 225—226 (1951).

Indicato con Γ un arco semplice rettificabile giacente sul piano complesso e con distanza dall'origine uguale a ρ , l'A. prova che se $\int_{\Gamma} \zeta^n f(\zeta) d\zeta = O(\rho^n)$ è $f(z) = 0$ quasi ovunque su Γ . — Tale risultato è una estensione al campo complesso di precedenti risultati nel campo reale di M. Picone (questo Zbl. 20, 360) e di J. G. Mikusiński [Colloq. math. 2, 138—141 (1951)]. *C. Pucci.*

Mikusiński, J. G.: A theorem on moments. *Studia math.* 12, 191—193 (1951).

Indicato con $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ due successioni divergenti di numeri positivi, essendo $\beta_{n+1} - \beta_n > \varepsilon$, $|\beta_n - np| < q$ per $n = 1, 2, \dots$, ed ε, p, q costanti positive, posto $\delta_{mn} = \beta_n \gamma_m$ l'A. prova che il verificarsi della disuguaglianza $\left| \int_a^b x^{\delta_{mn}} f(x) dx \right| < M c^{\delta_{mn}}$ per $m, n = 1, 2, \dots$, $c > a$, comporta che la funzione $f(x)$ è quasi ovunque nulla in (a, b) . Tale teorema è una estensione di un precedente risultato dell'A. [Colloq. math. 2, 138—141 (1951)] e di un teorema di M. Picone (questo Zbl. 20, 360). *C. Pucci.*

Mikusiński, J. G. - et C. Ryll-Nardzewski: Sur l'opérateur de translation. *Studia math.* 12, 205—207 (1951).

Gli autori considerano l'operatore di traslazione $e^{-s\lambda}$ (per la sua definizione vedi J. G. Mikusiński, questo Zbl. 38, 278) e provano che la serie $1 - s\lambda/1! + s^2\lambda^2/2! - s^3\lambda^3/3! + \dots$ che si ottiene sviluppando formalmente $e^{-s\lambda}$ in serie di potenze è divergente per ogni $\lambda \neq 0$ e quindi non può servire come definizione dell'operatore $e^{-s\lambda}$. Invece, per ogni valore λ positivo, la successione $(1 + s\lambda/n)^{-n}$ converge, per $n \rightarrow \infty$, verso $e^{-s\lambda}$. *E. De Giorgi.*

Mikusiński, J. G.: Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire. *Studia math.* 12, 208—224 (1951).

L'A. considera le funzioni esponenziali della forma $e^{-s^{\alpha}\lambda}$ (v. questo Zbl. 38, 278) e prova che: 1. Se $\alpha < 1$, la funzione $e^{-s^{\alpha}\lambda}$ esiste per ogni λ complesso. 2. Se $\alpha = 1$, la funzione $e^{-s^{\alpha}\lambda}$ esiste solo per λ reale. 3. Se $\alpha > 1$, la funzione $e^{-s^{\alpha}\lambda}$ non esiste per alcun valore di λ . — Dati n numeri reali distinti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, e n numeri complessi diversi da zero, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, condizione necessaria e suffi-

ciente perché esista (per λ reale) la funzione esponenziale $\exp [(\beta_1 s^{\alpha_1} + \beta_2 s^{\alpha_2} + \dots + \beta_n s^{\alpha_n}) \lambda]$ è che esistano (per λ reale) le funzioni $\exp (\beta_1 s^{\alpha_1} \lambda)$, $\exp (\beta_2 s^{\alpha_2} \lambda)$, \dots , $\exp (\beta_n s^{\alpha_n} \lambda)$. — I'A. fa notare che la discussione completa della funzione esponenziale $e^{-s^\alpha \lambda}$ è stata possibile grazie alla collaborazione con la scuola italiana di M. Picone e mostra come alcuni risultati da lui ottenuti si ricollegano ai risultati ottenuti da tale scuola nel campo delle equazioni differenziali a derivate parziali.

E. De Giorgi.

Mikusiński, J. G.: Sur les équations différentielles du calcul opératoire et leurs applications aux équations classiques aux dérivées partielles. *Studia math.* **12**, 227—270 (1951).

Nella prima parte si studia l'equazione differenziale

$$(1) \quad \sum_{\nu=0}^n a_\nu x^{(n-\nu)}(\lambda) = f(\lambda), \quad a_0 \neq 0, \quad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2,$$

nel corpo A degli operatori (v. J. G.-Mikusiński, questo Zbl. **38**, 278), la variabile indipendente essendo però un numero reale. L'A. ammette l'ipotesi (H) (non si sa quanto restrittiva) che il polinomio caratteristico $P(w)$ della (1) sia in A decomponibile in fattori lineari, e ne deduce una teoria analoga a quella ordinaria, con queste due differenze: 1. non è detto che ogni radice di $P(w)$ sia logaritmica (tale cioè che $e^{w\lambda} \in A$), 2. in generale il teorema di esistenza non sussiste. Ai fini della integrazione della (1) sono da considerare le sole radici logaritmiche di $P(w)$ [se sono p , contate col dovuto ordine di molteplicità, l'integrale generale della (1) dipende linearmente da p costanti arbitrarie]; il teorema di esistenza è dimostrato in due casi particolari: nel caso omogeneo [$f(\lambda) \equiv 0$] e nel caso logaritmico [che tutte le radici di $P(w)$ siano logaritmiche]; per gli altri casi sono suggeriti alcuni espedienti euristici. — I risultati suesposti sono applicati nella seconda parte allo studio della classica equazione differenziale a coefficienti costanti (numerica)

$$(2) \quad \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu \partial \lambda^\nu} x(t, \lambda) = \varphi(t, \lambda), \quad t \geq 0, \quad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2;$$

infatti, introducendo l'operatore differenziale s , interpretando $x(t, \lambda)$ e $\varphi(t, \lambda)$ come funzioni parametriche di λ (v. op. cit.), supposte note le funzioni

$$(3) \quad g_k(\lambda) \equiv \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^n \alpha_{m-k+\mu, \nu} h_\mu^{(\nu)}(\lambda), \quad \text{con } h_k(\lambda) \equiv \frac{\partial^k}{\partial t^k} x(0, \lambda) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

e ponendo $a_{n-\nu} = \alpha_{m\nu} s^m + \alpha_{m-1, \nu} s^{m-1} + \dots + \alpha_{0\nu}$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$), $f(\lambda) \equiv \{\varphi(t, \lambda) + \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} g_k(\lambda)\}$, la (2) si può porre sotto la forma (1), risultando verificata l'ipotesi (H). — Le condizioni iniziali per la (1) naturalmente corrispondono a condizioni di Cauchy per la (2):

$$(4) \quad \frac{\partial^\sigma}{\partial \lambda^\sigma} x(t, \lambda_0) = r_\sigma(t) \quad (\sigma = 0, 1, \dots, p-1). \quad \text{— Tenendo conto del fatto, che sono accettabili}$$

come integrali della (2) solo quegli integrali della (1) che risultano funzioni parametriche, l'A. discute la compatibilità delle condizioni (3) e (4), e dimostra parecchi teoremi di unicità [alcuni dei quali già noti: cfr., ad es., M. Picone, *Ann. Soc. Polon. Math.* **19**, 36—61 (1946)],

dei quali menzionerò solo questo: Le condizioni $\frac{\partial^k}{\partial t^k} x(0, \lambda) = h_k(\lambda)$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$),

determinano univocamente la soluzione (supposta esistente) della (2), se e solo se la (1) non ammette radici caratteristiche logaritmiche. — Riassumendo, i metodi qui esposti appaiono una generalizzazione del metodo delle trasformate, di applicabilità limitata, tuttavia, alle sole equazioni (2) a coefficienti costanti, almeno sinché non sarà stato possibile sbarazzarsi dell'ipotesi (H). È sperabile anche che, migliorando le nostre conoscenze sul corpo A degli operatori si possa arrivare a teoremi generali di esistenza.

Fernando Bertolini.

Ladyženskaja, O.: Über die Abschließung eines elliptischen Operators. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **79**, 723—725 (1951) [Russisch].

Let L denote a second-order n -dimensional elliptic partial differential operator, defined in a region Ω with boundary S . Three function spaces are set up, the Hilbert space H of functions defined in Ω , the set $\tilde{\Omega}$ of functions twice continuously diffe-

rentiable in $\tilde{\Omega}$ and vanishing on S , and W , the closure of $\tilde{\Omega}$ in the norm

$$\|u\|_W = \left\{ \int_{\tilde{\Omega}} \left[u^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right] d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Then, under certain continuity restrictions, L is closed on W , and effects a (1, 1) correspondence between functions of W and H . This is deduced from certain integral identities and a result of G. Giraud [Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 46, 311—245 (1929)].

Frederick V. Atkinson.

Fichera, G.: Geometria analitica degli spazi funzionali ed equazioni differenziali lineari. Matematiche 6, 67—84 (1951).

Exposé de caractère général relatif à l'espace de Hilbert, avec une application à la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution de l'équation $A_2 \vec{u} + k \text{ grad div } \vec{u} = \vec{f}$, $k > 0$, \vec{u} donné sur la frontière du domaine.

Pierre Lelong.

Linés Escardó, Enrique: Über die relativistisch invarianten Funktionalprodukte. Rivista Mat. Univ. Parma 2, 215—234 (1951) [Spanisch].

Usufruento della proprietà di invarianza della traccia proiettiva di una funzione $q(t_1, \dots, t_n, t^1, \dots, t^n)$, quando si effettua sulle variabili t_1, \dots, t_n una sostituzione lineare omogenea definita dalla matrice A e sulle variabili t^1, \dots, t^n la sostituzione duale, cioè definita dalla matrice trasposta dell'inversa della A (vedi L. Fantappiè, questo Zbl. 40, 250), l'A. calcola la traccia proiettiva di una funzione $f(z)$ dipendente da una forma bilineare $z = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 t_i t_j$. — Successivamente viene indicata una regola per ridurre il calcolo delle varie tracce proiettive rispetto a diversi sistemi di variabili a quello di una sola traccia rispetto a tutte le variabili. — Di tale regola viene fatta applicazione al calcolo dell'indicatrice proiettiva di un prodotto relativisticamente invariante o prodotto lorentziano [introdotto da L. Fantappiè, Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 22, 181—289 (1943)] di primo ordine, di secondo ordine, di ordine m .

Silvio Cinquini.

Praktische Analysis:

Rimini, Cesare: Calcoli approssimati. Repertorio Mat. 601—638 (1951).

Verf. gibt eine Einführung in die Methoden der praktischen Analysis. Er beschäftigt sich zunächst mit dem Rechnen mit Näherungswerten, wobei ziemlich eingehend der Fall behandelt wird, daß aus der vorgeschriebenen Genauigkeit des Resultates der für die eingehenden Daten erlaubte Fehler zu bestimmen ist. In diesem Abschnitt wird auch auf die lineare Interpolation eingegangen. Der zweite Teil bringt dann die genäherte Lösung von Gleichungen zunächst mit einer Unbekannten nach der Methode von Newton-Fourier, mittels Iteration und für algebraische Gleichungen nach der Methode von Graeffe. Ferner wird zur Lösung linearer Gleichungssysteme das Verfahren von Gauß, kurz das von Banachiewicz, die Methode der Iteration in Gesamtschritten und die nach Cimmino besprochen. Der letzte Abschnitt endlich ist der genäherten Berechnung von bestimmten Integralen gewidmet. Abgeleitet werden die Trapez- und die Tangententrapezregel, ferner die Formeln von Poncelet und Simpson mit Restgliedern, weiter werden die graphische Integration (allerdings nur mit der Genauigkeit der Tangententrapezregel) und entsprechend die graphische Differentiation, der Integrationsabdruck von Coradi und das Polaranimeter behandelt.

F. A. Willers.

• Dwyer, Paul S.: Linear computations. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1951. XI, 344 p. \$ 6,00.

Das Buch gibt einen sehr eingehenden, immer wieder durch Zahlenbeispiele verdeutlichten Abriß der Methoden wie der Rechentechnik der linearen Grundauf-

gaben: Auflösung linearer Gleichungssysteme, numerische Behandlung von Determinantenaufgaben, Ermittlung von inverser und adjungierter Matrix, Behandlung der Eigenwertaufgabe von Matrizen. Auch die Frage der Fehleraufhäufung wird erörtert. Neben den theoretischen Grundlagen und Zusammenhängen der verschiedenen Methoden steht immer wieder die Frage der Rechentechnik im Vordergrund der Betrachtung unter bewußter Ausnutzung aller in der Rechenmaschine gelegenen Möglichkeiten, und vor allem diese Einheit theoretischer Erörterung und praktischer Ausgestaltung bis in die letzte Einzelheit gibt dem Buch seine besondere Note. Es ist bezeichnend, daß dabei fast ausschließlich die direkten Verfahren zur Sprache kommen, denen gegenüber die iterativen Methoden ganz zurücktreten. Das technische Hilfsmittel der Rechenmaschine formt zwangsläufig die moderne Verfahrenstechnik der „linear computations“. Das in erster Linie für den Mann der Anwendung geschriebene Buch wird gerade für ihn von ungewöhnlich großem Nutzen sein.

Rudolf Zurmühl.

Buch, Kai Rander: Vom Differentialquotienten zum Differenzenquotienten — und umgekehrt. Mat. Tidsskr. A 1951, 51—64 (1951) [Dänisch].

Die angenäherte Lösung von Systemen linearer Gleichungen mit symmetrischer Determinante unter besonderer Beachtung der Arbeiten von Southwell wird besprochen, ebenso die Anwendung der Differenzenrechnung auf partielle Differentialgleichungen und schließlich einige Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Evert Johannes Nyström.

Fox, L. and J. G. Hayes: More practical methods for the inversion of matrices. J. Roy. statist. Soc., Ser. B 13, 83—91 (1951).

Die Arbeit behandelt im Anschluß an eine frühere (dies. Zbl. 38, 77) von an sich bekannten Methoden — Aufspaltung der Matrix A in untere und obere Dreiecksmatrix L und U nach $A = LU$ — reine Anordnungsfragen, entstehend aus der Forderung, die Matrizen-Multiplikationsvorschrift Zeile mal Spalte zu übersetzen in Zeile mal Zeile oder Spalte mal Spalte, über deren Nutzen man freilich geteilter Meinung sein kann. Für symmetrische und nicht symmetrische Matrizen werden im wesentlichen je zwei Methoden besprochen: eine, die die Kehrmatrix L^{-1} oder U^{-1} benutzt (d. i. der Gaußsche Algorithmus mit der Einheitsmatrix als rechter Seite); die zweite, die diese Kehrmatrix nicht explizit braucht, indem sie von L^{-1} und U^{-1} jeweils nur die ohnehin bekannten Teile, bestehend aus den Elementen 0 und 1, verwendet.

Rudolf Zurmühl.

Householder, Alston S.: Polynomial iterations to roots of algebraic equations. Proc. Amer. math. Soc. 2, 718—719 (1951).

Es wird gezeigt, daß man für jede Wurzel ξ eines separablen Polynoms $f(x)$ eine Polynom-Iteration $\varphi_r(x)$ der Ordnung $\geq r+1$ [$\varphi_r(\xi) = \xi$, $\varphi_r^{(s)}(\xi) = 0$ ($s = 1, \dots, r$)] erhält aus der folgenden Rekursionsformel: Man bestimme Polynome p_1, q derart, daß $p_1 f' + q f = 1$ wird. Sodann sei $p_r = p_1 p'_{r-1} - (r-1) q p_{r-1}$. Hiermit setze man $\varphi_1 = x - p_1 f$ und $\varphi_r = \varphi_{r-1} + (-1)^r f^r p_r / r!$. Beweis mit Hilfe der Schröderschen Formel [s. Blaskett und Ref., Quarterly appl. Math. 3, 266—268 (1945)].

H. Schwerdtfeger.

Loud, W. S.: A simple iterative solution for certain simultaneous quadratic equations. Amer. math. Monthly 58, 609—613 (1951).

Es wird untersucht, für welchen Bereich der Ebene der kartesischen Koordinaten A, B das Iterationsverfahren zur Lösung der beiden simultanen quadratischen Gleichungen (1) $y^2 + B = x$, $x^2 + A = y$ konvergiert. Für eine reelle Lösung (x_0, y_0) lautet die Konvergenzbedingung $4|x_0 y_0| < 1$. Der Konvergenzbereich in der AB -Ebene ergibt sich demnach, indem man aus den zwei Gleichungen (1), vereint mit $4xy = 1$ oder $4xy = -1$, die Größen x, y eliminiert. So erhält man zwei Kurven in der AB -Ebene, die den Konvergenzbereich einschließen. Überdies wird die Frage geeigneter Startpunkte für die Iteration diskutiert. Die Arbeit schließt mit

einigen Bemerkungen über das allgemeine Iterationsproblem $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$. H. Schwerdtfeger.

Aitken, A. C.: Studies in practical mathematics. VI. On the factorization of polynomials by iterative methods. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 63, 174—191 (1951).

(Teile I—III, V: dies. Zbl. 16, 241; 17, 147; 19, 132; 37, 208.) Zur numerischen Ermittlung von Teilern eines Polynoms wurde von S. N. Lin (dies. Zbl. 26, 235) das Iterationsverfahren des vorletzten Restes (das gewöhnliche Divisionsverfahren wird abgebrochen, wenn der Grad des Restes gleich dem Grade des Divisors ist) eingeführt. Dies Verfahren wird hier auf Divisoren (Näherungen eines gesuchten Teilers) von beliebigem Grade ausgedehnt, theoretisch untersucht und an Hand von zahlreichen Beispielen diskutiert. Robert Schmidt.

Bilharz, Herbert: Über die Gaußsche Methode zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale. Math. Nachr. 6, 171—192 (1951).

Für die bekannte Gaußsche Mittelwertformel wird das Restglied auf zwei Weisen durch Reihenentwicklungen dargestellt unter Voraussetzung der Existenz und Stetigkeit der auftretenden Ableitungen. Dabei ergeben sich enge Beziehungen zu der Booleschen und der Eulerschen Summenformel. Numerische Werte von Entwicklungskoeffizienten werden gegeben. Evert Johannes Nyström.

Mineur, Henri: Tentatives de calcul numérique des intégrales doubles. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1166—1168 (1951).

Um die Gaußsche Integrationsmethode auf Doppelintegrale zu übertragen, wird der Integrand durch ein zweckmäßig zu wählendes Polynom zweier Veränderlichen etwa vom Grade n ersetzt. Es zeigt sich, daß die aufzustellenden Bedingungen wenigstens bei einem quadratischen Integrationsgebiet sich im allgemeinen nicht bei der theoretisch kleinsten Anzahl von angenommenen Punkten erfüllen lassen: Für $n = 7$ wird mit 13 (statt 12) Punkten bei einem Beispiel ein gutes Resultat erzielt. Evert Johannes Nyström.

Birindelli, Carlo: Sul calcolo numerico degli integrali multipli. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 11, 40—44 (1951).

Unter nötigen Voraussetzungen der Beschränktheit und Stetigkeit wird mit zugehöriger Fehlerabschätzung eine Näherungsformel zur Auswertung von r -fachen Integralen aufgestellt, die über Rechtecksgebiete erstreckt wird. Evert Johannes Nyström.

Richter, Willy: Sur l'erreur commise dans la méthode d'intégration de Milne. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1342—1344 (1951).

Bei einer Methode von W. E. Milne (Numerical Calculus, Princeton 1949. S. 134) zur Integration von $y' = f(x, y)$ mit gegebenem $y_0 = y(0)$ werden bei der Schrittweite h Näherungswerte y_n nach $y_{n+1}^* = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2})$.

$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\{f(x_{n+1}, y_{n+1}^*) + 4y'_n + y'_{n-1}\}$ berechnet. Für die Berechnung des notwendigen Anfangsstückes und für die fortlaufende Rechnung wird eine Fehlerabschätzung aufgestellt $|y_0 - y(0, h)| \leq CZ^0 - Q$. Dabei ist $|f| \leq N$ und $|\partial^i + j f / \partial x^i \partial y^j| \leq M N^{1-i}$ für $1 \leq i + j \leq 4$ vorausgesetzt und die für das Wachstum der Fehlerschranke maßgebliche Größe Z ist mit $q = h M/3$ durch $Z = 1 + 3q + 3q^2$ gegeben. Lothar Collatz.

Matthieu, P.: Über die Fehlerabschätzung beim Extrapolationsverfahren von Adams. I. Gleichungen 1. Ordnung. Z. angew. Math. Mech. 31, 356—370 (1951).

Verf. beschreibt eine Näherungsmethode zur schrittweisen Berechnung einer Schranke für den bei numerischer Integration einer Differentialgleichung entstehenden Fehler und bemerkt (ohne Beweis), daß das Verfahren leicht zu einer strengen Fehlerabschätzung erweitert werden kann. Bezeichnet $y(x)$ die exakte Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ und $y^*(x) = y(x) - \delta(x)$ eine nahe bei $y(x)$ liegende, differenzierbare Funktion, so genügt

$\delta(x)$ in erster Näherung der Differentialgleichung

$$\delta' + p \delta = q \text{ mit } p = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*), \quad q = f(x, y^*) - y^{*'}(x)$$

mit der Lösung $\delta(x) = \exp \left\{ -\int_{x_0}^x p \, dx \right\} \cdot \int_{x_0}^x q \exp \left(\int_{x_0}^x p \, dx \right) dx$, falls noch $y(x_0) = y^*(x_0)$

vorausgesetzt wird. Bezeichnet $y^*(x)$ die nach dem Adamsschen Extrapolationsverfahren r -ter Ordnung gewonnene, aus Parabelbögen $(r+1)$ -ter Ordnung zusammengesetzte Näherungslösung, so wird $|q(x)|$ eine sägeblattförmige Funktion, die beim Durchschreiten einer Stützstelle x_n vom Werte $|l^{r+1} f(x_n, y_n^*)|$ auf 0 springt und deren Entwicklung (in jedem Teilintervall) nach Potenzen der Schrittweite h mit h^{r+1} beginnt, wobei der Koeffizient von h^{r+1} ein monoton wachsendes, nach oben konkaves Polynom ist, so daß $|q(x)|$ in dieser Näherung durch eine stückweise lineare, an den Stützstellen von $|l^{r+1} f(x_n, y_n^*)|$ auf 0 springende Funktion $q(x)$ majorisiert werden kann. Einsetzen von $\bar{q}(x)$ an Stelle von $q(x)$ in (1) liefert dann eine Fehlerschranke $\delta(x)$. Eine schärfere Schranke $\bar{\delta}(x)$ ergibt sich durch Einsetzen einer „mittleren Ma-

JORANTE“ $\bar{q}(x)$, die der Ungleichung $\int_{x_0}^x \bar{q}(x) \, dx \leq \int_{x_0}^x q(x) \, dx$ genügt. Für die praktische Durch-

führung wird ein Rechenschema und eine graphisches Verfahren gegeben und am Beispiel der Differentialgleichung $y' = x - y$, $y(0) = 0$ zahlenmäßig erläutert. Die nach dieser Methode errechnete Fehlerschranke ist unter gewissen Voraussetzungen und Vernachlässigungen immer etwa das $\frac{3}{2}$ -fache des wirklichen Fehlerbetrages. Analoge Überlegungen werden auch für das Interpolationsverfahren durchgeführt und am gleichen Zahlenbeispiel verdeutlicht. Unter den gemachten Annahmen verhält sich der Fehler des Extrapolations- zu dem des Interpolationsverfahrens stets ungefähr wie 13:1.

Johannes Weissinger.

Collatz, L.: Zur Stabilität des Differenzenverfahrens bei der Stabschwingungsgleichung. Z. angew. Math. Mech. **31**, 392—393 (1951).

Die früheren Ausführungen des Verf. (dies. Zbl. **14**, 307) über dasselbe Thema werden dahin ergänzt und korrigiert, daß das Verhältnis z der Maschenweiten für die Stabilität des numerischen Verfahrens ausschlaggebend ist. Als Grenze für die Stabilität wird $z \leq 1/4$ bestimmt. Die vom Ref. auf primitivem Wege [Z. angew. Math. Mech. **24**, 261 (1944)] ermittelte und verwendete günstigste Zahl von etwa $z = 1/6$ liegt demnach noch etwas tiefer.

Klaus Oswatitsch.

Crandall, Stephen H.: On a relaxation method for Eigenvalue problems. J. Math. Physics **30**, 140—145 (1951).

Die beschriebene, unter oft zutreffenden Voraussetzungen gültige, Methode zur Lösung von Eigenwertaufgaben ist auf Arbeiten von Southwell, Vazonyi und Collatz gegründet. Dabei werden zunächst probeweise angenommene Wertsysteme mittels zweckmäßig gebildeter Hilfstafeln sukzessiv verbessert. Konvergenzbetrachtungen werden angestellt.

Evert Johannes Nyström.

• **Panov, D. Ju.: Handbuch zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen.** 5. Aufl. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1951. 183 S. R. 3,20 [Russisch].

Table des matières: Préface. Introduction. Généralités. Equations de Laplace et de Poisson. Equation biharmonique. Equation de la chaleur. Equation des ondes, équation des télégraphistes. Systèmes hyperboliques quasi-linéaires. Bibliographie. Index. — Cet ouvrage est consacré presque exclusivement à l'intégration numérique par réduction à des équations aux différences finies, des types les plus simples possibles. L'A. préconise pour la résolution des systèmes linéaires algébriques obtenus, une méthode d'approximations successives qui ne semble pas converger rapidement, malgré les perfectionnements proposés. Des exemples intéressants sont développés, pour les divers cas étudiés, indiqués dans la table des matières. On trouve au début de l'ouvrage d'utiles tables d'interpolation. La bibliographie (38 numéros) s'arrête, pour les ouvrages non russes, à 1933 (à part une table de coefficients d'interpolation de Lagrange); dans l'ensemble, ce livre, dont la première édition date de 1938, ne contient pas les résultats récents sur la technique de l'intégration numérique et de la résolution des systèmes linéaires

algébriques; il peut cependant être considéré comme une bonne initiation à ce domaine.

Charles Blanc.

● Nevskij, B. V.: *Handbuch der Nomographie*. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1951. 376 S. 10,70 R. [Russisch].

Die Anwendung der Nomographie beschränkte sich bis vor kurzem im wesentlichen auf Nomogramme, die sich auf Papier aufzeichnen lassen, und die Theorie beschäftigte sich daher vor allem mit Netz- und Fluchtentafeln. Die bisher existierende Klassifikation der Nomogramme mit beweglichen Elementen ist noch sehr unvollständig, und die Nomographie besteht eigentlich nur aus einzelnen Rezepten für die Konstruktion von Nomogrammen. Auf diese Mängel und die noch offenen Möglichkeiten wies N. A. Glagolev hin. Das vorliegende Buch stellt einen Versuch dar, die einzelnen Fragen der Nomographie auf Grund einer allgemeinen Theorie der Nomographie mit beweglichen Elementen in einem allgemeinen System zu vereinigen, wobei es nicht möglich war, alle diese Fragen vollständig zu klären. Besonderer Wert wurde auf die Herleitung der Forderungen gelegt, die an ein Nomogramm zu stellen sind. Insbesondere gelang dies allgemein in bezug auf die Genauigkeit bei Nomogrammen mit beweglichen Elementen. — Ein großer Teil der Beispiele ist früheren Büchern über Nomographie entnommen. Inhaltsangabe der 15 Kapitel, die im wesentlichen unabhängig voneinander zu lesen sind: I. Die Elemente des Nomogramms (Skala, binäre Felder): Definition. Konstruktionsmethoden. Bewertung im Zusammenhang mit der möglichen Ablesegenauigkeit. II. Theoretische Fragen der Konstruktion von Nomogrammen: Grundlagen der Klassifikation von Nomogrammen mit beweglichen Elementen. Allgemeine Methode zur Bestimmung der Gestalt der analytischen Abhängigkeit, die durch ein Nomogramm von gegebenem Typ dargestellt wird. (Beispiel: Die Gleichungsformen, die durch Fluchtentafeln, Stechzirkelnomogramme und Netztafeln darstellbar sind.) Formulierung des Problems der Transformation von Nomogrammen. III. Fragen der Genauigkeit der Auswertung von Nomogrammen und Forderungen, die an die Nomogramme zu stellen sind. IV.—XII. Konstruktionsmethoden für spezielle Typen von Nomogrammen bei Gleichungen mit nicht-separierten Variablen: Fluchtentafeln (VII.—X.). Lösungsmethoden des Problems der projektiven Transformation von Nomogrammen (IX.), wobei die projektive Transformation mit Hilfe von Netzen und die Transformationen der Nomogramme von Gleichungen 3. nomographischer Ordnung mit Hilfe von „Skeletten“ unter Hinweis auf M. V. Pentkovskij, *Nomographie* (Moskau 1949), nur kurz behandelt werden. Über Methoden der approximativen Konstruktion von Fluchtentafeln. XIII. Spezialfälle zusammengesetzter Nomogramme und zusätzliche Forderungen, die an sie zu stellen sind. XIV. Kurze Theorie und Konstruktionsmethoden der räumlichen Verallgemeinerung der Fluchtentafeln. XV. Über die Technik der Konstruktion und der Zeichnung von Nomogrammen. (Aus dem Vorwort des Verf.)

Belgrano, J.: *Nomographische Darstellung der Beziehung $Z = F(g(z_1, z_2), h(z_1, z_3))$* . *Gac. mat.*, Madrid 3, 143—152 (1951) [Spanisch].

Verf. gibt die Darstellung von Funktionen der Form $F[f(z_1, z_2), g(z_3, z_4)] = z$ durch zwei oder drei sich gegenseitig schneidende Systeme von parallelen Geraden an und leitet die analytische Bedingung [Funktionaldeterminante] her für $z_1 = z_4$. Wie er zeigt, läuft dies in der graphischen Darstellung darauf hinaus, daß zwei leicht zeichenbare Kurvensysteme eine Kurve gemeinsam haben. E. M. Bruins.

Belgrano, J.: *Beiträge zur Theorie der Fluchtlinientafeln*. *Revista Ci. apl.* Nr. 23, 521—526 (1951) [Spanisch].

Belgrano, J. und A. Lopez Nieto: *Nomogramm zur Bestimmung der neutralen Achse im Eisenbetonbalken*. *Revista Obras publ.*, 2 S. (1951) [Spanisch].

Lopez Nieto, A.: *Nomogramm zur Berechnung der Senkung einer horizontalen Bodenfläche*. *Informes de la construccion*, Nr. 34, 5 S. [Spanisch].

a) Verf. behandelt im ersten Teil Fluchtlinientafeln für drei und vier Veränderliche, bei denen neben Kurvennetzen noch ein bis drei tangentielle Berührungen auftreten. Es werden für diese Fälle „Schlüsselgleichungen“ (kanonische Formen) angegeben. — Im zweiten Teil behandelt Verf. die kollineare Abbildung von Fluchtlinientafeln zur Erzielung besserer Ablesemöglichkeit durch ein graphisches Verfahren. Es werden praktische Konstruktionsregeln angegeben. — b) Verff. geben ein Beispiel für das behandelte Verfahren zur kollinearen Abbildung von Nomogrammen. — c) Verf. gibt ein Beispiel für den angegebenen Nomogrammtyp mit tangentiellen Berührungen.

Rudolf Ludwig.

Cooksey, W. J.: *Nomograms, with particular reference to their use in facilitating the tabulation of paid-up and surrender values based on various formulae*. *Trans. Fac. Actuaries* 20, 229—261 (1951).

Nach einer kleinen Literaturübersicht über nomographische Arbeiten in der britischen Versicherungsliteratur gibt Verf. zunächst eine elementar gehaltene Herleitung einiger Fluchtlinientafeln (16 S.). Interessante Anwendungen betreffen die Berechnung von Versicherungswerten für die Umwandlung von Prämien. Verf. bezieht sich dabei auf L. G. Oxby, *Actuarial Nomograms*, T. A. S. Aust., 5, 9 flg. (1945). Von einer sehr allgemeinen Formel ausgehend, die zahlreiche Spezialfälle zuläßt, gibt Verf. Fluchtliniennomogramme für drei Veränderliche an (dazu skizzenhafte Figuren!) mit zwei parallelen Leitern und einer dritten, die beiden anderen schneidenden, Leiter. Es gelingt dem Verf., das Nomogramm auch dann zu verwenden, wenn gewisse Konstanten für verschiedene Bereiche verschiedene Werte annehmen. Man erhält dann als dritte Leiter eine aus geraden Stücken zusammengesetzte Leiter, die sich leicht konstruieren läßt.

Rudolf Ludwig.

Stewart, Robert M.: A simple graphical method for constructing families of Nyquist diagrams. *J. aeronaut. Sci.* 18, 767—768 (1951).

Mirimanoff, D.: Description d'une famille d'appareils pour divisor un angle en un nombre quelconque de parties égales. *Enseignement math.* 39, 61—68 (1951).

Verf. erläutert Prinzip und Anwendung einer Gruppe von Mechanismen, mit deren Hilfe man einen gegebenen Winkel in n gleiche Teile zerlegen kann. Bemerkenswert ist — insbesondere im Vergleich mit den bekannten Winkelteilungsgeräten —, daß sich das (auf einer elementaren Kreiseigenschaft beruhende) Lösungsprinzip des Verf. für jeden beliebigen ganzzahligen Wert von n in völlig gleicher Weise anwenden läßt.

Heinz Horninger.

● **Ryžik, I. M. und I. S. Gradštejn:** *Tafeln von Integralen, Summen, Reihen und Produkten*. 3. umgearb. Aufl. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1951. 464 S. R. 20,45 [Russisch].

Die vorliegenden Tafeln behandeln in umfassender Weise die im Titel angegebenen Dinge und überhaupt das ganze Formelmateriale der Theorie der speziellen Funktionen. Das Buch ist in acht Teile gegliedert. In Teil 1 werden die Formeln für die elementaren Funktionen behandelt, in Teil 6—7 die Definitionen und Beziehungen für spezielle Funktionen (Funktionalgleichungen, Rekursionsformeln, Integraldarstellungen, Reihenentwicklungen). Es finden sich hier auch ganz spezielle Dinge wie z. B. Entwicklung elliptischer Integrale nach Legendreschen Polynomen. Die Transformationsformeln für die Thetafunktionen sind nicht aufgenommen. Teil 2 behandelt die unbestimmten Integrale sowohl der elementaren als auch der nicht elementaren Funktionen. Teil 3 bzw. 4 enthält die bestimmten Integrale der elementaren bzw. nicht elementaren Funktionen. Unter den sehr zahlreichen Integralen finden sich u. a. solche, bei denen im Integrand die folgenden Funktionen vorkommen: elliptische Integrale, Integrallogarithmus, Fehlerfunktion, Γ -Funktion, Besselsche Funktionen, Kugelfunktionen. Teil 5 behandelt Integraltransformationen, und zwar Laplace-, Fourier- und Hankeltransformation mit dazugehörigen „Wörterbüchern“. Weiter sind zahlreiche numerische Reihen und Produkte zusammengestellt. Am Schluß sind verschiedene numerische Tabellen angegeben, z. B. die Werte $\zeta(2)$ bis $\zeta(11)$ auf 10 Dezimalen. Das Werk enthält aber nicht nur Formeln, sondern auch manche Sätze, z. B. Voraussetzungen, unter denen Entwicklungssätze gelten, Restglieder bei der Taylorsche Formel u. a. m. Das Werk wird allen Interessenten von sehr großem Nutzen sein.

Karl Prachar.

● **British Association for the Advancement of Science:** *Mathematical Tables*, Vol. 1: Circular and hyperbolic functions, exponential and sine and cosine integrals, factorial function and allied functions, Hermitian probability functions. (Published for the Royal Society.) 3rd ed. London: Cambridge University Press 1951. IX, 72 p. 18 s. net.

● **Tables of $n!$ and $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ for the first thousand values of n .** Washington: Bureau of Standards, Government Printing Office 1951. IV, 10 p. \$ 0,15.

Nath, Pran: Confluent hypergeometric function. *Sankhya* 11, 153—166 (1951).

Die Arbeit enthält eine acht Seiten umfassende Tabelle der Kummerschen Funktion, die bekanntlich durch die Reihe

$${}_1F_1(\alpha, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

definiert ist. Sie umfaßt den folgenden Wertebereich: Für $\gamma = 3$ werden die Funktionswerte angegeben für $\alpha = 1$ (1) 40 und für $x = 0,02$ (0,02) 0,1; 0,1 (0,1) 1,0; 1,0 (1) 10; 10 (10) 50 und 100 und 200 und für $\gamma = 4$ für $\alpha = 1$ (1) 50 und im übrigen für dieselben x -Werte wie oben. — Die mitgeteilten Zahlenwerte sind auf sechs Dezimalstellen genau. Für die Berechnung der Zahlenwerte werden teils die unbeschränkt konvergente Potenzreihe, teils die asymptotische Reihe und teils die Rekursionsformeln zwischen benachbarten Funktionen benutzt.

Herbert Buchholz.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Finetti, Bruno de: Recent suggestions for the reconciliation of theories of probability. Proc. Berkeley Sympos. math. statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 217—225 (1951).

Die Arbeit liefert aus dem Bemühen, die bisherigen unfruchtbaren, meist aus Mißverständnissen herrührenden Kontroversen zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie durch Klärung der gegenseitigen Auffassung mit dem Ziel des Aufbaues einer umfassenden Theorie zu ersetzen, einen empfehlenswerten Eingang in die vom Verf. vertretene Richtung der subjektivistischen Wahrscheinlichkeitsauffassung. Hierbei wird insbesondere gezeigt, daß die Finettische subjektive Auffassung die beiden Hauptrichtungen der Hypothesentestung gleichzeitig zu verstehen gestattet: a) Bayessches Schlußverfahren und b) vorbewertungsfreie Testverfahren (Konfidenzschlüsse). In dieser Eigenschaft wird der subjektive Standpunkt vorgetragen und offen gelassen, ob er endgültig zu akzeptieren ist. — Die Schlußverfahren aus a) sind als die richtigen anzusehen, wenn a priori-Wahrscheinlichkeiten vorgegeben sind unter Offenhaltung der Frage, woher sie stammen; die Möglichkeit von Verfahren aus b) steht dazu zunächst logisch nicht in Widerspruch. Die Aussage der letzteren könnte allenfalls für die Anwendungen als zu schwach angesehen werden. Vom subjektiven Standpunkt aus sind aber beide Verfahrensgruppen sogar in Einklang bei folgender Interpretation: Die a priori-Wahrscheinlichkeit ist der mathematische Ausdruck einer persönlichen Bewertung der verschiedenen durch einen Parameter charakterisierbaren Verteilungsfunktionen für die in Frage stehende aleatorische Größe. (Auch die Gleichbewertung ist eine dieser persönlichen Bewertungen, die sich logisch nicht allein aus dem „unzureichenden Grunde“ ableitet; sie ist daher weder zu verwerfen noch als universell anzusehen.) Das zugehörige unisubjektive Verbesserungsverfahren für die Bewertung ist die Bayessche Formel. Sind dagegen mehrere Subjekte mit unterschiedlicher Bewertung vorhanden, so erhebt sich notwendig die Frage nach Verfahren, die gültig sind unabhängig von den vorgegebenen Bewertungen: multisubjektive Entscheidungsverfahren. Die Konfidenzschlüsse stellen unter diesen die äußerste Verallgemeinerung durch Zulassung aller Bewertungen dar. Der vollzogene Bedeutungswandel von non-subjektiven zu multisubjektiven Verfahren ändert an ihrer mathematischen Struktur nichts; aber er läßt sie nicht nur als verträglich mit dem Bayesschen Theorem, sondern als dessen notwendiges Korrelat erscheinen. Gleichzeitig weist diese Interpretation auf einen neuen Problemkreis hin, der der Vorgabe einer Untermenge der Menge aller möglichen Bewertungen entspricht. — Andere Versuche, die sich weder mit der exakten Formulierung der Konfidenzschlüsse begnügen noch die dann notwendige Unvermeidlichkeit der a priori-Wahrscheinlichkeit zugeben, enthalten logische Lücken. — Das Problem der Konstanz der Wahrscheinlichkeit bei Versuchswiederholungen ist der subjektiven Theorie unbekannt, da die Konstanz hier als persönliche Hypothese der Vertauschbarkeit anzusehen ist. — Zum Schluß wird die Beziehung der subjektiven Theorie zu ähnlichen Theorien wie dem „plausiblen Schlußverfahren“ nach Polya aufgezeigt, das bereits als allgemeinste Rechtfertigung des induktiven Schließens anzusehen ist.

Hans Richter.

Finetti, Bruno de: Aggiunta alla nota sull'assiomatica della probabilità. Ann. Triestini, Sez. II 20, 5—22 (1951).

Verf. ergänzt seine kritische Darlegung der axiomatischen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung (dies. Zbl. 36, 207) durch eingehende Diskussion einer einschlägigen Arbeit von F. P. Cantelli (Sulla estensione del principio delle probabilità totali ad una successione illimitata di eventi incompatibili, Pavia 1936; dies. Zbl. 16, 128), insbesondere der von Cantelli gegen gewisse Paradoxa ins Feld geführten Begriffe der „Denkmöglichkeit“, „Unterscheidbarkeit“ und „Verifizierbarkeit“. Diese im wesentlichen um das Postulat der vollständigen Additivität

kreisenden Betrachtungen münden aus in Erörterungen über die Standpunkte von E. Borel (Les paradoxes de l'infini, Paris 1946; 83—86) und P. Lévy (dies. Zbl. 36, 84) in Zusammenhang mit dem Hausdorffschen Paradoxon.

Maria-Pia Geppert.

Marinescu, G.: Une généralisation de la notion de variable aléatoire. Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 45—49, russische und französ. Zusammenfassgn. 49, 49—50 (1951) [Rumänisch].

On définit la notion de variable aléatoire sur une algèbre booléenne σ -complet \mathcal{B} , munie d'une mesure $\mu(A)$ satisfaisant aux conditions: 1. $0 \leq \mu(A) \leq 1$; 2. $\mu(A) = 0$ est équivalent à $A = \emptyset$; 3. $\mu(I) = 1$; 4. $A \cap B = \emptyset$ implique $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$; 5. $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ et $\bigcap A_n = \emptyset$ impliquent $\lim \mu(A_n) = 0$. — La variable aléatoire est une fonction $X(A)$ définie sur \mathcal{B} prenant ses valeurs dans la famille des ensembles de nombres réels et satisfaisant aux conditions: a) $X^{-1}(\bigcup_n M_n) = \bigcup_n X^{-1}(M_n)$, $n = 1, 2, \dots$; b) $X^{-1}(M - N) = X^{-1}(M) - X^{-1}(N)$; c) $x_n \rightarrow x_0$, $x_n < x_0$, impliquent $\prod_n [A(x_0) - A(x_n)] = \emptyset$ où $A(x) = X^{-1}((-\infty; x])$, $A(-\infty) = \emptyset$. — On définit la probabilité de la variable $X(A)$ par rapport à l'ensemble M de nombres réels, comme mesure de la réunion des éléments $A \in \mathcal{B}$, tels que $X(A) \subset M$. On démontre que cette fonction de M est une mesure (plus précisément une fonction de probabilité) définie sur tous les ensembles de nombres réels. Enfin on définit la fonction de distribution de la variable aléatoire de la même manière que dans le cas classique et on démontre qu'elle a les propriétés connues. (Autoreferat.)

Krishnamoorthy, A. S.: Multivariate binomial and Poisson distributions. Sankhyā 11, 117—124 (1951).

Die von Aitken und Gomin 1930 bzw. von Campbell 1932 erhaltenen Polynom-Entwicklungen der binomialen bzw. Poissonschen Verteilungsfunktionen zweier Veränderlichen werden auf den Fall mehrerer Veränderlichen verallgemeinert.

Tibor Szentmártony.

Dugué, Daniel: Sur les produits de variables aléatoires. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1421—1422 (1951).

Die Zerlegbarkeit von X in ein Produkt ($X = X_1 \cdot X_2$; X, X_1, X_2 zufällige Veränderliche, X_1 von X_2 unabhängig) wird mittels der „multiplikativen charakteristischen Funktion“, $P_X(z) = E(X^z)$, untersucht. Es wird $P_X(z)$ für mehrere Verteilungen bestimmt und folgendes Theorem bewiesen: ist $P_X(z)$ meromorph von der Ordnung < 2 , ohne Nullstellen, mit Polen nur an der negativ reellen Achse, so ist X als ein Produkt von (endlich- oder unendlichvielen) X_i mit der Dichte $\propto x^{\alpha-1} dx$ (inverse Paretsche Veränderliche) ausdrückbar. Diese Bedingung ist in den meisten Beispielen erfüllt.

Bruno de Finetti.

Tortrat, Albert: Divisibilité des „lois de probabilité convexes“. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 914—915 (1951).

Zerlegbarkeitsbedingungen für „konvexe“ Wahrscheinlichkeitsverteilungen [d. h.: Verteilungen, deren charakteristische Funktion im Pólyaschem Sinne $y(x)$ für $x > 0$ stetig und konvex ist, $y(0) = 1$, $y(\infty) = 0$, $y(-x) = y(x)$; es sei betont, sie können kein σ haben!]. Unter allgemeinen Bedingungen ist $y(x)$ in kontinuierlich unendlich viele Weisen als $y(x) = y_1(x) \cdot y_2(x)$, y_1 und y_2 gleichfalls konvex, zerlegbar.

Bruno de Finetti.

Milicer Gruzewska, Halina: Sur la distribuite de deux variables dépendantes. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1256—1258 (1951).

Für eine zweidimensionale Verteilung $F(x, y)$ mit Marginal-Verteilungen $\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = F_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = F_2(y)$ wird der Begriff der „bedingten Verteilung“ verallgemeinert. Für jedes x oder y , für das bei $\Delta x > 0$, $F_1(x + \Delta x) > F_1(x)$ oder bei $\Delta y > 0$, $F_2(y + \Delta y) > F_2(y)$, führt man ein:

$$F_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{F_1(x + \Delta x) - F_1(x)} \quad \text{und} \quad G_y(x) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{F_2(y + \Delta y) - F_2(y)}.$$

Hilda Geiringer.

Moriguti, Sigeiti: Extremal properties of extreme value distributions. *Ann. math. Statistics* **22**, 523—536 (1951).

Es sei x_n das größte Element aus n unabhängigen Versuchen aus einer Verteilung $F(x)$, die symmetrisch und normiert vorausgesetzt wird [$F(-x) = 1 - F(x)$, $m = 0$, $\sigma = 1$]. Erwartung E und Streuung V von x_n genügen, für beliebige $F(x)$, folgenden Ungleichungen (aus der Schwarzischen Ungleichung abgeleitet):

$$0 < E(x_n) \leq n(4n-2)^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{2n-2}{n-1} \right)^{-1} \right]^{1/2},$$

$$M_n^{-1} - 1 \leq V(x_n)/E(x_n)^2 < \infty, \quad \lambda_n \leq V(x_n) < n/2,$$

wo $1 - M_n$ und λ_n asymptotisch $2^{-n} \pi [1 + O(1/n)]$ sind (genaue Ausdrücke: bestimmtes Integral für M , Wurzel einer transzendenten Gleichung für λ). Die Abschätzungen sind die bestmöglichen (es werden die F bestimmt, die zum Grenzwert führen, wo \leq , bzw. annähern, wo $<$).

Bruno de Finetti.

Gnedenko, B. V. und V. S. Koroljuk: Über die maximale Divergenz zweier empirischer Verteilungen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **80**, 525—528 (1951) [Russisch].

Sind für die gleiche aleatorische Variable ξ mit stetiger Verteilungsfunktion die Folgen $\{x_\nu\}$ und $\{y_\nu\}$ ($\nu = 1, \dots, n$) zwei unabhängige Stichproben mit den resp. Verteilungsfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$, deren Abweichung voneinander durch $D_n^+ = \sup (F_1(x) - F_2(x))$ und $D_n = \sup |F_1(x) - F_2(x)|$ gemessen wird, so gilt in Spezialisierung einer Formel von N. V. Smirnov (dies. Zbl. **23**, 249) bei $z > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^+(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sqrt{n/2} D_n^+ < z\} = 1 - e^{-2z^2} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sqrt{n/2} D_n < z\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}. \text{ Verff. verschärfen dieses Resultat zu: } \Phi_n^+(z) = 1 - \binom{2n}{n-c} \bigg/ \binom{2n}{n}$$

$$\text{und } \Phi_n(z) = \binom{2n}{n}^{-1} \sum_{k=-[n/c]}^{+[n/c]} (-1)^k \cdot \binom{2n}{n-kc} \quad \text{für } (2n)^{-\frac{1}{2}} < z \leq (n/2)^{\frac{1}{2}};$$

$\Phi_n^+ = \Phi_n = 0$ für $z \leq (2n)^{-\frac{1}{2}}$; $\Phi_n^+ = \Phi_n = 1$ für $z > (n/2)^{\frac{1}{2}}$; dabei ist $c = [z \sqrt{2n}]$. Der sehr anschauliche Beweis ist für $\Phi_n^+(z)$ durchgeführt und für $\Phi_n(z)$ andeutet. Grenzübergang zu $n \rightarrow \infty$ liefert das Smirnovsche Resultat zurück.

Hans Richter.

Ginsburg, G. M.: Über Bedingungen für die Eindeutigkeit der Grenzverteilungen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR*, Ser. mat. **15**, 563—580 (1951) [Russisch].

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Eindeutigkeit der durch die stochastische Differentialgleichung

$$\Delta y = A(y) \Delta t + f(\alpha, y) \sqrt{\Delta t}$$

bestimmten Grenzverteilung $P(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(y, t)$ untersucht. Während S. N.

Bernstein (dies. Zbl. **9**, 218; Wahrscheinlichkeitstheorie 1946) Eindeutigkeit nachwies für den Fall, daß die Dispersionsfunktion $B(y) = E f^2(\alpha, y)$ überall positiv sei, und Verf. selbst in früheren Arbeiten einige Spezialfälle mit punkt- oder streckenweise verschwindendem $B(y)$ behandelt hatte, werden diese Resultate jetzt in eine umfassendere systematische Untersuchung der verschiedenen Fälle eingebaut, in welchen die Nullstellen y_i von $B(y)$ nicht oder teilweise mit denen von $A(y)$ zusammenfallen. Als notwendiges und hinreichendes Kriterium für Eindeutigkeit der Grenzverteilung ergibt sich dann im wesentlichen die Nichtexistenz aller Integrale (oder aller bis auf eines)

$$J_j = \int_{y_j}^{y_{j+1}} [B(y)]^{-1} \exp \left[2 \int \frac{A}{B} dy \right] dy.$$

Maria-Pia Geppert.

Chung, Kai Lai: The strong law of large numbers. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 341—352 (1951).

Es sei $S_n = \sum_{k=1}^n X_k = S_n^0 + m(S_n)$ mit unabhängigen reellen Zufallsveränderlichen X_k sowie dem Zentralwert $m(S_n)$ von S_n . Dafür, daß das starke Gesetz der großen Zahlen (1^0) : $P\{\lim S_n^0/n = 0\} = 1$, kurz $S_n^0/n \xrightarrow{0}$ bei identisch nach einer Verteilungsfunktion der θ -parametrischen Schar $F(x, \theta)$ verteilten X_k in θ gleichmäßig gelten soll, findet Verf. die hinreichende Bedingung $\int |x| dF(x, \theta) < \delta$ bei $|x| > A(\delta)$. Diese Bedingung erweist sich auch als notwendig, wenn $m(X)$ eine beschränkte Funktion von θ ist. Für ein einziges θ ergibt sich so Kolmogorovs notwendige und hinreichende Bedingung $\int |x| dF(x) < \infty$ aus dem Jahre 1933. Nun werden ohne Beschränkungen über die Verteilungen der X_k folgende Grenzwert-Beziehungen betrachtet. (1) $S_n \xrightarrow{0}$, (2) $S_n/n \rightarrow 0$, also $P\{|S_n|/n < \varepsilon\} \rightarrow 1$, (3) $S_{2^n}/2^n \xrightarrow{0}$, (4) $(S_{2^{n+1}} - S_{2^n})/2^n \xrightarrow{0}$, (5) $\sum_n P\{|S_{2^{n+1}} - S_{2^n}| > 2^n \varepsilon\} < \infty$, (6) $\sum_n P\{|S_{2^n}| > 2^n \varepsilon\} < \infty$. Insofern nicht bereits bekannt, zeigt Verf., daß (1) \supset (2) sowie (1) \supset (3) \equiv (4) \equiv (5), ferner (5) \subset (6) \supset (3) sowie [(2), (3)] \supset (1) und schließlich (1) \equiv [(2), (3)] \equiv [(2), (4)] \equiv [(2), (5)] \subset [(2), (6)]. Aus [(2), (5)] \equiv (1) folgt übrigens die Verallgemeinerung einer hinreichenden Bedingung für (1) von Kolmogorov (1930) bzw. Brunk (1948). Die ersten drei Beziehungen lassen sich auch für jene $(1^0)-(6^0)$ feststellen, die sich aus (1)-(6) beim Ersetzen der allein stehenden S_k durch S_k^0 und der $S_{2^{n+1}} - S_{2^n}$ durch $(S_{2^{n+1}} - S_{2^n})^0$ entstehen. Zieht man noch (7^0) $S_n^0/2^n \rightarrow 0$ in Betracht, so läßt sich auch $(3^0) \supset (7^0) \supset (2^0)$ sowie $(5^0) \supset (1^0)$ und $(1^0) \equiv (3^0) \equiv (4^0) \equiv (5^0) \subset (6^0)$ zeigen. $(1^0) \equiv (5^0)$ ist übrigens Prohorovs 1949 gefundener Satz. — Abschließend wird gezeigt, daß bei $\sup |X_n| = o(n)$ und $E(X_n) = 0$, also (1) \equiv (1^0) , mit der Bezeichnung $\sum_{k=1}^n E(X_k^2) = s_n^2$, $s_{2^{n+1}}^2 - s_{2^n}^2 = d_n$ notwendig und hinreichend für das Bestehen dieser Grenzwertbeziehungen $\sum_n \exp\left(-\varepsilon \frac{2^{2n}}{d_n^2}\right) < \infty$ bei $\max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} \sup |X_k| = o\left(\frac{d_n^2}{2^n}\right)$ bzw. $\sup |X_n| = o(n/\log \log n)$ ist. Die letzte Bedingung stammt auch von Prohorov. *Tibor Szentmártony.*

Hoeffding, Wassily: A combinatorial central limit theorem. Ann. math. Statistics 22, 558—566 (1951).

Let (Y_{n1}, \dots, Y_{nn}) be a random vector whose distribution is invariant under permutations of its components and let $c_n(i, j)$ ($i, j = 1, \dots, n$) be real numbers. The author shows that a sufficient condition for $\sum_{i=1}^n c_n(i, Y_{ni})$ to be asymptotically normal is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_i \sum_j d_n^r(i, j) \right], \left[\frac{1}{n} \sum_i \sum_j d_n^2(i, j) \right]^{r/2} = 0 \text{ for } r = 3, 4, \dots$$

where $d_n(i, j) = c_n(i, j) - \frac{1}{n} \sum_g c_n(g, j) - \frac{1}{n} \sum_h c_n(i, h) + \frac{1}{n^2} \sum_g \sum_h c_n(g, h)$. For the special case $c_n(i, j) = a_n(i) b_n(j)$ there results a stronger version of a theorem due to Wald and Wolfowitz. [Ann. math. Statistics 15, 358—373 (1944). Cf. also Noether (this Zbl. 34, 226). The asymptotic normality for $c_n(i, j) = i \cdot j$ was proved in Hotelling and Pabst (this Zbl. 14, 29)]. *Stefan Vajda.*

Kolmogorov, A. N.: Eine Verallgemeinerung der Poissonschen Formel auf den Fall der Auswahl aus einer endlichen Gesamtheit. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 3 (43), 133—134 (1951) [Russisch].

Es seien ξ_n und ξ_n^* zufällige Veränderliche, die nur nicht-negative ganze Werte annehmen; es sei $P(\xi_n = k) = P_{nk}$ und $P(\xi_n^* = k) = P_{nk}^*$ ($k = 0, 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$). Die Verteilung von ξ_n^* soll eine asymptotische Approximation der Verteilung von ξ_n genannt werden, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |P_{nk} - P_{nk}^*| = 0$ ist. Die Arbeit behandelt die Frage der asymptotischen Approximation von hypergeometrischen Verteilungen $(1) P_{nk}(N, M) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. Es sei $M/N = p$. P. A. Kozuljajev [Učenyje Zapiski Moskov. Univ. mat. 15, 179—182 (1939)] bewies, daß die hypergeometrische Verteilung durch eine normale Verteilung gut approxi-

mierbar ist, falls zugleich mit $n \rightarrow \infty$, $np \rightarrow \infty$ und $n(1-p) \rightarrow \infty$ gilt. Verf. weist darauf hin, daß im Falle, daß np beschränkt ist, die Verteilung (1) durch die Verteilung

$$(2) \quad Q_{nk} = \frac{a(a-\lambda)(a-2\lambda)\dots(a-(k-1)\lambda)}{k!(1-\lambda)^k} e^{-\omega a}$$

asymptotisch approximierbar ist, wo $\lambda = n/N$, $a = np$ und $\omega = \lambda^{-1} \log(1-\lambda)$ gesetzt wurde. Die Verteilung (2) sieht der Poissonschen Verteilung ähnlich, sie ist aber einfach eine binomiale Verteilung

$$(3) \quad Q_{nk} = \binom{M}{k} \lambda^k (1-\lambda)^{M-k}.$$

Bemerkung des Ref.: In der Formel (13) ist ein Druckfehler; statt $C_M^m \lambda^m (1-\lambda)^{n-m}$ lies $C_M^m \lambda^m (1-\lambda)^{M-m}$.
Alfréd Rényi.

Feller, William: The problem of n liars and Markov chains. Amer. math. Monthly 58, 606–608 (1951).

Verf. knüpft an folgendes, zuerst von A. S. Eddington behandelte Problem an: Wenn A , B , C , D unabhängig voneinander in drei Fällen genau einmal die Wahrheit sagen und A behauptet, daß B leugne, daß C den D zum Lügner erklärt habe, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß D die Wahrheit gesagt hat? (Hier soll „ A lügt“ bedeuten: B behauptet, daß C den D zum Lügner erklärt habe; wenn A , B , C im obigen Fall lügen, hat auch D gelogen. — Ref.) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit von $13/41$ gewinnt Verf. aus Formeln wieder, die mit Hilfe des Matrizenkalküls entwickelt werden. Hinweise auf Verallgemeinerungen.

R. Sprague.

Lévy, Paul: Wiener's random function, and other Laplacian random functions. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31–August 12, 1950, 171–187 (1951).

Die Wiener'sche stochastische Funktion $X(t)$ läßt sich auf zwei Arten darstellen.

$$X(t) - X(t_0) = \xi \sqrt{t - t_0},$$

$$X(t) = \frac{\xi' t}{\sqrt{2\pi}} + \sum_1^\infty \frac{1}{n\sqrt{\pi}} [\xi_n (\cos nt - 1) + \xi'_n \sin nt];$$

ξ , ξ' , ξ_n , ξ'_n sind unabhängige stochastische Variablen einer standardisierten Normalverteilung. Die Fourier-Reihe ist beinahe sicher konvergent. Verf. benutzt die 2. Darstellung zum Studium der ebenen Brownschen Kurve

$$X(t) = x = \frac{\xi' t}{\sqrt{2\pi}} + \sum_1^\infty \frac{1}{n\sqrt{\pi}} [\xi_n (\cos nt - 1) + \xi'_n \sin nt],$$

$$Y(t) = y = \frac{\eta' t}{\sqrt{2\pi}} + \sum_1^\infty \frac{1}{n\sqrt{\pi}} [\eta_n (\cos nt - 1) + \eta'_n \sin nt]$$

und der Fläche

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [X(t) dY(t) - Y(t) dX(t)].$$

Er zeigt, daß die charakteristische Funktion $\Phi(z) = 1/\cos(\pi z)$ ist, und betrachtet die Verteilungen mit den charakteristischen Funktionen $1/\cos z$, $z/\sin z$ und $1/\cos^2 z$. Er beweist, daß diese Verteilungen ∞ teilbar sind. — Im zweiten Teil diskutiert Verf. einen allgemeinen komplexen Laplace-Prozeß. Mit Rücksicht darauf, daß eine ausführliche Darstellung des Verf. über den gleichen Gegenstand in Aussicht gestellt wurde, verzichtet Ref. auf eine detaillierte Besprechung des 2. Teiles.

Walter Saxer.

Fortet, Robert: Random functions from a Poisson process. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 373—385 (1951).

Sei $R(\tau)$ eine gewöhnliche, nicht stochastische Funktion. Auf der τ -Achse sei eine Poisson-Verteilung mit dem Mittel m für Intervalle von der Länge 1 gegeben. Sei $N(\tau)$ die stochastische Anzahl der Punkte, die zum Intervall $0, \tau$ gehören. Verf.

betrachtet die Integrale $X_{\alpha, \beta} = \int_{\alpha}^{\beta} R(\tau) dN(\tau)$. Er ergänzt und vereinfacht die Ergebnisse von Blanc, Kac, Hurwitz und Maruyama für solche stochastische Funktionen in verschiedener Hinsicht. Er zeigt, daß diese Integrale verschieden definiert werden können, beispielsweise als Integrale mit der Wahrscheinlichkeit 1 oder als stochastische Grenzwerte Stieltjes-Riemannscher Summen. Ebenso gibt er Bedingungen für ihre Konvergenz nach einer Normalverteilung. Die Beweise werden zur Hauptsache mit Hilfe der charakteristischen Funktionen der $X_{\alpha, \beta}$ geführt.

Walter Saxer.

Rényi, Alfréd: On composed Poisson distributions. II. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 2, 83—96 und russische Zusammenfassung. 97—98 (1951).

The present paper is a continuation of a joint paper by L. Janossy, A. Rényi, and J. Aczel (this Zbl. 41, 249). In § 1 the following inhomogeneous stochastic process is considered: For a process starting at $t = 0$, J_t is the number of events occurring in $(0, t)$; two conditions are formulated, one with respect to „independence“ the other with respect to „rarity“ of events; it is then proved that J_t is distributed according to a composed Poisson distribution for $t > 0$. In § 2 the following is considered: It is supposed that every event in a composed Poisson process is the starting point of some other event of a duration which is a random variable and η_t is the number of those other events taking place at time t . It is proved that the distribution of η_t is a composed Poisson distribution. Applications of this result are given. In § 3 it is shown that the composed Poisson distribution is obtained as limiting distribution of a sum of integer valued independent random variables which, of course, are in a certain sense „infinitely small“ (a theorem which has several predecessors). In § 4 the class of composed Poisson distributions is characterized as a certain class of infinitely divisible distributions of integer valued random variables.

Hilda Geiringer.

Daboni, Luciano: Studio delle probabilità subordinate in un caso di processo stocastico. Ann. Triestini, Sez. II 20, 23—48 (1951).

Verf. betrachtet die zufällige Funktion $Y(\lambda) = \int_0^{\lambda} X(\lambda) d\lambda$, wo $X(\lambda)$ homogen-normal ist (die ΔX sind unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen, mit $m = 0$ und $\sigma^2 = \kappa \Delta \lambda$). Es wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $Y(\lambda)$ studiert, falls die Werte $y_i = Y(\lambda_i)$ für n Zeitpunkte $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ bekannt sind; in den Fällen $n = 1, n = 2$ wird das Problem vollständig gelöst, für $n > 2$ werden allgemeine Bemerkungen gegeben.

Bruno de Finetti.

Lévy, Paul: La mesure de Hausdorff de la courbe du mouvement brownien à n dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 600—602 (1951).

Ist $\varphi(\varrho)$ eine stetige Funktion von $\varrho \geq 0$, welche in der Nachbarschaft von $\varrho = 0$ mit ϱ abnehmend Null wird, dann ist $0 \leq m(\Gamma) = \inf \sum \varphi(\varrho_v) \leq \infty$ das Hausdorffsche φ -Maß eines Jordanschen Kurvenbogens Γ , welcher von Kugeln mit den Radien $\varrho_v < \varepsilon$ überdeckt wird. Dies wird gemäß $\mu(\Gamma) \geq \mu(\Gamma) \geq m(\Gamma)$ durch jene majorisiert, die dadurch entstehen, daß das Parameterintervall durch fortlaufende Halbierung oder irgendwie immer feiner eingeteilt wird und die φ -Maße der bei einer Einteilung entstehenden Teilbögen addiert werden. Verf. zeigt nun: Wenn man einen $(0, T)$ entsprechenden Bogen der n -dimensionalen Brownschen

Bewegungskurve nimmt und $\varphi(\varrho)$ gemäß $\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^2 \log \log \varrho^{-1}} = c$ wählt, wobei $c = 0$ oder ∞ sein kann, dann ist fast sicher 1. $\bar{\mu}(I') = c \lambda_n T$, 2. $\mu(I') = c k_n T$. Hier bezeichnet λ_n die kleinste positive Nullstelle der in $s = 0$ regulären Lösung von $2s \frac{d^2 u}{ds^2} + n \frac{du}{ds} + u = 0$ und k_n ist ein λ_n nicht übertreffender positiver Festwert. — Die Untersuchung von $m(I')$ scheint viel schwieriger zu sein. Verf. vermutet, daß bei $n > 2$ die Feststellung 2) auch für $m(I')$ gilt, für $n = 2$ aber $\varrho^2 \log \log (\varrho^{-1})$ durch das $\log (\varrho^{-1})$ -fache ersetzt werden muß. Vorläufig kann aus 1. nur das festgestellt werden, daß bei $\varphi(\varrho) = o[\varrho^2 \log \log (\varrho^{-1})]$, insbesondere bei $\varphi(\varrho) = \varrho^2$ fast sicher $m(I') = 0$ ist.

Tibor Szentmártony.

Dvoretzky, A. and P. Erdős: Some problems on random walk in space. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1951, 353—367 (1951).

Die Verff. diskutieren die Irrfahrt im d -dimensionalen Raum. Als wesentliche Verschärfung eines Resultates von Pólya beweisen sie die folgenden Sätze betreffend die Anzahl $L_d(n)$ der verschiedenen Punkte des Koordinatengitters und ihre Erwartungswerte, die in n Schritten passiert werden.

$$E_2(n) = \frac{\pi n}{\log n} + O\left(\frac{n \log \log n}{\log^2 n}\right), \quad E_3(n) = n \gamma_3 + O(\sqrt{n})$$

$E_4(n) = n \gamma_4 + O(\log n), \quad E_d(n) = n \gamma_d + \beta_d + O(n^{2-d/2})$ für $d = 5, 6, \dots$; γ und β sind Konstanten.

$$V_2(n) = O\left(\frac{n^2 \log \log n}{\log^3 n}\right), \quad V_3(n) = O(n^{3/2}),$$

$$V_4(n) = O(n \log n) \quad V_d(n) = O(n) \quad \text{für } d = 5, 6, \dots$$

$L_d(n)$ genügt dem starken Gesetz der großen Zahl, der Beweis dafür ist für $d = 2$ erheblich schwieriger als für $d \geq 3$. — Schließlich charakterisieren die Verff. alle monotonen Funktionen $g(n)$, welche mit der Wahrscheinlichkeit 1 der Gleichung $g(n) \sqrt[n]{n} = o[||S_d(n)||]$ genügen. $||S_d(n)||$ bedeutet den Abstand eines Punktes des d -dimensionalen Raumes vom Nullpunkt. Beispielsweise genügt im dreidimensionalen Raum $g(n) = (\log n)^{-1-\varepsilon}$ der vorigen Bedingung, wenn $\varepsilon > 0$, aber nicht für $\varepsilon = 0$. — Bei den Beweisen werden frühere Ergebnisse der Verff. sowie von Pólya benutzt.

Walter Saxer.

Lehman, R. Sherman: A problem on random walk. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 263—268 (1951).

Rückkehr zum Gleichgewicht in einer Reihe von Ziehungen mit l gleichwahrscheinlichen Merkmalen. Dieselben hier für dieses Beispiel gegebenen Ergebnisse wurden gleichzeitig in Fellers Buch (Probability, New York 1950, dies. Zbl. 39, 132) als Grundsätze der allgemeinen Theorie der wiederkehrenden Ereignisse (recurrent events) erklärt.

Bruno de Finetti.

Ryll-Nardzewski, Cz. et H. Steinhaus: Sur les fonctions indépendantes. IX. Séries des fonctions positives. Studia math. 12, 102—107 (1951).

Aus fünf Hilfssätzen, unter denen zwei Sonderfälle des Kolmogoroffschen Dreireihensatzes sind, leiten Verff. folgenden interessanten Satz ab. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ eine Reihe mit nichtnegativen, über $[0, 1]$ L -meßbaren Gliedern und man betrachtet die Gesamtheit G aller Reihen, deren Glieder mit jenen der ursprünglichen bezüglich ihrer Verteilungsfunktion $F_n(\tau)$, also des L -Maßes jener t -Menge, in welcher $f_n(t) < \tau$ ist, übereinstimmen. Dann erreicht das Maß der Konvergenzpunkte der Reihen von G sein Maximum bzw. Minimum sicherlich für je eine Reihe, deren Glieder nicht abnehmende bzw. unabhängige Funktionen sind. Wahrscheinlichkeitstheoretisch kann dieser Satz etwa folgendermaßen gedeutet werden. Eine Folge nichtnegativer Zufallsveränderlichen führt beim Festlegen ihrer

Verteilungsfunktionen zu solchen Reihen mit äquivalent verteilten Zufallsveränderlichen, deren Konvergenz-Wahrscheinlichkeit mit der gegenseitigen Abhängigkeit der Glieder zunimmt. *Tibor Szentmártony.*

Egerváry, E. and P. Turán: On a certain point of the kinetic theory of gases. *Studia math.* 12, 170—180 (1951).

Verff. betrachten folgende zwei Gasmodelle *A* und *B*: Es sei *E* der Würfel, begrenzt durch die Ebenen $x_i = 0$ und $x_i = \pi$ ($i = 1, 2, 3$) und n Teilchen mit den Koordinaten $x_{iv}(t)$ ($1 \leq i \leq 3, v = 1 - n$), t die Zeit), welche dimensionslos und mit gleicher Masse sich in *E* kräftefrei bewegen. Die Stöße untereinander (wenn vorhanden) und gegen die Wände von *E* sollen elastische Stöße sein. Die Anfangslagen $x_{iv}(0)$ sind beliebig, dagegen sollen die Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{x}_{iv}(0)$ von der Gestalt $(n + v)^2 \sqrt{i}$ ($1 \leq i \leq 3$) sein. (Diese Voraussetzung kann, wie die Verff. zugeben, abgeschwächt werden). Im Modell *A* sollen nun die Teilchen untereinander nie zusammenstoßen, im Modell *B* sind Stöße von höchstens 2 Teilchen zugelassen. Sagen wir, daß die Partikel für einen Zeitpunkt $t = t_0$ gleichverteilt in *E* sind, wenn für jeden achsenparallelen Quader K $\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i$ ($i = 1, 2, 3$) mit Volumen K^* die Anzahl $N(t_0, K)$ der Teilchen in K $\left| \frac{N}{n} - \frac{K^*}{\pi^3} \right| \leq n^{-1/10}$ gilt, so wird gezeigt: In beiden Modellen sind die Teilchen in *E* für $0 < t < n^{1/4}$ gleichverteilt, ausgenommen für Zeitintervalle mit einer Gesamtlänge $< c n^{-1/10} \log^4 n$ ($c \geq 0$ konstant). Diese Modelle *A, B* sind von der Wirklichkeit weit entfernt, aber der Satz zeigt, daß es möglich ist, ohne statistische Methoden die kinetische Gastheorie streng aufzubauen. (Verwandte, aber mehr qualitative Resultate stammen von H. Steinhaus, (dies. Zbl. 35, 214). Der Beweis erfolgt durch Kombination einer bekannten Überlegung von D. König und A. Scües [Rend. Circ. Mat. Palermo 36, 79—83 (1912)] mit der dreidimensionalen Verallgemeinerung des Satzes von Erdős und Turán (dies. Zbl. 32, 16), welche von J. F. Koksma (dies. Zbl. 38, 28) und unabhängig davon von A. Scüsz (Diss.; Ref. nicht zugänglich) stammt.

Edmund Hlawka.

Statistik:

• **Treloar, A. E.:** Biometric analysis. — An introduction. Minneapolis, Minn.: Burgess Publishing Company 1951. V, 251 p.

Aus zwanzigjähriger Vorlesungstätigkeit ist neben anderen leitfadenartigen Publikationen des Verf. die vorliegende Einführung in die biometrische Methodik erwachsen, die im wesentlichen ein revidierter Neudruck von A. E. Treloar: Elements of statistical reasoning (New York 1939; dies. Zbl. 25, 199) ist. In wohlthuendem Gegensatz zu den heute zahlenmäßig überwiegenden Anfängerleitfäden von ausgesprochenem Rezeptbuch-Charakter hat sich dieses Buch das anspruchsvollere Ziel gesteckt, dem Anfänger bei Darlegung der Grundzüge der statistischen Technik vor allem deren Grundgedanken und logischen Ideengehalt verständlich zu machen. Dieses Ziel verfolgt Verf. unter völligem Verzicht auf höhere Mathematik, und indem er bewußt die rechnerisch leichter zugängliche Theorie großer Stichproben in den Vordergrund stellt auf Kosten der Methodik für kleine Stichproben, deren eingehendere Behandlung einem späteren Buche des Verf. vorbehalten bleibt. Der Mathematiker und moderne Stochastiker, dem die Theorie der großen Stichproben nur eine im Spezialfall geltende Approximation der exakten Theorie beliebiger Proben bedeutet, bleibt daher naturgemäß etwas unbefriedigt. Lobenswert ist die Gründlichkeit und Sorgfalt, mit der Verf. grundlegende Gedankengänge entwickelt und analysiert, so etwa den Begriff der Confidenz, der Signifikanz, Beurteilung extrem kleiner χ^2 -Werte. Jedoch erscheinen manche der durchweg elementaren Formelerleitungen allzu schwerfällig; an vielen Stellen, so u. a. bei χ^2 -Test und Yates-Korrektur für Vierfeldertafel, ist die alles kurz und bündig klärende Formel umständlichen Beschreibungen geopfert oder an zu später Stelle angegeben. Mißverständlich oder unkorrekt erscheint die Anwendung des χ^2 -Tests auf Tab. 61, wo ein Erwartungswert < 3 ist, sowie manche flüchtige Formulierung z. B. bez. Zusammenfallen von Median-, Mittel- und Modal(?)wert bei symmetrischen Verteilungen, bez. Unabhängigkeit der Restschwankungen und bez. der mittleren Restabweichung um die Regressionsgerade. Im Kapitel über Häufigkeitenvergleich vermißt man mit Befremden jegliche Erwähnung von Fishers exakter, auf der hypergeometrischen Verteilung fußender „direkter“ Methode; an Stelle derselben, die bei extrem kleinen Zahlen wie im dortigen Beispiel 3 besonders einfach ist,

verwendet Verf. in Beispiel 3 die ebenfalls exakte, aber umständlichere Methode der Binomialverteilungen. Einige historische Zuordnungen erscheinen ergänzungsbedürftig: Schon 90 Jahre vor Gauß operierte De Moivre mit dem Integral der Normalverteilung, und bereits 40 Jahre vor Galton beschrieb Bravais die Binormalverteilung und das Produkt-Moment. — Jedem Kapitel sind einschlägige Literatur und numerische Übungsaufgaben beigegeben; im Anhang Tafeln einfacher, für die Anwendung bequemer Potenzausdrücke \sqrt{N} , $N/(N-1)$ etc., ferner Tafeln der Normal-, Student-, χ^2 -Verteilung und der Fisher-Transformation $z = 2^{-1} \cdot [\ln(1+r) - \ln(1-r)]$. Inhaltlich umspannt das Buch etwa: Grundbegriffe, Mittelwerte, Streuungsmaße, Momente, Normal-, Binomial-, Poisson-Verteilung, 2-dimensionale Korrelation und Regression, Beurteilung und Vergleich von Mittelwerten, Varianzen, Häufigkeiten, Korrelationen, χ^2 -Test. — Insbesondere dem mathematisch ungeschulten Anfänger ist das Lehrbuch als gediegene Einführung zu empfehlen.

Maria-Pia Geppert.

● Walker, Helen M.: Mathematics essential for elementary statistics. Revised ed. New York: Henry Holt and Co. 1951. XIII, 382 p.

● Moroney, M. J.: Facts from figures. (A layman's introduction to statistics.) Hardmondsworth: Penguin Books 1951. 472 p. 5 s.

Blackwell, David: Comparison of experiments. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 93—102 (1951).

The author works out certain ideas introduced by Bohnenblust, Shapley, and Sherman (private communication). — Consider a set of hypotheses denoted by the numbers $i = 1, \dots, N$. Any set α of probability measures u_i in a sample space X , the measures corresponding to the hypotheses mentioned, is called an experiment. Performing the experiment means observing a variable x which has distribution u_i when hypothesis i is true. After performing the experiment, one has to take an action; since actions which under all hypotheses cause the same loss may be identified, the totality of actions is essentially described by a set A of points a in N -space, a_i being the loss from action a if hypothesis i is true. A decision procedure is a function $a(x)$ from X into A . The average effect of such a procedure is given by the risk point v with coordinates $v_i = E(a_i(x) | u_i)$. The range of v for all $a(x)$ is denoted by $R_i(\alpha, A)$; the convex closure $R(\alpha, A)$ of R_i is the set of all risk points attainable either directly or by means of randomization. — Two experiments α, β (concerned with the same hypotheses) are in general not comparable without further specification of the problem at hand; however, if $R(\alpha, A) \supset R(\beta, A)$ for all action sets A , then α may be considered more informative than β , written $\alpha \supset \beta$. The paper gives several results concerning this relation and, particularly, its connexion with the relation of sufficiency, $\alpha > \beta$. It is proved that $>$ implies \supset ; the truth of the converse is proved only for $N = 2$.

Gustav Elfving.

● Morse, P. M. and G. E. Kimball: Methods of operations research. New York: The Technol. Press of Mass. Inst. of Technol. and John Wiley & Sons, Inc. 1951. VII, 158 p. \$ 4,00.

The authors were members of the Operations Research Group of the U. S. Navy and the present book is intended to make their experience available to scientists and engineers. The chapter headings are as follows: Introduction, Probability, The Use of Measures of Effectiveness, Strategic Kinematics, Tactical Analysis, Gunnery and Bombardment Problems, Operational Experiments with Equipment and Tactics, Organisational and Procedural Problems. There are also tables, a bibliography and an index. — Chapters 2—7 are reproduced from an earlier, classified, work. This explains a few odd references to a „Vol. 2 B“, which is not available to the general public. Chapter 1 starts with the definition: „O. R. is a scientific method of providing executive departments with a quantitative basis for decisions regarding the operations under their control.“ (In the reviewer's opinion this definition is too narrow and also too wide.) It tries to prove the value of the method for peace time applications. Chapter 2 contains the mathematical basis for later chapters. The following pages give information on Lanchester's equations, on the Minimax principle, and a specimen for sampling methods to solve probability problems. They contain also some analysis which requires only elementary arithmetic with common sense. The examples are well chosen and excellently presented, though they are, of course, often unrealistic. The last chapter contains notes on how to set up an O. R. department.

Stefan Vajda.

Cole, Randal H.: Relations between moments of order statistics. Ann. math. Statistics 22, 308—310 (1951).

Die Verteilung der i -größten Beobachtung $x_{i|n}$ einer Stichprobe vom Umfang n aus einer Gesamtheit mit der Dichtefunktion $f(x) = F'(x)$ ist $n \binom{n-1}{i-1} g_{i|n}(x)$ mit $g_{i|n}(x) = F^{n-i}(x) (1 - F(x))^{i-1} f(x)$. Verf. definiert $V_{i|n} = \int x^i g_{i|n}(x) dx$ als

das „normalisierte t -te Moment“ von $x_{i|n}$ und beweist die Beziehung $V_{r|n-k} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} V_{r+i|n} (r+k < n)$. Die Ergebnisse sind in Matrizenform dargestellt.

Edward Walter.

Krull, Wolfgang: Korrelationstheorie mehrdimensionaler Merkmale. Mitteil.-Bl. math. Statistik 3, 185—200 (1951).

Extension of an earlier investigation to more than two dimensions [Verf., Mitteil.-Bl. math. Statistik 3, 15—29 (1951)]. In the general case the coefficient of alienation is replaced by the ratios of invariants of quadratic forms. The connection with Hotelling's canonical correlation is mentioned. Stefan Vajda.

Gayen, A. K.: The frequency distribution of the product-moment correlation coefficient in random samples of any size drawn from non-normal universes. Biometrika 38, 219—247 (1951).

Verf. berechnet die Verteilungen und die ersten vier Momente des Korrelationskoeffizienten r und der daraus gebildeten Zufallsvariablen $z = \frac{1}{2} \ln(1+r)/(1-r)$ für die allgemeine Edgeworth-Verteilung

$$F(x, y) = \left\{ 1 + \sum_{i+j=3,4,6} \frac{A_{ij}(-1)^{i+j}}{i!j!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^i \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^j \right\} \Phi(x, y)$$

mit $\Phi(x, y) = (2\pi\sqrt{1-\varrho^2})^{-1} \exp\{-(x^2 - 2\varrho xy + y^2)/2(1-\varrho^2)\}$. Die A_{ij} sind hierbei spezielle Funktionen der niedrigeren Kumulanten. Einige numerische Beispiele, denen eine von der Gaußverteilung erheblich abweichende Edgeworth-Verteilung zugrunde gelegt wurde, zeigen keine nennenswerten Unterschiede in den Verteilungen von r und von z gegenüber den entsprechenden Verteilungen, die sich bei gaußverteilten Zufallsvariablen ergeben, wenn die Absolutbeträge $|\varrho|$ der Korrelation der Edgeworth-Verteilung nicht allzu groß ist. Bei großen $|\varrho|$ kann man die Verteilung von z fast ebenso gut wie bei gaußverteilten Zufallsvariablen durch eine Gaußverteilung approximieren, muß allerdings die Parameter ändern. Bei der Herleitung der ersten vier Momente der allgemeinen Verteilung von z entdeckt der Verf. einen von vielen Autoren übernommenen Fehler, der R. A. Fisher [Metron 1, Nr. 4. 1—30 (1921)] bei der Berechnung der Momente von z im Falle einer gaußverteilten Zufallsvariablen unterlaufen ist.

Edward Walter.

Weibull, Martin: The distribution of the t and z variables in the case of stratified sample with individuals taken from normal parent populations with varying means. Skand. Aktuarietidskr. 1950, 137—167 (1950).

Let x_i ($i = 1, \dots, N$) be an observation from a normal population with mean ξ_i and variance λ . The author derives the distributions of their mean m (normal with mean $\mu = \Sigma \xi_i/N$ and variance λ/N), of their variance s^2 (infinite series of type III distributions), of $t = (m - \mu)/N/s$ (infinite series of type VII distributions) and of z , the quotient of two independent estimates of s^2 (infinite double series of type VI distributions). The last section considers the distributions of m , s^2 , t and z when the ξ_i are drawn at random from a normal parent population. As is to be expected, these distributions are of the same form as when $\xi_i = \mu$ for all i . Stefan Vajda.

Weibull, Martin: The regression problem involving nonrandom variates in the case of stratified sample from normal parent populations with varying regression coefficients. Skand. Aktuarietidskr. 1951, 53—71 (1951).

Let x_{0i} be observations from normal populations with means $\sum_{k=1}^p \alpha_{ki} x_{ki}$ and variance λ . The x_{ki} are known, the α_{ki} are estimated by the method of least squares and λ from the residual variance of the sample. The author derives the distribution of these estimates, using methods analogous to those in an earlier publication (see prec. rev.) and deals with similar problems in Analysis of Covariance.

Stefan Vajda.

Sillitto, G. P.: Interrelations between certain linear systematic statistics of sample from any continuous population. *Biometrika* **38**, 377—382 (1951).

Let z_1, \dots, z_n denote a sample from a population with probability integral $F(z)$ arranged in order of magnitude (order statistics). The author exploits well known relations between the „mean ranges“ $E(z_n - z_1)$ and the expectations $X_{n,p} = E(z_{p+1} - z_p)$ of the „ p -th gap“ $x_{n,p} = z_{p+1} - z_p$. Since these relations are universal, i. e. do not depend on $F(z)$, the author is able to construct certain weighted means of the $x_{n,p}$ whose expectations satisfy certain universal relations independently of $F(z)$. The statistics considered in particular are the weighted means

$$g_m = \sum_{p=1}^{n-1} x_{n,p} - \left[1 \binom{n}{m}\right] \sum_{p=1}^{n-m} \binom{n-p}{m} \{x_{n,p} + x_{n,n-p}\},$$

special cases of which are found to be identical with Ginis coefficient of mean difference [Variabilità e mutabilità, Studi econom.-giurid. Univ. Cagliari **3**, 11, 80 (1912)] and other statistics used by Godwin (this Zbl. **33**, 198), Jones [*Biometrika* **33**, 274 (1946)] and Nair (this Zbl. **36**, 94). In the case of a normal parent the variances of certain g_m are compared with those of alternative estimators (Table 1 p. 380).

H. O. Hartley.

Theil, H.: Estimates and their sampling variance of parameters of certain heteroscedastic distributions. *Revue Inst. internat. Statist.* **19**, 141—147 (1951).

Für die Koeffizienten β_λ einer stochastischen Gleichung

$$y_i = \alpha + \sum_{\lambda=1}^A \beta_\lambda x_{\lambda i} + u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

in welcher $x_{\lambda i}$ bekannte Parameterwerte und u_i Zufallsvariablen mit $E u_i = 0$, $E u_i u_j = 0$, $E u_i^2 = C \cdot (E y_i)^2$ sind, bestimmt Verf. nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate erwartungstreue Schätzungen b_k und beweist, daß bei dieser Form der Heteroskedastizität die Varianz von b_k , die bei Homoskedastizität $\nu/n \nu_k$ lauten würde, mit einem Korrekturfaktor zu multiplizieren ist. Dabei ist $\nu = \sum_i \frac{E u_i^2}{n}$ und

$\nu_k = \text{var } u_k$ in der stochastischen Gleichung $x_{ki} = \alpha_k + \sum_{\lambda \neq k} \beta_{\lambda k} x_{\lambda i} + u_{ki}$.

Maria-Pia Geppert.

Barankin, Edward W.: Concerning some inequalities in the theory of statistical estimation. *Skand. Aktuarietidskr.* **1951**, 35—40 (1951).

Let p_θ be a family of probability densities with respect to a measure μ , where θ is written for $(\theta_1, \dots, \theta_k)$. The author gives a new derivation of the formula

(*) $\sum_{i,j=1}^k \tilde{\lambda}_{ij} u_i u_j \leq \sum_{i,j=1}^k \varrho_{ij} u_i u_j$, for any u_i (*H. Cramer*, *Skand. Aktuarietidskr.* **29**, 85—94 (1946)) where

$$\varrho_{ij}(\theta) = \int \left(\frac{\partial \log p}{\partial \theta_i} \right)_\theta \left(\frac{\partial \log p}{\partial \theta_j} \right)_\theta p_\theta d\mu$$

and the matrix $(\tilde{\lambda}_{ij})$ is the reciprocal of the covariance matrix of the functions f_i , which are unbiased estimates of the θ_i with finite variances. These estimates are efficient at θ^0 when equality holds in (*) for $\theta = \theta^0$ and all u_i . *Stefan Vajda*.

Hodges jr., J. L. and E. L. Lehmann: Some applications of the Cramér-Rao inequality. *Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. and Probability*, California, July 31—August 12, 1950, 13—22 (1951).

Let X be a random variable with density $p_\theta(x)$, θ being a parameter to be estimated. Let $f(X)$ be any estimate of θ , and let the loss function be $(f - \theta)^2$. Denote with $b_f(\theta) = E_\theta(f) - \theta$ the bias of $f(X)$. According to the Cramér-Rao theorem, the risk function $R_f(\theta) = E_\theta[(f - \theta)^2]$ ordinarily satisfies the inequality

$$(1) R_f(\theta) \equiv b_f^2(\theta) + \sigma_f^2(\theta) \geq b_f^2(\theta) + \frac{[1 + b_f'(\theta)]^2}{E[(\partial \log p_\theta / \partial \theta)^2]} \equiv C_f(\theta).$$

Assume, now, that the distribution is such that (1) holds for all estimates, and with identical equality for a certain estimate $g(X)$. If, further, $C_f(\theta) \leq C_g(\theta)$ implies $b_f(\theta) = b_g(\theta)$, then it is easily proved that $g(X)$ is an admissible estimate, i. e., $R_f(\theta) \leq R_g(\theta)$ (all θ) implies $R_f(\theta) = R_g(\theta)$. The same is true if the above loss function is replaced by $(f - \theta)^2/q(\theta)$, where $q(\theta)$ is an arbitrary positive function. The former implication mentioned above can in many cases be verified directly; in this way, the authors derive admissible minimax solutions, for appropriate dividers $g(\theta)$, of several classical estimation problems. The method is generalized to a certain class of sequential estimates.

Gustav Elfving.

Cohen jr., A. C.: On estimating the mean and variance of singly truncated normal frequency distributions from the first three sample moments. *Ann. Inst. statist. Math.* **3**, 37—44 (1951).

Im Anschluß an eine vorhergehende Arbeit (dies. Zbl. **43**, 137) studiert Verf. speziell Fragen der Parameterschätzung für die gestutzte Normalverteilung mit einem Stützpunkt mittels der Momentenmethode. Für die Anwendung der Maximum-Likelihood-Methode vgl. dies. Zbl. **40**, 222. Von praktischer Bedeutung ist die hier gegebene Tabelle der asymptotischen Streuungen und Wirksamkeit der „Dreimomente“-Schätzfunktionen des Verf. für Mittelwert und Streuung für 16 Werte des Stützpunktes sowie die ebenfalls aufgenommenen analogen Werte für die Pearson-Lee-Schätzungen. Es zeigt sich, daß die handlicheren Schätzfunktionen des Autors nur wenig größere asymptotische Streuungen besitzen.

Leo Schmetterer.

Bailey, Norman T. J.: The estimation of the frequencies of recessives with incomplete multiple selection. *Ann. Eugenics* **16**, 215—222 (1951).

In the „proband method“ a family is ascertained through its affected children; hence families with more than one child may be ascertained more than once. Denote by N the number of families capable of producing affected children and by p the probability that such a family produce an affected child (say an albino); let p' be the probability that an affected child be brought into the record; assume for the moment that all families contain s children. Then P_{rt} , the probability that a family contains r albinos and be ascertained t times ($0 \leq t \leq r \leq s$), is easily found. Let n_{rt} be the number of families with r albino-children and t -times ascertained. Then $A = \sum_{t \neq 0} r n_{rt}$, $B = n s = \sum_{t \neq 0} s n_{rt}$, $C = \sum_{t \neq 0} t n_{rt}$ are respectively equal to the number of albino-children, the total number of children, the number of ascertained children in the observed sample. Next for these, we find expectations, and variances. By using these expectations as „unbiased estimates“ of A , B , and C it is possible to estimate p , p' and N . It is seen that these solutions are essentially the same as the maximum likelihood estimates. — Results can be extended to the case of families of different sizes.

Hilda Geiringer.

Albert, G. E. and Ralph B. Johnson: On the estimation of central intervals which contain assigned proportions of a normal univariate population. *Ann. math. Statistics* **22**, 596—599 (1951).

Let $F(y)$ be a normal distribution function with mean m and standard deviation σ . Wilks (this Zbl. **24**, 427) has shown how to find values λ_p so that the expectation of $A(\bar{y}, s, \lambda_p) = F(\bar{y} + \lambda_p s) - F(\bar{y} - \lambda_p s)$ equals $1 - p$, when \bar{y} and s are the usual unbiased estimates of m and σ . The authors are concerned with the variability of $A(\bar{y}, s, \lambda_p)$ and derive a formula for the probability that it lies between $1 - p - d_1$ and $1 - p + d_2$, for given d_1 and d_2 . They add an approximate formula for large sample size N , and remarks about the computational procedure. When the probability is chosen, then the required inequalities for $A(\bar{y}, s, \lambda_p)$ can only be satisfied when N reaches a lower bound, for which tables are given.

Stefan Vajda.

Birnbaum, Z. W. and Fred H. Tingey: One-sided confidence contours for probability distribution functions. *Ann. math. Statistics* **22**, 592—596 (1951).

Let $F(x)$ be the continuous distribution function of a random variable and $F_n(x)$ the step function which is $= 0$ for $x < X_1$, $= k/n$ for $X_k \leq x < X_{k+1}$ ($k = 1, \dots, n-1$) and $= 1$ for $X_n \leq x$, where the X_i are observed values of x . The authors show that the probability that $F(x) < \min [F_n(x) + \varepsilon, 1]$ for all x [which is known to be independent of $F(x)$] is given by $1 - \varepsilon \sum_{j=0}^a \binom{n}{j} \left(1 - \varepsilon - \frac{j}{n}\right)^{n-j}$

$\cdot \left(\varepsilon + \frac{j}{n}\right)^{j-1}$ where a is the greatest integer contained in $n(1 - \varepsilon)$. He also tabulates the 10, 5, 1 and 0,1 % points of this function for $n = 5, 8, 10, 20, 40$ and 50 and compares them with those calculated from the asymptotic formula $1 - e^{-2n\varepsilon^2}$ given by Smirnov (this *Zbl.* **22**, 245).

Stefan Vajda.

Wald, A.: Asymptotic minimax solutions of sequential point estimation problems. *Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability*, California, July 31—August 12, 1950, 1—11 (1951).

Let θ be a parameter to be sequentially estimated from a sequence of independent and equidistributed observations. Assume that the loss function is squared error, and the cost of experimentation equal to c times the number of observations. Let, finally, $r(\theta, T, c)$ be the risk function of the sequential estimation procedure T , and let T_c denote a particular procedure depending on c as parameter. Then T_c is

called an asymptotic minimax procedure if $\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sup_{\theta} r(\theta, T_c, c)}{\inf_{\theta} \sup_{\theta} r(\theta, T, c)} = 1$. The

author indicates two procedures which, under suitable regularity assumptions, fulfill this condition.

Gustav Elfving.

Dixon, W. J.: Analysis of extreme values. *Ann. math. Statistics* **21**, 488—506 (1950).

Dixon, W. J.: Ratios involving extreme values. *Ann. math. Statistics* **22**, 68—78 (1951).

Bei der Entnahme von Stichproben aus einer Gesamtheit (Population) fallen bisweilen einzelne Beobachtungswerte soweit abseits der großen Menge der übrigen, daß es zweifelhaft wird, ob sie zu derselben Population gehören. Verf. untersucht in der zuerst genannten Arbeit, welche Wirkung bestimmte Fehlerquellen auf eine Reihe der in der Statistik üblichen Untersuchungskriterien (Tests) haben. Sei das arithmetische Mittel der zu untersuchenden Population μ , ihr Streuungsmaß σ^2 , und werde sie durch $N(\mu, \sigma^2)$ symbolisiert, so werden zum Ausgangspunkt der Untersuchungen die fiktiven Populationen $A = N(\mu + \lambda \sigma, \sigma^2)$ und $B = N(\mu, \lambda^2 \sigma^2)$ gemacht, wobei λ eine unbestimmt gelassene Größe ist. Existieren solche Populationen, wie oft vorausgesetzt werden darf, und geraten Beobachtungswerte aus ihnen in die Stichprobe aus $N(\mu, \sigma^2)$, so stellen sie eine „Verunreinigung“ der Stichprobe dar. Im Falle A spricht der Verf. von „location errors“; sie werden in der Regel nur an einem Ende der Stichprobe zu suchen sein. Im Falle B dagegen werden die „Ausreißer“ an beiden Enden erscheinen („scalar errors“). Es ist zwar zu erwarten, daß oft beide Fehlerquellen vorhanden sind, jedoch erleichtert das getrennte Studium derselben die Gewinnung von Ergebnissen.—Die Diskussion geschieht mit Hilfe von Zahlenbeispielen und Zeichnungen. Die zu untersuchenden Kriterien werden danach unterschieden, ob das Maß der Streuung der Population unabhängig von der Stichprobe geschätzt werden kann oder nicht. Das Ergebnis ist eine Urteilsbildung, welche Kriterien jeweils den Vorzug für die Auswertung der Stichprobe verdienen. Sie kann nur von Fall zu Fall erfolgen.—In der zu zweit genannten Arbeit untersucht Verf. einen Sonderfall der Verbindung statistischer Werte eingehender, nämlich das Verhältnis $(x_n - x_{n-j}) : (x_n - x_i)$ für kleine Werte von i, j und $n = 3, \dots, 30$. Dabei sind die x Zufallsgrößen, die nach der Größe steigend geordnet sind. Die Dichtefunktionen der in das Verhältnis eingehenden Veränderlichen müssen als bekannt vorausgesetzt werden. Der am meisten interessierende Fall der Normalverteilung wird für einige Sonderfälle diskutiert. Als Ergebnis seiner Rechnungen gibt Verf. 6 Tafeln.

Paul Lorenz.

Ottestad, Per: On the test of the hypothesis that the probability of an event is contained within given limits. *Skand. Aktuarietidskr.* **1951**, 197—201 (1951).

Unter der Voraussetzung, daß im Bayesschen Urnenschema die Merkmals-

wahrscheinlichkeit p im Intervall $c_1 \leq p \leq c_2$ mit konstanter Anfangswahrscheinlichkeit gleichverteilt sei, lautet die Wahrscheinlichkeit für die Trefferzahl x in einer n -gliedrigen Stichprobe mit Zurücklegen $F(x) = \binom{n}{x} \int_{c_1}^{c_2} p^x (1-p)^{n-x} dp / (c_2 - c_1)$.

Verf. berechnet ihre Momente bis zur 4-ten Ordnung und verwendet $F(x)$ unter Benutzung der auf G. Castelnovo (1919) zurückgehenden, die Teilsommen der Binomialverteilung mit der unvollständigen Beta-Funktion verknüpfenden Reziprozitätsformel zur Entscheidung zwischen den beiden Hypothesen, daß p in $c_1 \leq p \leq c_2$ bzw. in $b_1 \leq p \leq b_2$ gleichverteilt sei mit $c_1 \leq c_2 \leq b_1 \leq b_2$.

Maria-Pia Geppert.

Kimball, A. W.: On dependent tests of significance in the analysis of variance. Ann. math. Statistics 22, 600—602 (1951).

Verf. beweist, daß für nicht negative, monoton wachsende Funktionen $f(x)$, $g(x)$ derselben Zufallsvariablen x stets

$$E[f(x) \cdot g(x)] > E[f(x)] \cdot E[g(x)]$$

gilt, und wendet diese Ungleichung an, um zu beweisen: Werden auf Grund eines

Varianzanalysen-Schemas mit Hilfe der Varianzverhältnisse $F_1 = \frac{q_1/n_1}{q_3/n_3}$, $F_2 = \frac{q_2/n_2}{q_3/n_3}$

einer Stichprobe zwei Hypothesen gleichzeitig geprüft, wo die q_i unabhängig voneinander mit n_i Freiheitsgraden χ^2 -verteilt sind, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, hierbei nicht einen Fehler 1. Art zu begehen, größer als sie bei Unabhängigkeit der beiden Prüfungen wäre; m. a. Worten wenn $F_{1\alpha}$, $F_{2\alpha}$ die dem Signifikanzniveau α entsprechenden kritischen Werte der F -Verteilung sind,

$$P\{F_1 \leq F_{1\alpha}, F_2 \leq F_{2\alpha}\} > P\{F_1 \leq F_{1\alpha}\} \cdot P\{F_2 \leq F_{2\alpha}\}.$$

Ausdehnung auf mehr als zwei abhängige Prüfungen.

Maria-Pia Geppert.

Freeman, G. H. and J. H. Halton: Note on an exact treatment of contingency, goodness of fit and other problems of significance. Biometrika 38, 141—149 (1951).

Verff. erweitern den genauen Fisherschen Test für eine (2×2) -Klassifikation auf eine allgemeine $(r_1 \times r_2 \times \dots \times r_k)$ -Klassifikation. Sie schlagen vor, alle möglichen Aufteilungen (i) bei festen Randhäufigkeiten zu bilden, die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_{(i)}$ zu berechnen und die Nullhypothese beim Signifikanzmaß α zu verwerfen, wenn für die beobachtete Aufteilung (L) die Ungleichung $\sum_{P_{(i)} \leq P_{(L)}} P_{(i)} < \alpha$ gilt. Zwei Beispiele werden durchgeführt, wobei verschiedene

Möglichkeiten zur Abkürzung der Rechnung betrachtet werden. *Edward Walter.*

Ogawa, Junjiro: A remark on the efficiency of the designs of weighing experiments. Proc. Japan Acad. 87, 532—535 (1951).

Verf. gibt ein neues Kriterium für die Leistungsfähigkeit (efficiency) E zu dem von H. Hotelling [Ann. math. Statistics 15, 297—306 (1944)] aufgeworfenen Problem an, die günstigste Anordnung zum Wiegen von p Gegenständen in N Messungen zu bestimmen. Seien x_{ij} ($i = 1, \dots, p$; $j = 1, \dots, N$) entweder $+1$ oder -1 , je nachdem der i -te Gegenstand bei der j -ten Messung auf die rechte oder linke Waagschale gelegt wird, $X = \{x_{ij}\}$ die Matrix dieser Werte und $A = X'X$, dann lautet das Kriterium $E = |A|/N^p$.

Edward Walter.

Whitney, D. R.: A bivariate extension of the U statistic. Ann. math. Statistics 22, 274—282 (1951).

Verf. betrachtet eine zweivariable Erweiterung des auf den Rangwerten der Beobachtungen beruhenden Prüfmaßes u , das von ihm und H. B. Mann (dies. Zbl. 41, 261) eingeführt worden ist. Auf Grund der Beobachtungen $x_1, \dots, x_l; y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_n$ aus drei Gesamtheiten mit den stetigen Summenfunktionen $f(x)$, $g(y)$ und $h(z)$ soll geprüft werden, ob $f = g = h$ gilt, wobei als Alternativen $f > g$ und $f > h$ bzw. $g > f > h$ für jede Stelle des Definitionsbereiches betrachtet

werden. u gebe an, wie oft ein y vor einem x , und v , wie oft ein z vor einem x steht; wenn alle Beobachtungen der Größe nach angeordnet sind. Verf. gibt Rekursionsformeln für die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen u und v an, bestimmt daraus ihre ersten vier Momente und zeigt, daß sie gegen die zweivariable Gaußverteilung mit $E(u) = l m / 2$; $E(v) = l n / 2$; $\sigma^2(u) = l m (l + m + 1) / 12$; $\sigma^2(v) = l n (l + n + 1) / 12$ und $\rho^2(u, v) = m n / (l + m + 1) (l + n + 1)$ strebt. Die Anpassung ist für kleine n schon recht gut, wie die für den Fall $l = 6$, $m = n = 3$ berechnete genaue Verteilung zeigt. Die Tests bestehen in der Festlegung geeigneter kritischer Bereiche für die zweivariable Gaußverteilung. *Edward Walter.*

Hotelling, Harold: A generalized T test and measure of multivariate dispersion. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California, July 31—August 12, 1950, 23—41 (1951).

Bereits früher hat Verf. (dies. Zbl. 4, 265) zur Prüfung hypothetischer Mittelwerte einer p -dimensionalen Normalverteilung an Hand einer Stichprobe (x_{ia} = p -te Koordinate des a -ten Individuums) „verallgemeinerte Student-Quotienten“ T mit $T^2 = \Sigma \Sigma l_{ij} z_i z_j$ eingeführt, wo $[l_{ij}] = [s_{ij}]^{-1}$ die Inverse der Matrix auf n Freiheitsgraden beruhender erwartungstreuer (Wishart-verteilter) Schätzungen der Kovarianzmatrix und die Konstanten c_{ia} in $z_i = S c_a x_{ia}$ so bestimmt sind, daß die z_i unabhängig von den s_{ij} der gleichen Verteilung wie die x_i folgen. $F = (n - p + 1) T^2 / n p$ folgt exakt Snedecors F -Verteilung und ist daher mittels Tabellen der unvollständigen Betafunktion erfaßbar; für große n erhält Verf. approximative χ^2 -Verteilung auf Grund von Reihenentwicklung. Auf diese Ausdrücke T^2 baut Verf. eine für die Methodik der Qualitätskontrolle wichtige Verallgemeinerung der Fisherschen Varianzanalyse auf, indem er mit der auf Grund einer „alten“ Stichprobe gewonnenen Matrix l_{ij} die aus einer „neuen“, M -gliedrigen Stichprobe erhaltenen individuellen Werte

$$T_B^2 = \Sigma \Sigma l_{ij} x_{iB} x_{jB}$$

über die neue Stichprobe addiert (S') und das Resultat in (allerdings voneinander nicht unabhängige) Zwischen- und Binnen-Komponenten zerlegt:

$$S' T_B^2 = T_0^2 = T_M^2 + T_D^2 = M \cdot \Sigma \Sigma S' l_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + \Sigma \Sigma S' l_{ij} (x_{iB} - \bar{x}_i) (x_{jB} - \bar{x}_j).$$

Für $p = 2$ wird die Verteilung von T^2 als der Summe der charakteristischen Wurzeln einer Determinantengleichung $|S_1 - \lambda S_0| = 0$, wo S_1 und S_0 voneinander unabhängige Schätzungsmatrizen der gleichen Kovarianzmatrix bedeuten, hergeleitet, die im wesentlichen einen Faktor $(1 + T^2/n)^{-(n-1)/2}$ und eine unvollständige Betafunktion enthält. Analog χ^2 -verteilten Variablen sind derartige T^2 -Ausdrücke additiv in ihrer Verteilungsform, wenn die einzelnen T^2 „bedingt“ unabhängig, d. h. für jede gegebene „alte“ Stichprobe voneinander unabhängig sind. Über die praktische Verwendbarkeit dieser Resultate vgl. Hotellings Kap. 3 (111—184) in: Selected techniques of statistical analysis; Statistical Research Group, Columbia University; New York-London 1947. — Sei ferner die Kovarianzmatrix einer p -dimensionalen Normalverteilung mit Mittelwerten 0 nur bis auf einen konstanten Faktor γ bekannt: $\sigma_{ij} = \gamma t_{ij}$, so findet Verf. für den „allgemeinen Streuungsgrad“ γ die Minimax-Schätzung $\hat{\gamma} = p^{-1} \Sigma \Sigma q_{ij} s_{ij}$ mit $[q_{ij}] = [t_{ij}]^{-1}$, $s_{ij} = n^{-1} S x_i x_j$. *Maria-Pia Geppert.*

Sato, Ryoichiro: The r -tests relating to the regression. Ann. Inst. statist. Math. 3, 45—56 (1951).

The author continues his investigation in „ r -distributions and r -tests“ [Ann. Inst. statist. Math. 2, 91—124 (1951); this Zbl. 42, 381] by deriving the sampling distribution of some statistics arising in multiple regression, when some or all of the regression coefficients are themselves estimated from the sample. *Stefan Vajda.*

Robbins, Herbert: Asymptotically subminimax solutions of compound statistical decision problems. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 131—148 (1951).

Verf. betrachtet folgendes Beispiel eines „compound“ Entscheidungsproblems. X_i ($i = 1, \dots, n$) seien n unabhängige gaußverteilte Zufallsvariable mit der Streuung eins und den Mittelwerten $\theta_i = +1$ oder -1 , zwischen denen auf Grund je einer Beobachtung x_i entschieden werden soll. Eine bei der Verlustfunktion $W(\theta', \theta) = \sum |\theta'_i - \theta_i|/2n$ zulässige (admissible) Minimaxlösung \bar{R} bilden die Entscheidungen $\theta'_i = \text{sgn } x_i$. Wenn aber die relative Häufigkeit p der Verteilungen mit $\theta_i = +1$ bekannt ist, ergeben sich Minimaxlösungen mit kleinerem maximalem Risiko als bei \bar{R} . Dies führt dazu, Lösungen zu konstruieren, die auf einer Schätzung von p beruhen. Sei $\bar{x} = \sum x_i$ und

$$x^* = \begin{cases} -\infty, & \text{wenn } \bar{x} \leq -1, \\ \frac{1}{2} \ln(1 - \bar{x})/(1 + \bar{x}), & \text{wenn } -1 < \bar{x} < +1, \\ +\infty, & \text{wenn } \bar{x} \geq +1, \end{cases}$$

dann hat die Lösung $\theta'_i = \text{sgn}(x_i - x_i^*)$ für alle p bis auf eine mit n verschwindende Umgebung um $p = 0,5$ ein kleineres Risiko als \bar{R} . Eine derartige Lösung wird als „asymptotisch subminimax“ bezeichnet. Verf. behandelt auch das allgemeine Problem, aus den Beobachtungen die Stichprobenverteilung der unbekannten Parameter geeignet zu schätzen, um für diese „a priori Verteilung“ Lösungen zu konstruieren. Konkrete Ergebnisse werden jedoch nicht angegeben. *Edward Walter.*

Matusita, Kameo: On the theory of statistical decision functions. Ann. Inst. statist. Math. **3**, 17—35 (1951).

The author derives some of Wald's theorems by considering, instead of randomised decision functions, a „mixed“ decision function, i. e. a probability distribution on the space of decision functions. [The equivalence of the two approaches has since been shown by A. Wald and J. Wolfowitz, this Zbl. **40**, 365]. He deals, in particular, with the case of a choice between a finite number of decisions and shows that the risk can be made arbitrarily small by enlarging the sample size. Moreover, under given condition any mixed decision function is equivalent to some pure decision function. (For an equivalent theorem, cf. A. Dvoretzky, A. Wald and J. Wolfowitz, this Zbl. **44**, 150.) *Stefan Vajda.*

Lehmann, E. L.: A general concept of unbiasedness. Ann. math. Statistics **22**, 587—592 (1951).

Verf. erweitert den von J. Neyman und E. S. Pearson mittels der Potenzfunktion (power function) definierten Begriff der Tendenzfreiheit (unbiasedness) einer Hypothesenprüfung, J. Neymans Begriff der Tendenzfreiheit eines Konfidenzintervalls sowie die Begriffe der Erwartungstreue (meanvalue-unbiasedness) und Mediantreue (median-unbiasedness) einer Punktschätzung im Sinne von Walds Theorie der Entscheidungsfunktionen: eine Entscheidung $\delta(X)$ mit Verlustfunktion $W(\theta, \delta(X))$, wenn θ der wahre Parameterwert ist, heißt tendenzfrei, wenn

$$E_{\theta} W(\theta', \delta(X)) = \text{Minimum für } \theta' = \theta.$$

Verf. zeigt, daß diese Definition die oben genannten als Spezialfälle umfaßt, und bringt sie in Verbindung zu einer neuen, allgemeineren Definition der Invarianz von $\delta(X)$ mit Hilfe von Transformationsgruppen des Stichproben- und des Entscheidungsräume. *Maria-Pia Geppert.*

Wald, A. and J. Wolfowitz: Characterization of the minimal complete class of decision functions when the number of distributions and decisions is finite. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 149—157 (1951).

Unter der Voraussetzung endlich vieler (m) Verteilungen und endlich vieler Entscheidungen geben Verff. zunächst kürzere Herleitungen für die folgenden Sätze an: a) Die Klasse aller zulässigen (admissible) Entscheidungsfunktionen ist eine minimal vollständige Klasse und b) Jeder zulässige Test ist eine Bayessche Lösung bezüglich einer a priori Verteilung. Dann beweisen sie v. a., daß es für eine zulässige Ent-

scheidungskfunktion hinreichend und notwendig ist, eine Bayessche Lösung bezüglich einer Folge von $h \leq m$ a priori Verteilungen $\xi_j (j = 1, \dots, h)$ zu sein, die die Eigenschaft hat, daß es zu jeder Verteilungsfunktion $F_i(x) (i = 1, \dots, m)$ mindestens ein ξ_j gibt, das $F_i(x)$ eine positive Wahrscheinlichkeit zuordnet, während die Folge der $h - 1$ ersten a priori Verteilungen diese Eigenschaft nicht besitzt.

Edward Walter.

Dvoretzky, A., A. Wald and J. Wolfowitz: Elimination of randomization in certain problems of statistics and of the theory of games. Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 256—260 (1950).

Verff. geben einige für die Theorie der Spiele und für die Theorie der Entscheidungsfunktionen wichtige mengentheoretische Sätze an, deren Beweise sie später (s. nachsteh. Referat) veröffentlicht haben. Aus ihnen folgt, daß es in Spezialfällen zu jeder gemischten Strategie eine äquivalente reine bzw. zu jeder Zufallsentscheidungsfunktion (randomized decision function) eine äquivalente Nichtzufallsentscheidungsfunktion (nonrandomized decision function) gibt. Diese Folgerungen sind von den Verff. später (s. zweitfolgendes Referat) ausführlich behandelt worden.

Edward Walter.

Dvoretzky, A., A. Wald and J. Wolfowitz: Relations among certain ranges of vector measures. Pacific J. Math. 1, 59—74 (1951).

Verff. beweisen und erweitern einige von ihnen in der vorsteh. referierten Arbeit angegebenen Sätze. Es seien $\{x\} = X$ ein willkürlicher Raum, $\{S\} = \mathfrak{S}$ ein Borelsches System von Punktmengen in X , $\mu_i(S) (i = 1, \dots, p; p < \infty)$ p reellwertige, für alle S erklärte, additive Mengenfunktionen und $\eta(x) = \{\eta_j(x)\} (j = 1, \dots, n)$ ein Vektor, dessen Komponenten meßbare nicht negative Funktionen sind, für die $\sum \eta_j(x) = 1$ für alle $x \in X$ gilt. Es wird gezeigt, daß die Menge V_n aller Punkte $v(\eta) = \left[\int_X \eta_1(x) d\mu_1(x), \dots, \int_X \eta_n(x) d\mu_p(x) \right]$ bezüglich aller Vektoren $\eta(x)$ eine kompakte und konvexe Menge in R_{np} bildet, wenn die Mengenfunktionen μ_1, \dots, μ_p beschränkt sind. Werden als Funktionen $\eta_j(x)$ nur Treppenfunktionen mit höchstens 2^{np-p+1} verschiedenen Werten zugelassen, so ist die entsprechend gebildete Punktmenge V_n^0 unter der gleichen Bedingung für die μ_i mit V_n identisch. Im besonderen gehören die Extrempunkte, d. h. Punkte der Menge V_n , die nicht innere Punkte eines Segments von V_n sind, zu der Punktmenge V_n^* , die man erhält, wenn die Funktionen $\eta_j(x)$ nur die Werte null oder eins annehmen können. Für Anwendungen in der Spieltheorie und in der Theorie der Entscheidungsfunktionen ist besonders wertvoll, daß auch die Punktmenge V_n^* mit V_n unter der Voraussetzung identisch ist, daß μ_1, \dots, μ_p atomlos sind. μ_i ist atomlos, wenn es zu jeder Menge $S \in \mathfrak{S}$ mit $\mu_i(S) \neq 0$ eine Untermenge $S' \in \mathfrak{S}$ gibt, für die $\mu_i(S') \neq \mu_i(S)$ und $\mu_i(S') \neq 0$ gilt. Für die Gültigkeit des letzten Satzes ist die Beschränktheit der Mengenfunktionen nicht erforderlich.

Edward Walter.

Dvoretzky, A., A. Wald and J. Wolfowitz: Elimination of randomization in certain statistical decision procedures and zero-sum two-person games. Ann. math. Statistics 22, 1—21 (1951).

Verff. zeigen unter Benutzung eines in vorsteh. referierter Arbeit bewiesenen Satzes, unter welchen hinreichenden Bedingungen zu einer Zufallsentscheidungsfunktion $\delta(x)$ eine Nichtzufallsentscheidungsfunktion $\delta^*(x)$ existiert, die a) zu $\delta(x)$ äquivalent ist, d. h. die gleiche Risikofunktion besitzt, b) zu $\delta(x)$ ε -äquivalent ist, d. h. eine sich höchstens um ε unterscheidende Risikofunktion besitzt und c) zu $\delta(x)$ stark äquivalent ist, d. h. für alle Verlustfunktionen, die nur von der Entscheidung d und der Verteilungsfunktion $F(x)$ abhängen, äquivalent ist. Es wird bewiesen, daß im nichtsequentiellen Fall eine äquivalente Entscheidungsfunktion existiert, wenn der Raum D der Entscheidungen kompakt, die

Menge Ω der Verteilungsfunktionen endlich und alle $F(x)$ atomlos sind. Bei endlich vielen Entscheidungen gibt es auch eine stark äquivalente Entscheidungsfunktion, während eine ε -äquivalente Entscheidungsfunktion existiert, wenn D und Ω im Sinne spezieller Metriken bedingt kompakt sind. Im sequentiellen Fall gibt es eine äquivalente Entscheidungsfunktion, wenn D und Ω endlich und alle F stetig sind. Beispiele von Zufallsentscheidungsfunktionen, zu denen keine äquivalente bzw. ε -äquivalente Nichtzufallsentscheidungsfunktionen existieren, zeigen, daß die gegebenen Bedingungen nicht wesentlich abgeschwächt werden können.

Edward Walter.

Gebelein, Hans: Anwendung gleitender Durchschnitte zur Herausarbeitung von Trendlinien und Häufigkeitsverteilungen. *Mitteil.-Bl. math. Statistik* 3, 45—68 (1951).

Verf. erläutert an vier Aufgaben die Anwendung gleitender Durchschnitte auf statistische Probleme. Zunächst wird die Ausgleichung einer äquidistanten Beobachtungsreihe und einer Häufigkeitsverteilung durch eine Ausgleichsformel mit gleichen Gewichten behandelt. Da dabei in den konvexen Teilen der Häufigkeitsverteilung Verzeichnungen auftreten, werden die Achsen so gedehnt, daß die beobachtete Streuung erhalten bleibt. In den letzten beiden Aufgaben wird eine Summenlinie und eine nicht äquidistante Beobachtungsreihe ausgeglichen.

Edward Walter.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Komatu, Yûsaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. I. Distribution of genes. *Proc. Japan Acad.* 27, 371—377 (1951).

The paper deals with the inheritance (under random mating) of a single inherited character (m alleles), hence the simplest case. The paper presents an interesting example of the fact that often the same results are found independently by various people and in several countries; this is however a rather striking case in as much as the author discovers the extremely well known theorem of Hardy, which states that in case of one character a distribution of genotypes reaches its constant equilibrium form in the first filial generation if random mating takes place. This result known in its simplest form since 1908 has been reconsidered very often and generalized in various ways; there is hardly any more comprehensive publication on genetics which does not somehow mention this fact. The present author gives an unskillful and complicated proof; (today Hardy's law can be literally proved in one line), but it is correct. — It should be noticed that in this and all the following papers there is no quotation of any kind. There is — in all these papers — never a clear statement of the problem dealt with or a summary of the results.

Hilda Geiringer.

Komatu, Yûsaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. II₁, II₂. Cross-bending phenomena. *Proc. Japan Acad.* 27, 378—383, 384—387 (1951).

II₁. Starting point is the (completely trivial) fact that if several distributions of genotypes, each in equilibrium status, are composed, the resulting population is no longer in equilibrium status. On the other hand under random mating it will reach equilibrium in the first filial generation, according to Hardy's theorem. (Everything is with respect to one character.) The main result, which follows immediately, is then that if the probability of homozygotic genotypes in this equilibrium-distribution is compared with the corresponding in the original „composed“ population the former is less than or equal to the latter. An application is discussed. — II₂. The result of the two preceding papers are reconsidered assuming that the populations are located in certain local regions. From the probability-genetical point of view this „generalization“ does not contribute any new idea or result.

Hilda Geiringer.

Komatu, Yûsaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. III₁—, Further discussions on cross-bending. *Proc. Japan Acad.* 27, 459—465, 466—471, 472—477, 478—483 (1951).

III₁. In this communication — always with respect to one single character — a case of selection is considered: A population X consists of two different races X' , X'' (each in equilibrium, with gametic probabilities p'_i , p''_i respectively) mixed in a proportion $\lambda' : \lambda''$. It is assumed that cross breeding takes place at the rate $\mu^{(1)}$, such that the mating, of the three classes $X' \times X'$, $X' \times X''$, $X'' \times X''$ are in the proportion $(\lambda' - \mu^{(1)}) : 2\mu^{(1)} : (\lambda'' - \mu^{(1)})$. Then the distribution of genotypes for the population in the subsequent generation is found and compared

with the original distribution. For the transition to the second generation a selection is defined by adequate μ -factors and the new distribution is computed etc. The final result, surmised but not proved, is as follows. If $A_{ii}(n)$, $A_{ij}(n)$ denote probabilities of respective genotypes in the n -th generation ($n = 0, 1, \dots$)

$$A_{ii}(n) - A_{ii}(0) = -\Gamma^{(n)} (p'_i - p''_i)^2,$$

$$A_{ij}(n) - A_{ij}(0) = -2 \Gamma^{(n)} (p'_i - p''_i) (p'_j - p''_j), \quad (i, j = 1, \dots, m; i < j).$$

Here m is the number of alleles and the $\Gamma^{(n)}$ are computed from the various selection coefficients μ . — The referee thinks that this type of selection has been considered before but at the moment has not the facilities to check it. — III₂. The formula for the distribution of genotypes in the n -th generation, stated in III₁, is proved by induction. This result constitutes an explicite formula which is definitely of a certain interest. — III₃. Some consequences of the explicite formula of the preceding papers are considered. Since $\Gamma^{(n)}$ is positive we conclude that $A_{ii}(n) < A_{ii}(0)$ ($n = 1, 2, \dots$). A formula is given which compares $A_{ii}(n)$ with the equilibrium distribution which would be reached if in the population $\lambda' X' + \lambda'' X''$ random mating took place. The question is discussed under which assumptions for the selection factors μ , an equilibrium status might be reached after a number of generations. — A recurrence formula (rather complicated) is given for the $\Gamma^{(n)}$ (introduced in III₁). — III₄. The assumption of discrete generations is abandoned and a continuous process is considered. This entails several new definitions. Denoting now the probabilities of genotypes at time t by $P_{ii}(t)$, $P_{ij}(t)$ the main result is:

$$P_{ii}(t) - P_{ii}(0) = -(p'_i - p''_i)^2 \Gamma(t),$$

$$P_{ij}(t) - P_{ij}(0) = -2 (p'_i - p''_i) (p'_j - p''_j) \Gamma(t), \quad (i, j = 1, \dots, m; i < j),$$

where m is the number of alleles and

$$\Gamma(t) = \int_0^1 x^2 [\varrho(x, 0) - \varrho(x, t)] dx$$

where $\varrho(x, t) = \varrho(x, 0) + \int_0^t dt \int_0^1 [-\varphi(x, y, t) + 2\varphi(y, 2x - y, t)] dy$ and finally $\varphi(x, y, t)$ is a so called „mating velocity“. A form is also given which contains the present formula and that of III₁ as particular cases.

Hilda Geiringer.

Komatu, Yûsaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. IV₁, IV₂, IV₃. Mother-child combinations. Proc. Japan Acad. 27, 587—592, 593—597, 598—603 (1951).

IV₁, IV₂. Die untersuchte Frage ist, welche Aussage man über die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Genotyps eines „Kindes“ machen kann, wenn man nicht die Typen beider Eltern, sondern nur den eines Elter, z. B. der Mutter kennt, eine Frage, die z. B. mit Bezug auf die Blutgruppen 1932 beantwortet wurde. Die Aufgabe wird hier für einen m -alleligen Mendelschen Charakter behandelt. Die grundlegende Wahrscheinlichkeit, die zu bestimmen ist, ist $\pi(i, j; h, k)$, die Wahrscheinlichkeit der Kombination einer Mutter vom Typus i, j und eines Kindes vom Typus h, k ($i, j, h, k, = 1, 2, \dots, m$). Die obige Aufgabe bildet den Gegenstand der ersten und zweiten Mitteilung, unter Zugrundelegung einfacher Erbliehkeitsannahmen.

IV₃. Nun wird die Kombination einer Mutter und eines Kinder-Paares untersucht, wobei die Ordnung der Kinder zunächst in Betracht gezogen wird. Zwei Kinder, die beide Eltern, oder sogar nur ein Elter gemeinsam haben, werden eine gewisse Korrelation ihrer Genotypen aufweisen. Es bezeichne $\pi(i, j; h, k; l, n)$ die Wahrscheinlichkeit der Kombination einer Mutter vom Typus i, j , mit einem „ersten“ und „zweiten“ Kind von Typen h, k , und l, n ($i, j, \dots, n = 1, 2, \dots, m$). Es ist dann $\pi(i, j; h, k; l, n) = \pi(i, j; l, n; h, k)$. Eine Tafel dieser Wahrscheinlichkeiten wird — unter einfachen Erbliehkeitsvoraussetzungen — gegeben. Daraus wird die Wahrscheinlichkeit gewonnen dafür, daß eine Mutter, deren Kinder respektive vom Typus h, k und l, n sind, selbst dem Typus i, j angehört.

Hilda Geiringer.

Marschak, J.: Why „should“ statisticians and businessmen maximize „moral expectation“? Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 493—506 (1951).

Weitere Betrachtungen und Ergebnisse über den Gegenstand einer früheren Abhandlung des Verf. (dies. Zbl. 36, 220). Es wird u. a. festgestellt, daß (die trivialen Axiome I—III vorausgesetzt) Axiom IV (d. h.: die Vertauschbarkeit von gleichgültigen Zuständen in einer Verbindung) mit der Regel der Maximisierung der Nützlichkeit gleichbedeutend ist, und daß eine Erklärung im Sinne der Häufigkeit „in the long run“ zugänglich ist.

Bruno de Finetti.

Sibirani, Filippo: *Probabilità, matematica finanziaria e attuariale*. Repertorio Mat. 639—696 (1951).

Zusammenfassende Darstellung der Zinsrechnung und der Versicherungsmathematik, mit einigen einleitenden Tatsachen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Bruno de Finetti.

● **Böhm, F.:** *Versicherungsmathematik. I.* 2. Aufl. (Sammlung Göschen Nr. 180.) Berlin: Verlag de Gruyter 1951.

Vajda, S.: *Analytical studies in stop-loss reinsurance*. Skand. Aktuarietidskr. 1951, 158—175 (1951).

Ist $p(x)dx$ die unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung der jährlichen Gesamtsumme x der Fälligkeiten einer Versicherung, so lautet die Nettoprämie für die Rückversicherung der den kritischen Betrag C übersteigenden Jahresbe-

träge x $P = \int_C^\infty p(x) \cdot (x - C) dx$. Verf. beschreibt und untersucht 2 Verfahren zur

Schätzung von P ohne genaue Kenntnis von $p(x)$ auf Grund der in n vergangenen Jahren registrierten Fälligkeiten x_1, \dots, x_n . A. Man bestimmt R als Summe der k ($0 \leq k \leq n$) in den n Jahren positiv ausgefallenen Beträge $(x_j - C)$. Verf. beweist, daß R/n eine erwartungstreue Schätzung von P ist mit Varianz

$$n^{-1} \cdot \left\{ \int_C^\infty (x - C)^2 p(x) dx - \left[\int_C^\infty (x - C) p(x) dx \right]^2 \right\}.$$

B. Wenn hingegen der Verteilungstyp $p(x; t_1, \dots, t_s)$ von x bekannt ist, gewinnt man aus x_1, \dots, x_n für die unbekannten Parameter t_1, \dots, t_s die Schätzungen

$\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_s$ und daraus die Prämien-schätzung $\bar{P} = \int_C^\infty p(x; \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_s) \cdot (x - C) dx$.

Erwartungstreue Parameterschätzungen führen jedoch nicht notwendig zu erwartungstreuen Prämien-schätzungen. Insbesondere behandelt Verf. die Fälle der Poisson- und Normalverteilung. Beide Verfahren illustriert Verf. durch sorgfältig angelegte, umfassende Stichprobenexperimente mit Hilfe von Wolds Zufallszahlen.

Maria-Pia Geppert.

Arrow, Kenneth J.: *Alternative approaches to the theory of choice in risk-taking situations*. Econometrica 19, 404—437 (1951).

Verf. untersucht und vergleicht die verschiedenen Standpunkte und Theorien, nach denen man das Verhalten der Menschen gegenüber dem Risiko zu beschreiben bzw. vorzuschreiben versucht hat. Zahlreiche alte und neuere Ideen und Begriffe (auf den Gebieten der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Statistik, der Ökonomie, usw.) werden klar zusammengefaßt und erörtert.

Bruno de Finetti.

Wold, Herman: *Demand functions and the integrability condition*. Skand. Aktuarietidskr. 1951, 149—151 (1951).

Stöwe, Heinz: *Die Anwendung der „Streuungsanalyse“ (Analysis of variance) auf quantitative wirtschaftliche Probleme unter Berücksichtigung der „Autokorrelation“*. Mitteil.-Bl. math. Statistik 3, 155—178 (1951).

Anwendung bekannter varianzanalytischer Methoden auf die stochastische, lineare Nachfragegleichung, speziell zur Erklärung der Zuckerverbrauchsschwankungen. Signifikanzprüfung totaler und partieller Regressionskoeffizienten mittels Varianzanalyse und F -Test; ferner bei Berücksichtigung des Zeitfaktors Signif.kanz-

prüfung der Autokorrelation nach v. Neumann und Hart und Ausschaltung derselben durch ein iteratives Verfahren. *Maria-Pia Geppert.*

Braicovich, Giovanna: *Ricerca sulla teoria matematica del socialismo*. Ann. Triestini, Sez. II 20, 49—102 (1951).

Verf. analysiert die von V. Pareto, Barone, Dickinson, Lange und Frisch entwickelten mathematischen Theorien der sozialen Volkswirtschaft sowie die ihnen zugrunde liegenden Hypothesen und untersucht anschließend das Problem des wirtschaftlichen Optimums bei freier Konkurrenz bzw. auf Grund sozialisierter Produktion; letztere läßt eine Lösung zu, die gleichzeitig optimal ist und Gleichgewicht gewährleistet. In mathematischer Hinsicht handelt es sich dabei um die Bestimmung von Maxima mehrerer Funktionen mit Nebenbedingungen.

Maria-Pia Geppert.

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

● Bouligand, G.: *L'accès aux principes de la géométrie euclidienne. Introduction à l'axiomatique du plan*. Paris: Vuibert 1951. VII, 88 p. 320 frs.

Diese Schrift soll, nach dem Vorwort, eine Art von Ergänzungslektüre für gewisse Kategorien von Schülern höherer Klassen („au niveau de la classe de Seconde“) und Philosophiestudenten darstellen, in der Annahme, daß sie nicht alles in vorangehenden Schulkursen Gelernte vergessen haben. Verf. versucht, den Leser mit einigen, in Schulkursen i. a. wohl nicht betonten, Begriffen der Geometrie, wie Transformation, Äquivalenz etc., bekannt zu machen, und zeigt an Beispielen („géométrie expérimentale“), wie diese Begriffe zum Verständnis und zur Lösung gewisser elementarer Aufgaben nützlich sind. Allerdings wird die Lösung nicht-trivialer Aufgaben nicht immer bis zum handgreiflichen Resultat durchgeführt, vgl. z. B. die Konstruktion eines Polygons zu gegebenen Seitenmitten, p. 36–37. Von § 5 an wird der Übergang zu abstrakten Begriffsbildungen vollzogen, die z. T. vorher durch „le principe des lieux géométriques“ vorbereitet wurden, und dem Leser die Notwendigkeit eines Axiomensystems nahegelegt. In § 8 wird ein solches für die lineare (affine) Geometrie aufgestellt: undefinierte Elemente: Vektoren, reelle Zahlen, Punkte; die Vektoren, jeder bestimmt durch 2 Punkte, bilden eine abelsche Gruppe mit den reellen Zahlen als Operatoren. Ausführungen über lineare Transformationen, Gruppeneigenschaft. Anwendungen: Sätze von Menelaus und Ceva, affine Eigenschaften des vollständigen Vierseits, Flächeninhalt. Um den Übergang zur metrischen und Ähnlichkeitsgeometrie zu vollziehen, wird ein bestimmtes Parallelogramm als Quadrat ausgezeichnet. Bemerkungen über Bewegungsgruppen und Hinweis aufs Erlanger Programm. Aufstellung des Hilbertschen Axiomensystems der euklidischen Geometrie nebst Bemerkungen über Distanzgeometrie (Peano-Pieri-Blumenthal). Schließlich 23 Übungsaufgaben (mit Anweisungen), auf die zuweilen im Text verwiesen wird. — Wenn auch dem Ref. nicht alle Gedankenfolgen des Büchleins so ungezwungen scheinen, wie Verf. es manchmal haben möchte, so dürfte es doch für interessierte Leser eine wünschenswerte und nützliche Abwechslung vom trockenen Einerlei des „text-book“ bieten.

H. Schwerdtfeger.

Hadwiger, H.: *Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder*. Arch. der Math. 2, 441—444 (1951).

A, B : Polyeder des dreidimensionalen euklidischen Raumes, $V(A)$ bzw. $V(B)$: Volumen von A bzw. B , K_ν ($\nu = 1, \dots, N$) bzw. L_μ ($\mu = 1, \dots, M$): Polyederkanten von A bzw. B , a_ν bzw. b_μ : Länge von K_ν bzw. L_μ , α_ν bzw. β_μ : Winkel der äußeren Normalen der K_ν bzw. L_μ angrenzenden Seitenflächen, \mathfrak{M} : Klasse der bewegungsinvarianten, endlich additiven und linearen Polyederfunktionale, \mathfrak{M}' : Klasse der \mathfrak{M} -Funktionale $\chi(A) = \sum a_\nu \varphi(\alpha_\nu)$, wobei $\varphi(\alpha)$ eine Lösung der Funktionalgleichung $\varphi(\alpha' + \alpha'') = \varphi(\alpha') + \varphi(\alpha'')$ mit $\varphi(\pi) = 0$ bezeichnet. Nach einer früheren Mitteilung (dies. Zbl. 33, 299) ist die Bedingung $(B): (V(A) = V(B)) \& (\chi(A) = \chi(B) \text{ für jedes } \chi \text{ in } \mathfrak{M})$ der Zerlegungsgleichheit (Z) gleichwertig. (B') : $(V(A) = V(B)) \& (\chi(A) = \chi(B) \text{ für jedes } \chi \text{ in } \mathfrak{M}')$ folgt aus (Z) . Gelingt der Nachweis von $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$, dann wäre die Äquivalenz von (Z) und (B') geze gt. Durch Heranziehung einer dem vorliegenden Polyederpaar A, B angepaßten Hamelschen Basis für die reellen Zahlen gibt Verf. für (B') die folgende, wesentlich konkretere

Form: Sind $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ rational unabhängige Zahlen derart, daß $\omega_0 = \pi$ und $\alpha_\nu = \sum p_{\lambda\nu} \omega_\lambda$ und $\beta_\mu = \sum q_{\lambda\mu} \omega_\lambda$ sind, $\lambda = 1, \dots, n$ mit rationalen $p_{\lambda\nu}$ und $q_{\lambda\mu}$, dann gelten $\sum p_{\lambda\nu} \alpha_\nu = \sum q_{\lambda\mu} \beta_\mu$ für jedes λ . Dieses Kriterium umfaßt M. Dehns [Math. Ann. 55, 465—478 (1902)] notwendige Bedingungen. *Chr. Pauc.*

Conforto, Fabio: *Postulati della geometria euclidea e geometria non euclidea.* Repertorio Mat. 193—224 (1951).

Nach einer kurzen Inhaltsangabe der Elemente Euklids und einer Darstellung der Grundbegriffe und Axiome Euklids behandelt Verf. ausführlich die Geschichte des Parallelenproblems vom Altertum bis zum Beginn des vorigen Jahrhunderts. Darauf schildert er die Entstehung und Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie, den Nachweis ihrer Widerspruchsfreiheit, ihren Einfluß auf die erkenntnistheoretische Stellung der Mathematik, den Begriff der Wahrheit mathematischer Sätze und eines hypothetisch-deduktiven Systems, den modernen Aufbau der euklidischen Geometrie. Es folgt eine ausführliche Wiedergabe der Hilbertschen Postulate der euklidischen Geometrie und ein Vergleich mit den Postulaten von Peano, sowie eine kritische Betrachtung der Stetigkeitsaxiome von Eudoxos-Archimedes, Dedekind und Cantor. Den Schluß der Arbeit bildet eine kurze Bemerkung über die von der euklidischen Geometrie unabhängige Entwicklung der projektiven Geometrie durch von Staudt und die Möglichkeit, aus ihr die drei Formen der hyperbolischen und der elliptischen nichteuklidischen und der euklidischen Geometrie herzuleiten. *Max Zacharias.*

Saniclevici, S.: *La géométrie de Lobatchevsky déduite de l'expression de l'élément linéaire.* Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti. A 3, 1—35, russische und französ. Zusammenfassgn. 36—37, 37—39 (1951) [Rumänisch].

Das Ziel der Arbeit ist eine analytische Darstellung der hyperbolischen nicht-euklidischen Geometrie, die nur von einigen Begriffen der klassischen Differentialgeometrie Gebrauch macht. Sie geht aus von dem Lobatschewskischen Ausdruck des Linienelements $ds^2 = Ch^2 y dx^2 + dy^2$ und findet von ihm aus die Gleichung einer geodätischen Linie, d. h. Geraden der Ebene $Th y = A Ch x + B Sh x$, mit deren Hilfe die Trigonometrie aufgebaut wird. Aus ihr ergibt sich ferner die Definition des Parallelismus und die Beziehung zwischen Parallelwinkel und Parallelstanz. Es folgen weiter die Sätze von der Winkelsumme und dem Flächeninhalt des Dreiecks. Darauf folgt die analytische Behandlung des Kreises, des Grenzkreises („Horizykel“) und der Abstandslinie („Hyperzykel“) sowie der Kegelschnitte. Ausgehend vom räumlichen Linienelement wird die analytische Geometrie der Ebenen und Kugeln entwickelt. Die Form des Linienelements der Grenzkugel (Horisphäre) zeigt, daß auf ihr die euklidische Geometrie gilt. *Max Zacharias.*

Lombardo-Radice, Lucio: *Assiomi algebrici e postulati geometrici.* Archimede 3, 177—188 (1951).

Die bekannten Arbeiten über ebene projektive Konfigurationen von G. Hessenberg und R. Moufang sind von M. Hall [Trans. Amer. math. Soc. 54, 229—277 (1943)] weitergeführt worden. An die Arbeit von Hall hat B. I. Argunov (dies. Zbl. 39, 369) angeknüpft und die algebraische Bedeutung der verschiedenen einfachen Schließungssätze der projektiven Ebene eingehend untersucht. — Verf. gibt eine leicht lesbare für einen allgemeinen Leserkreis bestimmte Zusammenfassung der Arbeiten von Hall und Argunov. *J. C. H. Gerretsen.*

Hoffman, Alan J.: *On the foundations of inversion geometry.* Trans. Amer. math. Soc. 71, 218—242 (1951).

Unter einer 3-dimensionalen Inversionsgeometrie (3-dim. Inv.-Geom.) über einem angeordneten Quadratwurzelkörper V (jedes positive Element ist Quadrat) wird der teilweise geordnete Bereich H von Punkten, Kreisen, Kugeln und Inversionsraum verstanden mit den Eigenschaften: (1) Ist p ein Punkt, so bilden die Punkte $\neq p$, die Kreise und die Kugeln, die p enthalten, und der Inversionsraum eine 3-dim. affine Geometrie über V , wobei die genannten Elemente bzw. den „Punkten“, „Geraden“, „Ebenen“ und dem „Raum“ der affinen Geometrie entsprechen.

(2) Diese 3-dim. affine Geometrie läßt sich so als 3-dim. euklidische Geometrie über V auffassen, daß ihren „Kreisen“ und „Kugeln“ die Kreise und Kugeln in Π entsprechen, die nicht p enthalten. — Verf. stellt sich die Aufgabe, diesen Bereich Π axiomatisch zu charakterisieren. Während axiomatische Untersuchungen über die ebene Inversionsgeometrie schon verschiedentlich durchgeführt sind (vgl. insbesondere B. L. v. d. Waerden und L. J. Smid, dies. Zbl. 10, 268; hier wird ein beliebiger Körper, in dem es ein Nichtquadrat gibt, zugrunde gelegt), stellt für die räumliche Inv.-Geom. die vorliegende Arbeit den ersten erfolgreichen Versuch dar, über den Körper der reellen Zahlen hinauszugehen. — Axiome: (I) Π ist eine Menge, in der die zweigliedrige Relation \leq erklärt ist. p heißt Punkt, wenn aus $x \leq p$ folgt $x = p$. (II) Wenn $a \in \Pi$, dann gibt es einen Punkt $p \in \Pi$, so daß $p \leq a$. (III) Aus $p \leq a$, $a \leq b$ folgt $p \leq b$. (IV) Wenn $p \in \Pi$, dann bildet folgende Teilmenge von Π unter der Relation \leq eine 3-dim. affine Geometrie: Alle Punkte $\neq p$ und alle Elemente a mit $p \leq a$, $p \neq a$. — Aus diesen Axiomen folgt schon, daß es unendlich viele Punkte in Π gibt. Sodann wird die Existenz von involutorischen 1-1-Abbildungen τ der Punkte von Π auf sich nachgewiesen (das Symbol $[]$ bedeute, daß die darin enthaltenen Punkte auf einem Kreis liegen, bzw. bedeute den von den darin enthaltenen Punkten erzeugten Kreis): Dazu gebe man sich beliebig vier verschiedene Punkte p_1, q_1, p_2, q_2 mit $[p_1 q_1 p_2 q_2]$ vor. Dann setze man $\tau p_1 = q_1, \tau q_1 = p_1, \tau p_2 = q_2, \tau q_2 = p_2$. Wenn $p \leq [p_1 q_1 p_2 q_2]$, dann sei τp bestimmt durch $\tau p \leq [p p_1 q_1] \cap [p p_2 q_2]$, $\tau p \neq p$. Wenn $p \leq [p_1 q_1 p_2 q_2]$ und $p \neq p_1, q_1, p_2, q_2$, dann wähle man die Hilfspunkte $q, r \leq [p_1 q_1 p_2 q_2]$; hiermit sei τp bestimmt durch $\tau p \leq [p q \tau q] \cap [p r \tau r]$, $\tau p \neq p$; (es gilt $\tau p \leq [p_1 q_1 p_2 q_2]$ und es ist τp unabhängig von der Wahl von q und r). — Gehen bei τ die Punkte eines Kreises a bzw. einer Kugel k in sich über, so heißen a bzw. k anallagmatisch unter τ . Falls sich bei τ nicht je zwei Kreise, die unter τ anallagmatisch sind und auf einer Kugel liegen, schneiden, heißt τ Inversion. Die beiden letzten Axiome lauten dann: (V) Ist τ eine Inversion, so enthält jeder Kreis, der anallagmatisch unter τ ist, wenigstens einen Fixpunkt. (VI) Wenn τ eine Inversion ist und $[p_1 p_2 p_3 p_4]$ gilt, so gilt auch $[\tau p_1 \tau p_2 \tau p_3 \tau p_4]$. — Axiom (V) stellt das einzige Anordnungsaxiom dar; es gestattet, das Innere und Äußere eines Kreises bzw. einer Kugel zu unterscheiden. Verf. zeigt sodann in seiner eleganten und knizosen Untersuchung, daß für jede Inversion τ die Fixpunkte auf einer Kugel k liegen und daß alle Kugeln k' (alle Kreise a') anallagmatisch unter τ , die Fixpunktkugel k in einem Fixkreis (zwei Fixpunkten) schneiden. Zu jeder Kugel k gibt es eine Inversion, die k als Fixkugel besitzt. Nennt man k und k' orthogonal, $k \perp k'$, wenn sie in der genannten Beziehung stehen, so gilt auch $k' \perp k$. Ebenso gilt: Ist $a, a' \leq k$ und a Fixkreis unter τ und a' anallagmatisch unter τ , und nennt man dann a orthogonal zu $a', a \perp a'$, dann gilt auch $a' \perp a$. — Sodann wird gezeigt, wie sich auf der unter (IV) beschriebenen Teilmenge von Π Koordinaten einführen lassen, die einem angeordneten Quadratwurzelkörper angehören. Mit dem Nachweis, daß die nicht zu dieser Teilmenge gehörenden Kreise und Kugeln auf die unter (2) angegebene Weise repräsentiert werden können, ist gezeigt, daß aus dem Axiomensystem der Begriff der 3-dim. Inversionsgeometrie folgt. Die Umkehrung ist evident. Damit charakterisieren also die Axiome (I) bis (VI) den angegebenen Begriff von 3-dim. Inversionsgeometrie.

Wilhelm Klingenberg.

Elementargeometrie:

Campe-delli, Luigi: I metodi sintetici per la risoluzione dei problemi di geometria piana. Repertorio Mat. 261—273 (1951).

L'A. donne un aperçu des diverses méthodes que l'on peut employer pour résoudre un problème de géométrie et signale la différence notable entre l'algèbre et la géométrie: la première fournit des règles générales, la seconde donne simplement le moyen d'inclure la recherche dans un certain groupe de propriétés déjà connues. L'A. essaie de séparer les problèmes de géométrie en un certain nombre de groupes, présentant dans chaque groupe une certaine uniformité de raisonnements et procédés. L'énoncé d'un problème peut être ainsi schématisé: étant donnée une figure F_0 et un certain nombre d'instruments supposés idéalement parfaits (règles, compas, mécanismes susceptibles de tracer certaines courbes. —), construire une figure F liée à F_0 d'après certaines relations. — La méthode d'analyse consiste à essayer de ramener le problème à un problème déjà résolu; la synthèse consiste à indiquer ensuite les constructions précises qui, partant de F_0 , conduisent à la figure cherchée F . — Comme méthodes diverses, l'A. cite a) La méthode des lieux géométriques: un point sera déterminé par intersection de deux courbes: deux équations complétées éventuellement par un certain nombre d'inégalités; dualistiquement une droite inconnue sera définie comme tangente commune à deux courbes, b) la méthode des points unis, c) la méthode de fausse position, d) la méthode de transformation (en géométrie élémentaire: symétrie par rapport à un point, symétrie par rapport à un axe, homothétie, rotation, translation, similitude directe ou inverse, inversion, pour ne citer que les transformations les plus connues). — L'A. termine ensuite par un grand nombre d'exemples, choisis parmi les problèmes les plus simples.

B. Gambier.

• Lietzmann, W.: Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. 6. Aufl. (Math.-Phys. Bibl. 2/3.) Leipzig: Verlagsgesellschaft B. G. Teubner 1951.

Goormaghtigh, R.: Terminologie dans la géométrie du triangle et du tétraèdre. II. *Mathesis* 60, 263—274 (1951).

Thébault, Victor: On Feuerbach's theorem. *Amer. math. Monthly* 58, 620—622 (1951).

Verf. beweist folgenden Satz: Wenn die Entfernungen $O_2 O_3$, $O_3 O_1$, $O_1 O_2$ der Mittelpunkte dreier Kreise (O_1) , (O_2) , (O_3) mit den Radien R_1 , R_2 , R_3 einer Gleichung $(O_2 O_3) R_1 \pm (O_3 O_1) R_2 \pm (O_1 O_2) R_3 = 0$ genügen, so berührt der Umkreis (O) des Dreiecks $O_1 O_2 O_3$ den Potenzkreis (O') der Kreise (O_1) , (O_2) , (O_3) , und der Potenzpunkt O' ist Mittelpunkt eines der Berührungskreise des Dreiecks, dessen Seiten auf den Potenzgeraden (oder Chordalen) der Kreispaaire (O, O_1) , (O, O_2) , (O, O_3) liegen. Als Sonderfall ergibt sich der Feuerbachsche Satz, daß der Neunpunktekreis eines Dreiecks den Inkreis und die Ankreise des Dreiecks berührt.

Max Zacharias.

Narayana Moorty, T.: Generalisation of Tucker's system of circles. *Math. Student* 19, 30—32 (1921).

Taylor [*Proc. London math. Soc.*, II. Ser. 15, 122—139 (1915)] hat Systeme von Kreisen in der Ebene eines Dreiecks ABC von folgender Art untersucht: Ein Dreieck $\alpha\beta\gamma$ sei ABC eingeschrieben. Der Umkreis von $\alpha\beta\gamma$ schneidet die Seiten von ABC in α' , β' , γ' . Bewegt sich $\alpha\beta\gamma$ derart, daß die Winkel α , β , γ konstant bleiben, so bleiben auch die Winkel α' , β' , γ' konstant. Verf. gibt verschiedene Kreissysteme dieser Art an und beweist insbesondere, daß das System der Tucker'schen Kreise als Sonderfall dazu gehört.

Max Zacharias.

Devidé, Vladimir: Verallgemeinerung zweier planimetrischer Theoreme auf den n -dimensionalen Raum. *Soc. Sci. natur. Croatica, Periodicum math.-phys. astron.*, II. Ser. 6, 145—151 und deutsche Zusammenfassung. 152—154 (1951) [Serbokroatisch].

Der erste planimetrische Satz lautet: Die Höhen eines Dreiecks ABC mögen die Gegenseiten in A' , B' , C' und den Umkreis in A'' , B'' , C'' treffen; dann ist $AA''/AA' + BB''/BB' + CC''/CC' = 4$. Seine Verallgemeinerung: Im n -dimensionalen Raum sei das Simplex $S_n = T_1 T_2 \cdots T_{n+1}$ gegeben. Die Senkrechte p_k von T_k auf die gegenüberliegende $(n-1)$ -dimensionale Hyperebene π_k treffe diese

in T'_k und die Umhypersphäre K_n von S_n in T''_k . Dann ist $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{T_k T''_k}{T_k T'_k} = 2n$. Der

zweite planimetrische Satz lautet: Ist r der Radius des Inkreises und sind r_1 , r_2 , r_3 die Radien der Ankreise eines Dreiecks, so ist $r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1} = r^{-1}$. Und die Verallgemeinerung: Sei r_n der Radius der Inhypersphäre des Simplexes S_n und seien

r_{nk} ($k = 1, 2, \dots, n+1$) die Anhypersphären, so ist $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{r_{nk}} = (n-1) \frac{1}{r_n}$.

Max Zacharias.

Cairns, S. S.: Peculiarities of polyhedra. *Amer. math. Monthly* 58, 684—689 (1951).

Zeckendorf, É.: Étude fibonaccienne. *Mathesis* 60, Suppl. 1—35 (1951).

Die Arbeit enthält metrische Angaben bezüglich der Schnitte eines 4-dimensionalen regulären Simplexes durch gewisse parallele Hyperebenen.

László Fejes Tóth.

Hadwiger, H.: Hillsche Hypertetraeder. *Gaz. Mat., Lisboa* 12, 47—48 (1951).

Es sei a_1, \dots, a_k ein System von k linear unabhängigen isogonalen Einheitsvektoren des k -dimensionalen Raumes. Das Simplex, dessen Punkte durch die in einem Punkt angreifenden Ortsvektoren $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ ($1 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$) gegeben sind, wird ein Hillsches Hypertetraeder genannt. Es hängt von einem Parameter, nämlich von dem gemeinsamen Winkel von je zwei Vektoren a_i ab. Es folgt aus bekannten Sätzen, daß für $k = 3$ die Hillschen Tetraeder mit einem

Würfel zerlegungsgleich sind. Es wird gezeigt, daß diese Behauptung für jede Dimensionszahl k gültig bleibt. *László Fejes Tóth.*

Verblunsky, S.: On the shortest path through a number of points. Proc. Amer. math. Soc. 2, 904—913 (1951).

Wir bezeichnen das Maximum der Länge des kürzesten Streckenzuges, der n Punkte eines Einheitsquadrats verbindet, mit L_n . Es wird gezeigt, daß $L_n < 2 + \sqrt{2,8n}$ ausfällt. Diese Abschätzung scheint ziemlich grob zu sein; für große Werte von n ist vermutlich $L_n \sim \sqrt{2n/\sqrt{3}}$. *László Fejes Tóth.*

● **Lietzmann, W.: Altes und Neues vom Kreis.** 2. Aufl. (Math.-Phys. Bibl. 87.) Leipzig: Verlagsgesellschaft B. G. Teubner 1951.

Hagstroem, K.-G.: Über die Quasiellipse. Elementa 34, 87—90 (1951) [Schwedisch].

Es handelt sich um ein Problem der praktischen Geometrie. Die „Quasiellipse“ ist eine die Ellipse ersetzende Figur, die in jedem Quadranten aus zwei einander berührenden Kreisbogen besteht. Anwendung auf die Planetenbahnen und eine historisch-sprachliche Bemerkung bilden den Schluß der Arbeit. *Max Zacharias.*

● **Beutel, E.: Die Quadratur des Kreises.** 5. Aufl. (Math.-Phys. Bibl. I 12.) Leipzig: Verlagsgesellschaft B. G. Teubner 1951.

● **Zühlke, P.: Konstruktionen in begrenzter Ebene.** 3. Aufl. (Math.-Phys. Bibl. 11.) Leipzig: Verlagsgesellschaft B. G. Teubner 1951.

Obálath, Richard: Ein Beitrag zur Theorie der geometrischen Konstruktionen. Acta Sci. math. 14, 101—102 (1951).

Nach dem Poncelet-Steinerschen Satz lassen sich die quadratischen Aufgaben allein mit dem Lineal konstruieren, wenn ein Kreis mit seinem Mittelpunkt gezeichnet vorliegt. Mehrere Mathematiker haben bewiesen, daß statt des Kreises ein beliebiger Kreisbogen genügt, wenn auch der Mittelpunkt des Kreises gegeben ist. Verf. beweist, daß sich die quadratischen Aufgaben mit dem Lineal konstruieren lassen, wenn ein beliebiger Kreisbogen und seine beiden Drittelungspunkte gegeben sind, weil dann der Mittelpunkt des Kreises mit dem Lineal konstruierbar ist.

Gyula Sz.-Nagy.

Calapso, Renato: Problemi risolubili con riga e compasso e problemi classici. Repertorio Mat. 275—294 (1951).

Es handelt sich um eine Wiedergabe des 10. Kapitels des Buches „Corso di Matematiche complementari“ (Messina 1948). Im 1. Abschnitt werden die geometrischen Probleme besprochen, die mit dem Lineal allein und mit Lineal und Zirkel lösbar sind, wobei letzterer auch durch ein Lineal mit zwei parallelen Kanten ersetzbar ist. In einem 2. Abschnitt wird auf die Unlösbarkeit der drei klassischen Probleme: Kreisquadratur, Winkel-Dreiteilung und Würfel-Verdopplung näher eingegangen, ohne daß Beweise gegeben werden. Ein dritter Abschnitt referiert kurz über die Kreisteilung und die Konstruktion des regelmäßigen n -Ecks mit Lineal und Zirkel.

Roland W. Weitzenböck.

Kasner, Edward and Irene Harrison: The trisection of horn angles. Scripta math. 17, 231—235 (1951).

Ein Hornwinkel wird von zwei Kreisbogen K_1 und K_2 gebildet, die sich in ihrem gemeinsamen Endpunkt 0 berühren. Bezeichnet $k_i = 1/r_i$ die Krümmung von K_i ($i = 1, 2$), so ist $k_2 - k_1$ (> 0) ein Maß des Hornwinkels. Der von 0 ausgehende und dort K_1 und K_2 berührende Kreisbogen K_3 halbiert den Hornwinkel, wenn seine Krümmung $k_3 = (k_1 + k_2)/2$ ist. K_3 läßt sich mit Lineal und Zirkel konstruieren, weil sein Halbmesser der Gleichung $r_3 = (r_1 + r_2)/2$ ($r_1 + r_2$) genügt. Die Kreisbogen K_3 und K_4 teilen den Hornwinkel in drei gleiche Teile, wenn $k_3 - k_1 = k_4 - k_3 = k_2 - k_4$, also $k_3 = (2k_1 + k_2)/3$ und $k_4 = (k_1 + 2k_2)/3$ sind. Die

Trisektion eines Hornwinkels ist mit Lineal und Zirkel konstruierbar, weil r_3 und r_4 konstruierbar sind. Ebenso ist seine n -Teilung für jede ganze Zahl n konstruierbar. — Das projektive Maß des Hornwinkels von K_1 und K_2 ist k_2/k_1 . Der projektive Hornwinkel von K_1 und K_2 wird von K_3 halbiert bzw. von K_3 und K_4 in drei gleiche Teile geteilt, je nachdem $k_3 = \sqrt{k_1 k_2}$ bzw. $k_3 = \sqrt[3]{k_1^2 k_2}$ und $k_4 = \sqrt[3]{k_1 k_2^2}$ sind. Die projektive Halbierung jedes Hornwinkels ist also mit Lineal und Zirkel konstruierbar, seine Trisektion ist aber nicht konstruierbar. *Gyula Sz.-Nagy.*

Droussent, Lucien: Sur une cubique circulaire circonscrite à un triangle. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 227—236 (1951).

Der Ort eines Punkts in der Ebene eines Dreiecks ABC , dessen Fußpunkt-dreieck bezüglich ABC denselben Flächeninhalt hat wie das Fußpunktdreieck seines Winkelgegenpunktes, ist eine zirkuläre Kubik Γ von sechster Klasse, die dem Dreieck umbeschrieben ist. Auf Γ liegen die Brennpunkte der Inkegelschnitte von ABC , deren Fokalachsen der Lemoineschen Geraden parallel sind. Sie geht durch den Steinerschen Punkt, die beiden Brocardschen Punkte und die Mittelpunkte der vier Berührungskreise des Dreiecks. Verf. hat noch viele weitere Eigenschaften der Kurve gefunden, deren Anführung hier zu weit führen würde. *Max Zacharias.*

Tigano, Orazio: Osservazioni intorno alle podarie rispetto a curve piane algebriche. Matematiche 6, 51—55 (1951).

Soit C une courbe plane et C' le lieu de ses tangentes. Soit d'autre part K un cercle de centre O . La courbe C_1 podaire de O par rapport à C peut s'obtenir à partir de C' au moyen des deux transformations: polarité par rapport à K et inversion par rapport au même cercle. De ce fait l'A. tire des propriétés pour C_1 dans le cas où C est une courbe algébrique. *German Ancochea.*

• **Kells, Lyman M., Willis F. Kern and James R. Bland:** Plane and spherical trigonometry. 3rd ed. London: McGraw-Hill Publishing Co., Ltd. 1951. 470 p. 32 s 6 d.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

• **Morrill, W. K.:** Analytic geometry. Scranton: International Textbook Company 1951. XIV, 383 p. \$ 3,50.

Villa, Mario e Amedeo Agostini: Richiami di geometria analitica e di trigonometria. Repertorio Mat. 373—419 (1951).

Der erstgenannte Verf. behandelt die analytische Geometrie, der zweite die Trigonometrie. Im ersten Paragraphen der analytischen Geometrie werden die kartesischen Koordinaten des Punktes, die Geradenkoordinaten, die Polarkoordinaten, die Formeln für Entfernung, Winkel, Flächeninhalte, die Begriffe der Fernpunkte und der Ferngerade, der imaginären Punkte und Geraden, der Kreispunkte und isotropen Geraden, des Doppelverhältnisses, der harmonischen und äquianharmonischen Würfe und der projektiven Koordinaten der einstufigen Grundgebilde behandelt. Im zweiten Paragraphen werden die kartesischen Punktkoordinaten im Raum, Zylinder- und Polarkoordinaten, die Plückerschen Geradenkoordinaten definiert und die Gleichungen der Ebene und der Geraden, die Formeln für Entfernung, Winkel, Flächen- und Rauminhalte aufgestellt, die Definitionen und Formeln für die Fernelemente und den absoluten Kugelkreis des Raumes angegeben. — Der zweite Verf. behandelt in derselben Weise die Goniometrie und die ebene und sphärische Trigonometrie und schließt mit einem kurzen Hinweis auf die Ausdehnungen des Begriffs des sphärischen Dreiecks durch Möbius und Study. *Max Zacharias.*

Andersson, Josef: Eine Vorzeichenfrage. Elementa 31, 225—228 (1951) [Schwedisch].

Sind $f_i = a_i x + b_i y + c_i = 0$ die Gleichungen dreier Geraden, D die Determinante der Koeffizienten und C_i die zu c_i gehörigen algebraischen Komplemente, so hat f

im Innern des von den drei Geraden gebildeten Dreiecks das Vorzeichen von $C_i D$, wie fast ohne Rechnung gezeigt wird. Formeln für die Radien des In- und der Ankreise werden abgeleitet. Entsprechendes gilt im Raume. *Gustav Lochs.*

Checcucci, Vittorio: I gruppi abeliani di omografie dello spazio ordinario. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. 10, 229—264 (1951).

Classification des groupes abéliens d'homographies, non dégénérées, de l'espace ordinaire, projectivement distincts. L'A. utilise la méthode de M. Cherubino (ce Zbl. 41, 81) dans le cas des homographies planes. La caractérisation géométrique des groupes obtenus est basée sur la considération des gerbes et des espaces fondamentaux des homographies du groupe. *Lucien Godeaux.*

Godeaux, Lucien: Remarque sur les tétraèdres de Moebius. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 20, 14—15 (1951).

Auf analytischem Wege wird folgender Satz bewiesen: „Sind T_0 und T_1 zwei Möbius-Tetraeder, dann ordnet die Inverse der Kollineation, die T_0 nach T_1 bringt, T_0 ein Tetraeder T_{-1} zu, das mit T_0 wieder ein Möbiuspaar bildet. Die Tetraeder T_1 und T_{-1} sind polarreziprok bezüglich einer gewissen Quadrik, für die T_0 ein Poltetraeder ist“. — Hierzu ist zu bemerken, daß es nicht bloß die eine, vom Verf. betrachtete (analytisch spezielle) Kollineation $T_0 \rightarrow T_1$ gibt, sondern daß im ganzen ∞^3 solcher Kollineationen existieren. In dem Satz wäre somit beim Wort „Kollineation“ der bestimmte Artikel durch den unbestimmten zu ersetzen. — Vgl. hierzu auch die an die vorliegende Note anknüpfende Untersuchung von J. Bilo (dies. Zbl. 43, 357). *W. Wunderlich.*

Gopalswamy, R.: The axes of a conic. *Math. Student* 19, 69—70 (1951).

E. G.-Rodeja, F.: Symbolische Ausdrücke für die Gleichungen der Parabeln, die durch vier Punkte gehen. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 11, 257—265 (1951) [Spanisch].

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 34, 385) hatte Verf. den Flächeninhalt A einer durch 5 Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 bestimmten Ellipse mit Hilfe der Flächeninhalte der 10 Dreiecke ausgedrückt, die jene 5 Punkte zu Ecken haben. In dieser Formel kommen nur die Symbole (ijk) vor, die die Flächeninhalte der Dreiecke $P_i P_j P_k$ bedeuten. Liegen die Punkte P_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) auf einer Parabel, so wird A unendlich groß; die Bedingung dafür ist eine gewisse Beziehung zwischen jenen 10 Symbolen. Betrachtet man nun P_5 als laufenden Punkt, so stellt diese Beziehung eine Kurve vierter Ordnung dar. Diese zerfällt in zwei Parabeln, welche durch die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 gehen. Verf. führt die Zerlegung der Gleichung durch und erhält Ausdrücke für die Gleichungen der beiden Parabeln in den Symbolen für die Flächeninhalte der Dreiecke, die die vier festen Punkte untereinander und mit dem laufenden Punkt P_5 bilden. Beiläufig wird im Laufe der Untersuchung auf einfache Weise ein neuer und origineller Beweis für den bekannten Satz des Ptolemäus über die Seiten und Diagonalen des Sehnenvierecks gewonnen. *Eugen Löffler.*

Terracini, Alessandro: Su certe particolarità proiettive di una coppia di coniche. *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* 10, 259—284 (1951).

Soient deux coniques S, Σ ayant 4 points communs distincts; A et B étant deux points de S , les tangentes à Σ issues de A ou B recoupent S en A_1, A_2 ou B_1, B_2 ; il existe une conique bitangente à Σ , issue de A_1, A_2, B_1, B_2 , et une seule si S, Σ n'admettent pas de quadrilatères de Poncelet, inscrits dans S , circonscrits à Σ ; il y en a deux dans le cas où ces quadrilatères existent. Nous excluons d'abord le cas des quadrilatères de Poncelet. Appelons P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) les points (S, Σ) , P'_i la nouvelle intersection de S avec la tangente t_i à Σ en P_i , t'_i la tangente en P'_i à S , t''_i la nouvelle tangente à Σ issue de P'_i ; prenons B coïncidant avec P_i et A quelconque sur S ; il existe une conique γ_i bitangente à Σ , tangente à S en P'_i et passant par A_1, A_2 ; γ_i recoupe t_i en G_i . Les quatre points G_i sont alignés, quel que soit A sur S dans les deux seuls cas suivants: a) il existe ∞^1 triangles inscrits dans S , conjugués à Σ ; b) il existe ∞^1 triangles de Poncelet inscrits dans S , circonscrits à Σ ; dans ce dernier cas, moins intéressant que le précédent, γ_i est décomposée en t'_i et la droite $A_1 A_2$ et c'est cette droite $A_1 A_2$ qui porte les 4 G_i . — Supposons

maintenant que $\Delta^3 - \Theta \Delta^2 + \Theta' \Delta - \Delta' = 0$ étant la condition exprimant que $\lambda S - \Sigma = 0$ est réduite à deux droites, nous prenons encore B coïncidant successivement avec chaque P_i , mais que nous prenons A , non plus quelconque sur S , mais coïncidant avec l'un des 4 points P' , soit P'_4 pour fixer les idées; appelons t'_4 la tangente, autre que t_4 , issue de P'_4 à Σ ; la conique γ_4 est formée des deux droites t_4, t'_4 et par suite G_4 est indéterminé sur t_4 ; on constate alors que les points G_1, G_2, G_3 , définis comme plus haut pour ce choix de A en P_i , sont alignés dans le cas et le cas seulement où l'on a $U \equiv \Theta^3 - 4 \Theta \Theta' \Delta' + 12 \Delta \Delta'^2 = 0$. En vertu des homographies qui laissent S, Σ inchangées chacune dans son ensemble mais échangent P_i en P_j, P_k en P_l ($i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$) il est clair que le choix particulier de l'indice i est indifférent. La propriété en jeu est évidemment projective. — Soit maintenant le cas des quadrilatères de Poncelet inscrits dans S , circonscrits à Σ ; il est bien connu que ce cas est caractérisé par la propriété suivante: un choix convenable de notations étant fait, les tangentes à Σ en P_1, P_2 concourent sur S en un point qui, avec les notations précédentes, sera appelé $P'_1 = P'_2$ et alors les tangentes en P_3, P_4 à Σ concourent également en $P'_3 = P'_4$ sur S . Dans ce cas, prenant successivement B en P_1, P_2, P_3, P_4 , mais A en P_1 , on voit que l'on peut prendre comme conique γ_1 ou γ_2 la droite t'_1 comptée deux fois et comme conique γ_3 ou γ_4 la droite $P'_1 P'_3$ comptée deux fois; de la sorte deux points G coïncident avec P'_1 et deux avec P'_3 , de sorte que l'on peut dire encore que les 4 points G sont alignés. L'A. utilise pour les démonstrations soit une surface réglée rationnelle de degré 4 ayant une cubique gauche comme ligne double, soit des méthodes synthétiques de géométrie plane.

B. Gambier.

⁴ Lagrange, René: Métrique anallagmatique. Acta Math. 86, 259—295 (1951).

L'A. a montré (ce Zbl. 27, 83) comment on peut définir les distances anallagmatiques dans l'espace euclidien à 3 dimensions en les considérant comme les valeurs extrémales de certaines distances. Il étudie le même problème dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions. Les éléments fondamentaux de l'espace conforme à n dimensions sont les hypersphères H_{n-p} à $n - p$ dimensions ($p = 1, 2, \dots, n$); H_{n-1} sera appelée sphère, H_1 cercle, H_0 bipoint. La distance covariante d'un point à une hypersphère s'obtient à partir de la distance d'un point à une sphère. Les distances invariantes de deux hypersphères s'obtiennent à partir de la distance de deux sphères (et non plus de la distance d'un bipoint à une sphère): Toute H_{n-p} étant l'intersection de p sphères, les distances de deux hypersphères sont des valeurs extrémales de la distance de deux sphères passant respectivement par ces deux variétés. Il est commode de désigner une hypersphère α à $n - p$ dimensions par $(H_{n-p})\alpha$; si $(H_{n-p})\alpha$ et $(H_{n-p})\beta$, avec $p \leq q$, appartiennent à une même H_{n-r} , $0 \leq r \leq p$, on obtient en général $p - 2$ distances conformes. A toute H_{n-p} correspond une hypersphère focale à $n + 2 - p$ dimensions, définie par l'intersection des sphères orthogonales à la H_{n-p} ; les focales α', β' de α, β ont les mêmes distances conformes que α, β , tandis que les carrés des distances conformes de α à deux hypersphères focales β, β' sont, chacune à chacune, complémentaires à -1 . Si β est un bipoint, appartenant avec α à une même H_{n-p+1} , il n'y a plus qu'une distance focale (plus particulièrement, deux bipoints cocycliques). Cela conduit à chercher les valeurs extrémales des distances d'une $(H_{n-p})\alpha$ aux bipoints d'une $(H_{n-p})\beta$ qui appartiennent avec α à une même H_{n-p+1} . On peut aussi chercher les valeurs extrémales des distances conformes de deux bipoints cocycliques l'un pris sur α , l'autre sur β . Les couples de bipoints qui fournissent ces distances sont les intersections avec α et β des cercles orthogonaux à ces deux hypersphères, qu'on peut appeler „perpendiculaires communes“ ou „hauteurs“ et dont les bipoints d'intersection avec α et β sont les „pieds“. Tous ces résultats sont une généralisation simple de ceux obtenus pour les sphères et les cercles de l'espace ordinaire. B. Gambier.

Abhyankar, S. S.: A common omission in text-books on coordinate geometry. Math. Student 19, 61—64 (1951).

Wenn bei zwei Polynomen n -ten Grades $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ die Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ dieselben Punktmengen der (x, y) -Ebene darstellen, so folgt noch keineswegs $P = cQ$ (c constant), wie z. B. unmittelbar bei $P = x^2 y$, $Q = x y^2$ zu sehen. Verf. gibt für m Veränderliche die hinreichenden Bedingungen für $P = cQ$, wobei der Begriff einer „Nullstelle von P von der Ordnung r_i bez. x_i “ zugrunde gelegt wird.

Roland W. Weitzenböck.

Kippenhahn, Rudolf: Über den Wertevorrat einer Matrix. *Math. Nachr.* 6, 193—228 (1951).

Der Wertevorrat $W(A)$ der quadratischen Matrix $A = (a_{ik})$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) mit komplexen Elementen ist die Gesamtheit der komplexen Zahlen, welche von der Form $\sum_{i,k} a_{ik} x_i \bar{x}_k$ angenommen werden können, wenn die komplexen Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n der Nebenbedingung $\sum x_k \bar{x}_k = 1$ unterworfen werden. Nach Toeplitz und Hausdorff ist der Bereich $W(A)$ der komplexen Ebene konvex. Verf. untersucht die geometrischen Eigenschaften von $W(A)$. Zur Matrix A n -ten Grades gehört eine Kurve n -ter Klasse, die randerzeugende Kurve C , deren konvexe Hülle mit $W(A)$ übereinstimmt. Diese Kurve C hat in jeder Richtung ihrer Ebene n reelle Tangenten und besitzt keine Wendetangenten. Sie hat eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Rückkehrpunkten, je nachdem n eine gerade bzw. ungerade Zahl ist. Die reellen Brennpunkte der Kurve C sind die Eigenwerte der Matrix A . Für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ werden die möglichen Typen der Kurven C angegeben. Die Arbeit enthält auch Abschätzungen über Dicke, Durchmesser des konvexen Bereichs $W(A)$ und über die Länge seines Randes. — Der zweite Teil der Arbeit untersucht die Wertevorräte von Matrizen n -ten Grades, deren Elemente Quaternionen sind. Diese Wertevorräte lassen sich als konvexe Punktmengen in einem vierdimensionalen Vektorraum auffassen. — (Nach Ref. haben auch nicht-algebraische Kurven ohne Tangentensingularitäten ähnliche Eigenschaften wie C , dies. Zbl. 14, 326, 23, 173.) *Gyula Sz.-Nagy.*

Bagehi, Haridas and Biswarup Mukherji: Note on a circular cubic with a real coincidence point at infinity. *Bull. Calcutta math. Soc.* 43, 101—108 (1951).

Die Arbeit handelt im wesentlichen von zirkularen Kurven dritter Ordnung, deren reeller unendlich ferner Punkt ein „Koinzidenzpunkt“ ist (er hat die Eigenschaft, mit seinem dritten Tangentialpunkt zusammenzufallen); sie bringt aber auch einige Sätze über nicht-zirkuläre Kurven dritter Ordnung mit jener Eigenschaft. Die Ausführungen beziehen sich in der Hauptsache auf Kurven vom Geschlecht 1, ein Teil davon gilt, bei geeigneter Modifikation, auch für rationale Kurven. Das wichtigste Ergebnis ist der Satz: „Wenn eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung eine der folgenden fünf Eigenschaften hat 1. ihr reeller unendlich ferner Punkt ist ein Koinzidenzpunkt, 2. einer ihrer (16) Brennpunkte ist ein Koinzidenzpunkt, 3. einer ihrer Brennpunkte liegt auf der reellen Asymptote, 4. einer ihrer (4) Inversionsmittelpunkte ist ein Koinzidenzpunkt, 5. der Oskulationskreis in einem Mittelpunkt der Inversion geht durch einen Brennpunkt, dann besitzt sie alle diese Eigenschaften. Durch geeignete Wahl des Cartesischen Koordinatensystems kann ihre Gleichung stets auf die Form gebracht werden $x\{(x^2 + y^2) + \lambda(\mu^2 - 1)x - 2\lambda\mu y\} = k(x - \lambda)(y - \mu x)$, wo λ, μ, k Konstante sind“. Die Beweise werden teils geometrisch mit Hilfe des Restsatzes, teils analytisch unter Verwendung homogener und cartesischer Koordinaten geführt. *Eugen Löffler.*

Gericke, Helmuth: Bemerkung zu einer Arbeit von Kai Rander Buch: Ein elementares Verfolgungsproblem. *Mat. Tidsskr. B* 1951, 67—70 (1951).

Verf. löst die Aufgabe von Buch (dies. Zbl. 38, 304) mit elementarer Vektorrechnung und deutet die Lösung konstruktiv-geometrisch. Er gibt auch die Lage an, für die der minimale Abstand der beiden Schiffe erreicht wird und konstruiert die dafür erforderliche Zeit t_m . *Rudolf Ludwig.*

Algebraische Geometrie:

Severi, Francesco: I fondamenti remoti e prossimi della geometria algebrica. *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* 10, 67—95 (1951).

Dieser Vortrag beginnt mit einem ausgezeichneten Überblick über die Geschichte der algebraischen Geometrie seit 1800 bis in die neueste Zeit. Sodann wendet sich

Verf. der Diskussion der beiden grundlegenden Begriffe der „algebraischen Mannigfaltigkeit“ und der „Schnittmultiplizität“ zu, wobei im wesentlichen die bereits in anderen Arbeiten ausführlich dargestellten Entwicklungen wiederholt werden (dies. Zbl. 31, 261; 36, 372, 42, 153, 395; und eine im Erscheinen begriffene Arbeit: *Le diverse concezioni di varietà nella geometria algebrica*, Accad. Naz. dei XL). Im Zusammenhang mit dem Bézoutschen Satz bringt Verf. auf den letzten Seiten eine Auseinandersetzung mit den abweichenden Ansichten des Ref. bezüglich des Multiplizitätsbegriffes. Es darf bemerkt werden, daß in dem gegebenen Beispiel die beiden Gleichungen $x_2 x_3 = 0$, $x_3 x_1 = 0$ nicht nur die Ebene $x_3 = 0$, sondern auch die Gerade $x_1 = x_2 = 0$ als Nullstellengebilde besitzen, so daß die Multiplizität $\nu = 3$ auch geometrisch bestätigt wird.

Wolfgang Gröbner.

Brusotti, Luigi: *Questioni di realtà e modelli algebrici*. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 10, 139—153 (1951).

Verf. berichtet über die Realitätseigenschaften algebraischer Gebilde. Unter diesen sind der Anschaulichkeit wegen die gestaltlichen, d. h. die topologischen Eigenschaften am wichtigsten. In diesem Forschungsgebiet haben die italienischen Geometer und unter ihnen Verf. selbst in den vier letzten Jahrzehnten viel geleistet. Der gut gelungene Bericht beachtet auch die einschlägigen nicht italienischen Arbeiten gehörig. Besonders werden die gestaltlichen Eigenschaften algebraischer Raumkurven behandelt. Dabei werden die einfachsten Verknüpfungen und Verkettungen, sowie die Zöpfe von Artin besprochen. Der Bericht weist auf die Schwierigkeiten der Untersuchung der gestaltlichen Eigenschaften algebraischer Kurven hin. Für die Darstellung algebraischer Kurven mit gegebenen topologischen Eigenschaften gibt er eine Methode an, die Methode der kleinen Variation. Auch die Modelle der algebraischen Flächen und ihrer Kurven werden besprochen. Gyula Sz.-Nagy.

Villa, Mario: *Le trasformazioni puntuali*. Repertorio Mat. 225—260 (1951).

L. Berzolari hatte in seinem Artikel über algebraische Transformationen und Korrespondenzen in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III C 2 (1933) eine umfassende Darstellung des Gegenstandes bis zum Jahre 1932 gegeben. Seither sind die Punkttransformationen, namentlich in Italien, und besonders durch den Verf., vielfach weiter untersucht worden. In der vorliegenden Arbeit, die den Artikel VIII des „Repertorio di matematiche“ bildet, werden die Grundbegriffe und die charakteristischen Eigenschaften der verschiedenen Punkttransformationen zwischen (komplexen) Räumen von 1, 2 und 3 Dimensionen übersichtlich und unter einheitlichen Gesichtspunkten dargestellt. Dies geschieht in einer Form, die verhältnismäßig wenig Vorkenntnisse voraussetzt und die wesentlichen Ideen und Ergebnisse der Forschung hervortreten läßt. — In der Einleitung gibt der Verf. Definitionen einiger grundlegender geometrischer Begriffe. Der § 1 handelt von den Punkttransformationen zwischen zwei (komplexen) Geraden. Insbesondere werden die algebraischen Korrespondenzen und die Projektivitäten zwischen Geraden mit ihren verschiedenen Spezialfällen besprochen. Der § 2 ist den Punkttransformationen zwischen zwei (im allgemeinen komplexen) Ebenen gewidmet: rationale Transformationen, birationale oder Cremona-Transformationen mit ihren Spezialfällen, konforme Transformationen, Affinitäten und Ähnlichkeitstransformationen, Kongruenzen und Inversionen sowie Punkttransformationen der Elementargeometrie zwischen reellen euklidischen Ebenen. In § 3 werden die Punkttransformationen zwischen zwei (komplexen) dreidimensionalen Räumen unter denselben Gesichtspunkten behandelt. Den Abschluß bildet ein Ausblick auf die Transformationsgruppen, das Erlanger Programm und die Klassifizierung der verschiedenen Geometrien nach dem Gruppenbegriff. In jedem der drei Paragraphen finden sich Beispiele für das Studium der Umgebungen zweier in einer Korrespondenz einander entsprechender Punkte und der zugehörigen Approximationsprobleme. In den Fußnoten werden Hinweise auf die geschichtliche Entwicklung und auf die neuere (besonders italienische) Literatur gegeben. Der Zusammenhang mit den übrigen Artikeln des Repertoriums wird durch zahlreiche Verweisungen hergestellt.

Eugen Löffler.

Derwidié, L.: *Décomposition des transformations birationnelles en produits de transformations élémentaires*. Math. Ann. 124, 65—76 (1951). Rectification. Math. Ann. 124, 316 (1952).

L'A. appelle transformation élémentaire la transformation suivante: Soit V une variété algébrique irréductible à k dimensions et γ une variété tracée sur V et dépourvue de singularités. On considère le système linéaire $|W|$ de variétés à $k - 1$

dimensions tracées sur V et passant par γ sans avoir de contacts entre elles en un point de cette variété. On suppose en outre que les variétés W passant par un point de V , même infiniment voisin de γ , ne passent jamais en conséquence par un second point de V . En rapportant projectivement les W aux hyperplans d'un espace linéaire de même dimension que $|W|$, il correspond à V une variété V' . Cette correspondance est la transformation élémentaire. Le but de l'A. est de montrer qu'une transformation birationnelle entre deux variétés algébriques peut se décomposer en un produit d'un nombre fini de transformations élémentaires. Ces conclusions supposent que l'on peut, par une transformation birationnelle, transformer une variété algébrique en une variété privée de points multiples (cfr. Math. Ann. 124, 316).

Lucien Godeaux.

Godeaux, Lucien: Sur certaines transformations monoïdales et leur représentation. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 143—157 (1951).

La transformation $(T): \lambda x'_i = \omega_n(x_1, x_2, x_3)(x_4 \alpha_{m-1} + \alpha_m)$ $[i = 1, 2, 3]$ $\lambda x'_4 = x_4 \beta_{m+n-1} + \beta_{m+n}$, les ω étant des formes de degré n , les α et β des degrés indiqués, est birationnelle: on détermine facilement ses éléments fondamentaux: point O , $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, les μ points O_i intersections des bases du réseau de cônes $\sum \lambda_i \omega_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) avec la surface s , $x_4 \beta_{m+n-1} + \beta_{m+n} = 0$ et courbe Γ intersection de s avec $x_4 \alpha_{m+1} + \alpha_m = 0$; ceux de T^{-1} sont un point, une courbe et μ droites. Si la transformation T^{-1} associe à un plan p' une surface P , le système $\infty^p [p + P]$ définit une variété à trois dimensions représentant les couples de points homologues par T , variété d'ordre $3(m+n)(n+1)+2$, sur laquelle des systèmes homaloïdaux de surfaces correspondent à p et P . Au point O correspond une surface rationnelle G , à Γ une réglée H , aux μ autres points O_i des cônes G_i d'ordre s_i , si $s_i - 1$ est l'ordre de contact des P en O_i . Les images de p et P sont des surfaces f et F telles que $F \equiv (m+n)f - (m+n-1)G - H - \sum s_i G_i$. On déduit de l'étude des courbes communes aux f et F que $r \leq m+n+9$. — Dans le cas particulier où T a la forme $\lambda x'_i = x_i(x_4 \omega_{n-2} + \omega_{n-1})$, $x'_4 = x_4 \varphi_{n-1} + \varphi_n$, la variété est d'ordre $6n+2$, f et F sont d'ordre $3n+1$, les intersections (f, f) et (F, F) d'ordre $n+1$, (F, f) d'ordre $2n$, les G d'ordre $\mu-1$, H d'ordre $2(n^2-1)$. La V contient un réseau de surfaces rationnelles d'ordre $2n+2$ se coupant 2 à 2 selon des coniques, elles correspondent aux plans passant en O (ou en O') les coniques aux droites par O .

Bernard d'Orgeval.

Godeaux, Lucien: Remarques sur la représentation des transformations birationnelles planes. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 836—849 (1951).

A une transformation birationnelle entre 2 plans faisant correspondre aux droites a_1 de l'une des courbes A_2 d'ordre n de l'autre, on associe une surface F d'ordre $2n+2$ de l'espace S_{n+4} , dont chaque point est l'image d'un couple de points homologues; ses sections hyperplanes $|D|$ représentent les systèmes $|a_i + A_i|$; aux courbes a_i et A_i correspondent sur F des réseaux homaloïdaux et à leurs points-base des courbes rationnelles normales fondamentales pour ces réseaux. Si ces points sont en nombre q ordinaires à tangentes distinctes variables, le système adjoint $|D'|$ permet de substituer à F une surface F' d'ordre $2n-q-1$ de S_{n-2} sur laquelle les $|D|$ sont courbes canoniques normales d'ordre $2n-4$ sans points multiples, passant simplement aux points images des droites fondamentales des réseaux $|A_i^*|$. — Si $q \leq n+1$, les $|D''|$ existent, donc les $|2D' - D| = |D''|$. La surface F' étant rationnelle on peut en faire une représentation plane par des courbes G . Aux courbes C_1 et C_2 correspondent des $|G_1|$ et $|G_2|$ formant des réseaux homaloïdaux tels que $|G_1 + G_2| = |2G - G'|$. Ceci permet la détermination des transformations birationnelles dont on connaît le nombre q des points fondamentaux. On peut supposer $|G|$ avec points base ordinaires à tangentes variables; on forme immédiatement $|2G - G'|$ et on note que $|G_1|$ et $|G_2|$ ne peuvent avoir d'autres points-base que simples et distincts pour les deux réseaux. — L'A. traite le cas

$q = n + 1$ où les $|G|$ sont elliptiques donc les cas possibles bien connus; il détermine les systèmes correspondants. — Si $q = n$, les $|G|$ sont de genre 2, les cas traités sont ceux où $|G|$ est formé des quartiques $C_4(A^2, 5B)$ et $C_4(A^2, 4B)$ et des quintiques $C_5(A^3, B^2)$.
B. d'Orgeval.

Lorent, H.: Correspondances (1,4) entre points du plan ou de l'espace. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 379—389 (1951).

Zwei ganz elementare Korrespondenzen (1, 2), und nicht (1, 4), in der Ebene, in denen einem Punkte die zwei Schnittpunkte von zwei veränderlichen Kreisen entsprechen. Ausdehnung auf den Raum: einem Punkt entspricht der Schnittpunkt von zwei veränderlichen Kugeln. Weiter werden die zwei ursprünglichen Kreise durch zwei besondere veränderliche Kegelschnitte ersetzt.

Eugenio Togliatti.

Turri, Tullio: Sulle trasformazioni piane cicliche con sistemi invarianti di cubiche per 7 punti, di sestische doppiamente per 8. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 20, 155—170 (1951).

S. Kantor [Acta math. 19, 115—194 (1895)] a considéré les transformations birationnelles périodiques laissant invariants certains systèmes de courbes planes. L'A. reprend la question et montre que: Une transformation birationnelle cyclique, non homographique, laissant invariant le système des cubiques par sept points, est le produit d'une homographie cyclique non homologique de période 3, par l'involution de Geiser déterminée par ce système. — Une transformation birationnelle cyclique, non homographique, laissant invariant le système des sextiques ayant huit points doubles, est le produit d'une homographie cyclique non homologique de période 3 par l'involution de Bertini déterminée par ce système.

Lucien Godeaux.

Campedelli, Luigi: Le curve e le superficie. Repertorio Mat. 501—544 (1951)

Bon résumé de la théorie des courbes et surfaces algébriques. Points singuliers et contact des courbes planes, branches linéaires et superlinéaires, enveloppes, polarités, applications métriques, générations projectives, courbes rationnelles. Surfaces, quadriques, points et courbes multiples, enveloppes. Courbes gauches et surfaces réglées.

Lucien Godeaux.

Dantoni, Giovanni: Due dimostrazioni elementari dell'esistenza di modelli birazionali privi di punti multipli di una curva algebrica, con applicazioni alle superficie. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 5, 355—365 (1951).

Der Grundgedanke des ersten der zwei im Titel genannten Beweise ist die Betrachtung aller Kurven der Ordnung ν in einem Raume S_ρ von ρ Dimensionen, die mit einer gegebenen algebraischen Kurve birational äquivalent sind und die der Ungleichung $\nu \leq 2(\rho - 1)$ unterworfen sind. Die Existenz solcher Kurven ist leicht zu bestätigen; sie bilden eine gewisse Gesamtheit J . Besitzt eine Kurve C von J einen s -fachen Punkt P , mit $s \geq 2$, so gehört die Projektion von C von P aus auf eine Hyperebene ebenfalls der Klasse J an; es folgt daraus unmittelbar, daß diejenigen Kurven von J , die dem kleinsten Wert von ρ entsprechen, Singularitätenfrei sind. — Für die algebraischen Flächen kann man ähnlich eine Klasse J von Flächen betrachten, die einer gegebenen Fläche birational äquivalent sind und für welche die Ordnung ν und die Dimension ρ des Einbettungsraumes die Ungleichung $\nu \leq 3(\rho - 2)$ befriedigen. Das obige Schlußverfahren gelingt dann nur, wenn man $s \geq 3$ voraussetzt; so daß die Flächen von J , die dem kleinsten Wert von ρ entsprechen, noch Doppelpunkte, ohne höhere Singularitäten, aufweisen können. Es folgt, daß diejenigen Flächen von einem allgemeinen Schluß ausgeschlossen bleiben, die Involutionen 2. Ordnung enthalten. — Die Möglichkeit, eine gegebene Fläche F in eine Singularitätenfreie Fläche birational zu verwandeln, folgt mit den vom Verf. verfolgten Methoden auch in dem Falle, daß F einer Regelfläche birational äquivalent ist; oder in dem Fall, daß F einer Fläche der Ordnung ν eines Raumes S_ρ mit $\nu \leq 2(\rho - 2)$ äquivalent ist. — Der zweite Beweis betrachtet die Minimal-Ordnung $\bar{\nu}(\rho)$ aller Kurven, die mit einer gegebenen Kurve birational äquivalent sind und einem Raum S_ρ angehören. Bei veränderlichem ρ konstruiert man dann die Funktion $M(\rho) = \bar{\nu}(\rho) - \rho$; für sie hat man zunächst $M(\rho) \leq M(\rho + 1)$. Man beweist dann, daß $M(\rho)$ beschränkt ist. Der Maximalwert von $M(\rho)$ ist das Geschlecht p der betrachteten Kurven; und wenn $\rho > p$ und $M(\rho) = p$ ist, so sind die entsprechend ρ Kurven singularitätenfrei.

Eugenio Togliatti.

Lorent, H.: Transformation agnesienne de lignes et de surfaces. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 120—132 (1951).

Marchionna, Ermanno: Una nuova caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 11, 170—177 (1951).

Die Bedingungen dafür, daß eine gegebene ebene algebraische Kurve als Verzweigungskurve einer mehrfachen Ebene aufgefaßt werden kann, sind von B. Segre bestimmt worden, in dem einfachen Fall, daß die betrachtete mehrfache Ebene als allgemeine Projektion einer allgemeinen Fläche der Ordnung n erhalten ist [Accad. Italia, Mem. Cl. Sci. fis. mat. natur. 1, Mat. Nr. 4 (1930)]; B. Segre hat gefunden, daß die gegebene Kurve eine gewisse Anzahl von Knoten und Spitzen aufweisen muß, und daß außerdem noch zwei Bedingungen erfüllt sein müssen. Verf. betrachtet hier den allgemeineren Fall, daß die mehrfache Ebene als Projektion einer Fläche F^μ der Ordnung μ mit einem h -fachen Punkt O (und sonst ganz allgemein), vom Punkt O aus, erhalten sei. Es wird $\mu - h \geq 3$ vorausgesetzt. Die Verzweigungskurve φ_n hat dann die Ordnung $n = \mu(\mu - 1) - h(h + 1)$; sie besitzt: $\delta = \frac{1}{2}n[(\mu - 2)(\mu - 3) - h(h + 1)] - 2h(h + 1)(\mu - h - 3)$ Knoten und $k = \mu(\mu - 1)(\mu - 2) - h(h + 1)(h + 2)$ Spitzen; und es müssen noch folgende zwei Bedingungen erfüllt werden: es existiert für φ_n eine adjungierte Berührungskurve der Ordnung $l = (\mu - 1)(\mu - 2) - h(h + 1)$; es existiert auch für φ_n eine adjungierte Kurve der Ordnung $l + 1$, die die Berührungspunkte von φ_n mit der vorigen C^l enthält, ohne C^l selbst als Teil zu enthalten. Die Notwendigkeit aller dieser Bedingungen folgt leicht durch die Projektion der Fläche F^μ . Schwieriger ist es zu beweisen, daß die obigen Bedingungen auch hinreichend sind; der erste Schritt des Beweises läßt erkennen, daß φ_n als Projektion einer Raumkurve φ^* aufgefaßt werden kann, so daß φ^* einer wohlbestimmten Fläche $B^{\mu-1}$ und einer in einem ∞^4 Linearsystem veränderlichen Fläche A^μ angehört; der zweite Teil des Beweises, der eine Anwendung des räumlichen ($A f + B \varphi$)-Satzes ist und den neuesten Teil der Untersuchung bildet, zeigt, daß $B^{\mu-1}$ die erste Polare von O in bezug auf eine der ∞^4 Flächen A^μ ist; und das führt zum Schluß. *Eugenio Togliatti.*

Stubban, John Olav: Sur les systèmes linéaires réductibles de courbes algébriques planes. Mat. Tidsskr. B 1951, 52—55 (1951).

K. L. Sundet (ce Zbl. 33, 15) avait démontré que si, pour un système linéaire réductible S de genre et dimension virtuels $p \geq 0$ et $q \geq 0$, on a (*) $3p \leq 2 + q$, S contient une courbe fixe transformée cremonienne d'une droite. L'A. prouve que cette propriété continue à être valable quand on remplace (*) par $p \leq q$, cette inégalité étant la plus stricte possible. *Germán Ancochea.*

Lorent, H.: Sur les intersections d'une cubique plane de genre un avec une autre courbe. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 60—66 (1951).

En partant de la représentation paramétrique d'une cubique plane par les fonctions de Weierstrass, l'A. établit des relations entre les points d'intersection de cette cubique avec d'autres courbes. *Lucien Godeaux.*

Gallarati, Dionigi: Alcune questioni relative a particolari quartiche piane di genere uno. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 215—218 (1951).

L'A. ritrova — nel caso ellittico — alcune proprietà di certi tipi di quartiche piane, già segnalate dal censore (questo Zbl. 32, 301) e da M. Dedò (questo Zbl. 42, 152); tipica è la seguente: se una quartica piana ellittica ha un biflencodo e un altro punto doppio, P , a tangenti distinte, e una delle tangenti principali in P è inflessionale, allora lo è anche l'altra. — Mentre il censore e Dedò usano considerazioni di geometria piana, l'A. trova i suoi risultati considerando la quartica piana quale proiezione di una quartica sghemba ellittica (di prima specie). *Vittorio Dalla Volta.*

Nollet, Louis: Sur l'invariant de Zeuthen-Segre des surfaces algébriques. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 1044—1052 (1951).

On étudie la distribution des valeurs prises effectivement par l'invariant I de Zeuthen-Segre des surfaces algébriques, en considérant la série S comme extension naturelle de la série canonique d'une courbe algébrique. On prouve que cet invariant n'est jamais égal à 1.

Federico Gaeta.

Nollet, Louis: Sur un théorème de M. Severi. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 1053—1054 (1951).

D'après M. Severi [Commentarii math. Helvet. 4, 268—326 (1932)] le groupe jacobien $P = L = 0$ d'une intégrale $\int (P dz + L dy)$ de première espèce attachée à une surface algébrique F détermine l'intégrale (à une constante multiplicative et une autre additive près). La démonstration originale n'est pas complète dans le cas où le système canonique de F est composé avec un faisceau irrationnel. L'A. remarque comment on peut compléter cette démonstration dans ce cas.

Federico Gaeta.

Gallarati, Dionigi: Intorno a certe superficie algebriche aventi un elevato numero di punti singolari isolati. Atti Acad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 11, 344—347 (1951).

Die Bestimmung der höchstmöglichen Anzahl μ_n getrennter Doppelpunkte einer algebraischen Fläche der Ordnung n des dreidimensionalen Raumes ist eine sehr schwierige Aufgabe, die schon oft betrachtet worden ist. Hier beweist Verf. durch geeignete Beispiele folgende Ungleichheiten:

$$(1) \quad \begin{aligned} \mu_n &\geq \frac{1}{4}(n+1)(n-1)^2 \quad (n \text{ ungerade}); \\ \mu_n &\geq \frac{1}{4}(n+1)(n^2-4)+1 \quad (n \text{ gerade}). \end{aligned}$$

Die Beispiele werden von den Flächen F^{2m+i} mit der Gleichung: $x_0^{2m}\alpha + 2x_0^m\beta + \gamma = 0$ geliefert, wo α, β, γ homogene Polynome mit den Graden $i, m+i, 2m+i$ in x_1, x_2, x_3 sind. F^{2m+i} hat im Punkte $O(1, 0, \dots, 0)$ einen i -fachen Punkt. Jede doppelte Erzeugende des Kegels $\varphi = \alpha\gamma - \beta^2 = 0$, die nicht auf $\beta = 0$ liegt, enthält m Doppelpunkte von F^{2m+i} ; und umgekehrt, enthält F^{2m+i} einen Doppelpunkt A , der auf $\beta = 0$ und auf $x_0 = 0$ nicht liegt, so ist die Gerade OA eine Doppelerzeugende des Kegels $\varphi = 0$. — Ist jetzt $i = 1$, oder $i = 2$, und wählt man für α, β, γ geeignete Polynome, so erhält man die gewünschten Flächen: eine F^{2m+1} mit wenigstens $2m^2(m+1)$ Doppelpunkten, und eine F^{2m+2} mit wenigstens $m(m+2)(2m+3)+1$ Doppelpunkten; und das liefert die Ungleichungen (1). — Für $i = 3$ und geeignete α, β, γ , findet man eine F^{2m+3} mit einem dreifachen Punkt und $2m(m+2)(m+3)$ Doppelpunkten.

Eugenio Togliatti.

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces algébriques d'ordre n dont les adjointes d'ordre $n-4$ possèdent une partie fixe. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 10, 45—56 (1951).

Soit F une surface algébrique d'ordre n , dont le système canonique complet est coupé par les surfaces d'ordre $n-m-4$; sa courbe double D d'ordre $mn/2$ contient t points triples P_i , par lesquels on admet le passage d'une surface G d'ordre $n-m$ ne contenant pas D , les adjointes ont une partie fixe sur H d'ordre m ; les surfaces du faisceau $GH + lF = 0$ touchent H le long de D , ont des points triples en P_i et des points doubles aux intersections de D et G . L'étude de la surface H montre que si n est pair, t multiple de 4, elle est l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface H' , involution possédant t points unis, dont on peut choisir le modèle projectif en sorte que l'involution y soit définie par une homographie harmonique. La construction de H exige de plus que les systèmes linéaires correspondants sur H' aux sections planes $|C|$ de H et à $|2C|, |3C|, \dots, |(n/2-4)C|$ aient mêmes dimensions sur ces surfaces et qu'il existe au moins ∞^{2t} surfaces passant par les points doubles de H , la touchant tout le long de l'intersection. Si de plus existe G passant par les t points doubles de H coupant D en un groupe de points doubles pour une surface d'ordre n touchant H le long de D , on

peut construire la surface F . — Application au cas $n = 10$, $m = 5$, $t = 20$, H est alors une surface du 5° ordre avec 20 points doubles, image d'une involution du deuxième ordre; H passe par dix des points doubles d'une surface de Kummer.

Bernard d'Orgeval.

Godeaux, Lucien: Sur la construction de surfaces irrégulières. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. 6, 277—280 (1951).

Une courbe L de genre p non hyperelliptique possédant une involution cyclique γ d'ordre $n = 2c + 1$, de genre $p' > 0$, sur la surface F image des couples non ordonnés de L existe une involution 1, dont l'image est une surface Φ . Si L est canonique dans S_{p-1} , F est d'ordre $(p-1)(4p-9)$ de S_d [$d = \frac{1}{2}p(p-1) - 1$] sur laquelle I est définie par une homographie de période n dont on peut déterminer les espaces unis, donc la structure des points unis de F . Si L' est l'image de γ , F' l'image de ses couples non ordonnés, F' et Φ sont en correspondance $(1, p)$; la considération des courbes canoniques permet le calcul du genre géométrique $p_g = \frac{1}{2}p'(p'-1) + (s_1+1)(s_{n-1}+1) + \dots + (s_c+1)(s_{c+1}+1)$ les s étant les dimensions des espaces unis. Pour trouver l'irrégularité il est nécessaire de résoudre le problème de la structure des points unis.

Bernard d'Orgeval.

Nollet, Louis: Sur les surfaces algébriques irrégulières douées d'un faisceau de courbes de genre 2. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. 37, 873—878 (1951).

It is proved that the considered surfaces are birationally equivalent to ruled surfaces of genus 1 or 2.

Germán Ancochea.

Godeaux, Lucien: Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques. I, II, III. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. 37, 819—825, 826—835, 938—949 (1951).

Les surfaces: $a_1 x_1^n x_2 + a_2 x_2^n x_3 + a_3 x_3^n x_1 + a_4 x_4^{n+1} = 0$ conservées par les homographies $\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & e x_2 & e^q x_3 & e^r x_4 \end{Bmatrix}$ avec $e^p = 1$, $p = (n-1)^2 + n$, $q = (n-1)^2 + 1$, $r(n+1) \equiv 1 \pmod{p}$ possèdent une involution ayant trois points unis dont la structure est la même. La recherche de cette structure par les procédés développés par l'A. dans de nombreuses notes, permet de déterminer entièrement le système canonique de la surface image de l'involution. — Si $n = 6$, $p_a = p_g = 2$, $P_2 = 3$, $p^{(1)} = 1$, le système canonique est formé d'un faisceau de courbes elliptiques, défini par une courbe rationnelle comptée trois fois et par une courbe décomposée en trois courbes rationnelles. — Si $n = 7$, $p_a = p_g = 2$, $P_2 = 5$, $p^{(1)} = 3$, le système canonique est un faisceau possédant une composante fixe rationnelle C , non exceptionnelle, le faisceau peut se déterminer par C comptée quatre fois et par une courbe décomposée en C et trois autres courbes rationnelles distinctes. Un modèle projectif bicanonique du huitième ordre, est donné de cette surface. — Si $n = 9$, $p_a = p_g = 3$; $P_2 = 7$, $p^{(1)} = 4$; le système canonique contient trois composantes fixes rationnelles non exceptionnelles, de degré virtuel — 4, et chaque courbe est formée, outre ces courbes fixes, de deux courbes elliptiques variant dans un faisceau.

Bernard d'Orgeval.

Declaye, Gilberte: Sur les surfaces cubiques s'osculant le long d'une cubique gauche. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 20, 107—113 (1951).

La représentation d'une surface cubique F possédant trois points uniplanaires, par une involution cyclique du 3° ordre montre que sur F existent deux familles de cubiques gauches K_1 et K_2 le long de chacune desquelles existe une surface cubique osculant F , F_1 et F_2 possédant chacune trois points biplanaires sur la K correspondante. Il existe une transformation birationnelle involutive de l'espace changeant K_1 en K_2 et transformant F en une surface cubique F_3 , enveloppe des plans contenant les points biplanaires des F_1 et des F_2 .

Bernard d'Orgeval.

d'Orgeval, Bernard: A propos d'une surface du quatrième ordre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 437—438 (1951).

Démonstration de l'existence d'une surface du quatrième ordre ayant une droite double, deux points doubles coniques et deux points doubles biplanaires, déjà considérée par Manara (ce Zbl. 42, 152) qui en avait déduit l'existence d'une courbe plane du huitième ordre ayant deux points doubles et 14 cuspidés [cfr. Manara, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 675—676 (1951)]. *Lucien Godeaux.*

Adam, Denise: Sur deux surfaces du quatrième ordre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 39—47 (1951).

Si studiano alcune proprietà di una superficie del quart'ordine trasformata in sé stessa da un gruppo finito di omografie, nonché della superficie immagine dell'involuzione generata da esso. *Frederico Gaeta.*

Roth, Leonard: Algebraic threefolds. Rend. Mat. e Appl. V. Ser. 10, 297—346 (1951).

Eine zusammenfassende Darstellung des heutigen Standes der Theorie der algebraischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten vom algebraisch-geometrischen Standpunkte aus; einen Teil dieser Arbeit hat Verf. an der Universität Rom, im Jahre 1951, in zwei Vorträgen dargestellt. Diejenige Ergebnisse, die im Vergleich mit der Kurven- und Flächentheorie eine größere Neuheit aufweisen, werden ausführlicher vorgetragen; die anderen nur kurz zusammengefaßt. Wo es möglich war, hat Verf. auch die Ausdehnungen auf Mannigfaltigkeiten mit mehr als drei Dimensionen angegeben. — Im 1. Kap. die projektive Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten V_3 mit drei Dimensionen (normale Singularitäten, projektive Charaktere, adjungierte Hyperflächen, usw.). Im 2. Kap. die invariantive Theorie der linearen Flächensysteme auf V_3 , ihrer Charaktere, und der Operationen auf solchen Systemen, die auf die ersten Invarianten der V_3 führen. Im 3. Kap. die Theorie der Äquivalenzsysteme auf V_3 und insbesondere der invarianten und kovarianten Äquivalenzsysteme. Im 4. Kap. der Satz von Riemann-Roch und die Basistheorie. Im 5. und letzten Kap. eine Menge von Ergebnissen und Fragen über unirationale und birationale Mannigfaltigkeiten verschiedener Art (Mannigfaltigkeiten mit Linearsystemen rationaler Flächen; oder mit Systemen rationaler, oder elliptischer, oder hyperelliptischer Kurven; Mannigfaltigkeiten von G. Fano; usw.). Am Ende findet man eine reiche Bibliographie des Gegenstandes.

Eugenio Togliatti.

Semple, John G.: The variety whose points represent complete collineations of S_r on S'_r . Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 10, 201—208 (1951).

Eine wichtige Frage der algebraischen Geometrie, und insbesondere der abzählenden Geometrie, ist die Aufstellung eines singularitätenfreien Modells der geometrischen Gebilde einer gegebenen Klasse; bei der Konstruktion solcher Modelle bieten oft ernste Schwierigkeiten die ausgearteten Gebilde der gegebenen Klasse, deren Definition selbst nicht immer so auf der Hand liegt. Als Beispiele solcher Fragen seien die Modelle erwähnt: der Linienelemente 1. und 2. Ordnung in der Ebene, der vollständigen Kegelschnitte der Ebene, der vollständigen Quadriken des dreidimensionalen Raumes. Hier betrachtet Verf. die vollständigen Kollineationen zwischen zwei r -dimensionalen Räumen S_r und S'_r . Man erhält die übliche Abbildung einer Kollineation zwischen S_r und S'_r , indem man die einzelnen Elemente einer allgemeinen $(r+1)$ -reihigen Matrix $|a|$ als projektive homogene Koordinaten in einem Raume mit $r^2 + 2r$ Dimensionen annimmt. Die Abbildung ist singularitätenfrei, wenn man nur die Punktkollineationen betrachtet. Will man aber vollständige Kollineationen, d. h. zusammen mit den Punktkollineationen auch die damit verbundenen Geraden-, Ebenen-, . . . , S_k -Kollineationen betrachten, so können, falls die Punktkollineationen ausgeartet sind, Ausnahmen vorkommen; um diese zu beseitigen, ist es nötig, andere Abbildungen zur Verfügung zu haben. Ein solches Modell

kann folgendermaßen konstruiert werden: man bilde aus der Matrix $|a|$ alle möglichen Produkte aus r Unterdeterminanten der Ordnungen bzw. $1, 2, \dots, r$; das Linearsystem, das von allen solchen Produkten definiert wird, verwandelt den Raum S_{r+2r} in die gewünschte Mannigfaltigkeit, die die vollständigen Kollineationen eineindeutig abbildet. Das Verfahren und seine Einzelheiten werden hier kurz dargestellt, in der Erwartung einer längeren Veröffentlichung. Schließlich die Beispiele $r = 2$ und $r = 3$.
Eugenio Togliatti.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

● **Kočin, N. E.:** Vektorrechnung und Elemente der Tensorrechnung. 7. Aufl. Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der SSSR 1951. 426 S. R. 20,— [Russisch].

Das in erster Linie für Studierende der Universitäten und technischen Hochschulen bestimmte Lehrbuch ist eine Vorbereitung zum Studium der theoretischen Mechanik, Hydrodynamik, Elektrizitätstheorie und anderer Disziplinen in vektorieller Behandlung. — Der theoretische Lehrstoff wird an Hand zahlreicher Beispiele und Aufgaben geometrischen, elementar-mechanischen und physikalischen Charakters erläutert. Die beiden ersten Kapitel bringen als Grundlage des Lehrbuchs die Vektoralgebra und Vektoranalysis und behandeln u. a. die Differentiation eines Vektors, den Gradienten, das Potential, die Divergenz, den Hamiltonschen Operator, die Rotation und die Wechselfelder im kontinuierlichen Medium. Ihnen folgen: Kap. III: Affine und orthogonale Tensoren, und Kap. IV: Elemente der allgemeinen Theorie der Tensoren (Fundamentaltensor, Christoffelsche Symbole und ihre Eigenschaften, Riemann-Christoffelscher Tensor u. a. m.). *Leo Kaloujnine.*

Buzano, Piero e Cesare Rimini: Vettori. Repertorio Mat. 581—600 (1951).

Der Inhalt des Artikels ist ersichtlich aus den Überschriften der einzelnen Abschnitte: § 1. Fundamentale Begriffe und Operationen. 1. Definition des Vektors. 2. Lineare Kombinationen von Vektoren. 3. Skalares Produkt. 4. Vektorprodukt. 5. Gemischtes Produkt. 6. Doppeltes Vektorprodukt. 7. Polare und axiale Momente. § 2. Ableitungen, Differentiale und Integrale von Vektoren. 8. Ableitungen und Differentiale von Vektoren. 9. Skalare und Vektorfunktionen des Punktes. Gradient, Divergenz, Rotor. 10. Integrale. Satz von der Divergenz. Satz von Stokes. 11. Lamellare und solenoidale Vektorfelder. Satz von Clebsch.

Max Zacharias.

Hlavatý, Václav: Spinor space and line geometry. Canadian J. Math. 3, 442—459 (1951).

Let Q be a quadric in a three-dimensional projective space L_3 with homogeneous coordinates x^* . Using the Cartan-matrix $\Omega_b^a = x^* \alpha_{x^*}^a$ [E. Cartan, Leçons sur la théorie des spineurs I, II, Actual. Sci. industr. Nr. 643 et 701 (1938); this Zbl. 19, 363, 22, 171] the author studies the connection between L_3 and the projective spinor space S_3 . To every point in Q corresponds a spinor line. These lines together form a linear congruence K . Each point not in Q corresponds with two lines of a linear complex Γ , which contains K . Q as a three parameter set of lineal elements is also mapped in S_3 . The correspondance between lineal elements and spinors turns out to be a $(1 - 2)$ correspondance. Finally the group of the projective transformations in L_3 which leave each of both reguli of Q invariant is mapped in a group of linear transformations in S_3 ; the biaxial involution in S_3 with matrix Ω_b^a corresponds to a projective transformation in L_3 which leaves both Q and the point x^* invariant.

Johannes Haantjes.

Penzov, Ju. E.: Klassifikation differentialgeometrischer Objekte mit zwei Komponenten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 537—540 (1951) [Russisch].

Nach V. Vagner [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 46, Nr. 9 (1945)] geht

die Auffindung aller Typen differentialgeometrischer Objekte der Klasse v in x_n mit N Komponenten zurück auf die Auffindung aller $(N_{nv} - N)$ -parametrischen Untergruppen der einfach transitiven Lieschen Gruppe $\mathfrak{U}^{(nv)}$ mit $N_{nv} = n \binom{n+v}{n} - n$ Parametern. In dieser Arbeit gibt Verf. alle zweikomponentigen Objekte erster und zweiter Klasse in einer X_n ($n \geq 2$). Es zeigt sich, daß zweikomponentige Objekte zweiter Klasse in X_n ($n \geq 3$) nicht existieren; in X_2 gibt es drei Typen solcher Objekte. Zweikomponentige geometrische Objekte erster Klasse existieren nicht in einer X_n ($n \geq 4$). In einer X_3 gibt es zwei Typen, in einer X_2 vier Typen solcher Objekte. Die Transformationsformeln aller dieser Objekte werden angegeben.

Johannes Haantjes.

Liber, A. E.: Über die Komitanten differentialgeometrischer Objekte. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **80**, 529—532 (1951) [Russisch].

Es sei Ω ein geometrisches Objekt der Klasse v in X_n . Es wird gezeigt: Ist $p + q = v + 1$, so hat das Objekt Ω für $n > 1$ entweder einen Komitanten der Klasse p oder einen Komitanten der Klasse q . Auch gilt die Verallgemeinerung: Ist $v - 1 = \sum m_i (p_i - 1)$, so hat Ω für $n > 1$ einen Komitanten, dessen Klasse eine der Zahlen p_i ist. Existiert kein Komitante der Klasse p , so nennt man die Klasse p eine Lücke des Objektes. Es wird angegeben, wie ein Objekt mit einer maximal-möglichen Zahl von Lücken konstruiert werden kann. Die Beweisführung geschieht mittels der Lieschen Algebra, welche der differentialgeometrischen Gruppe $D^{(v,n)}$ entspricht.

Johannes Haantjes.

Suppes, Patrick: A set of independent axioms for extensive quantities. Portugaliae Math. **10**, 163—172 (1951).

L'A. présente un système d'axiomes pour les quantités extensives, considérées comme ensemble K , pourvu d'une relation d'ordre Q et d'une loi de composition. Des sept axiomes de base, il tire une relation d'équivalence C et la notion de grandeurs comme classes d'équivalence de K modulo C ; puis il démontre l'adéquation formelle du système à l'aide de deux métathéorèmes établissant: A) l'isomorphie des systèmes de grandeurs extensives avec un semi-groupe additif de nombres réels positifs, fermé par rapport à la différence de tout nombre et de tout nombre plus petit; B) la similitude (multiplication par un facteur constant) de deux semi-groupes additifs de nombres réels positifs, isomorphes à un même système de grandeurs extensives. — L'indépendance relative des axiomes et des notions primitives est établie par autant de modèles élémentaires. L'avantage d'un tel système d'axiomes, plus faible que celui de Hoelder, est sa non-catégoricité et la réduction de l'égalité à une relation d'ordre introduite axiomatiquement. Mais contrairement à toute réalisation empirique, il exigerait encore une infinité d'éléments dans K et un appareil de mesure de sensibilité parfaite.

Fiala.

Müller, Hans Robert: Zur Geometrie der dreigliedrigen Bewegungsvorgänge. Monatsh. Math. **55**, 330—339 (1951).

Für die infinitesimale Lageänderung δx eines im beweglichen System R' festen Punktes x findet Verf. $\delta x = \bar{\psi} + \psi \times x$, worin ψ und $\bar{\psi}$ zwei Vektoren sind, deren Komponenten Pfaffsche Formen in den Parametern u_1, u_2, u_3 des Bewegungsvorganges sind. Feste Wahl der u_i und der Verhältnisse der du_i entspricht einem Moment eines eingliedrigen Bewegungsvorganges; seine Momentanschraube ist durch $\psi, \bar{\psi}$ bestimmt. Läßt man die Verhältnisse der du_i variieren, so erhält man ein Bündel von Momentanschrauben. ψ allein bestimmt nur den Drehvorgang, $\bar{\psi}$ die Verschiebung. Ist der Drehvorgang wesentlich dreigliedrig, so daß die Komponenten ψ_i von ψ als lineare Ausdrücke in den du_i linear unabhängig sind, so kann man die Komponenten $\bar{\psi}_i$ von $\bar{\psi}$ linear aus den ψ_i zusammensetzen. Es zeigt sich, daß es ein „kanonisches“ Bezugssystem gibt, in dem $\bar{\psi}_i = c_i \psi_i$ gilt. Geometrisch gilt: Alle Punkte des beweglichen Raumes, die in einem Augenblick gleiche Volumelemente dV beschreiben, liegen auf einer Quadrik, deren Hauptachsen das kanonische System bilden. Insbesondere liegen alle Punkte, die im Augenblick nur eine Fläche beschreiben, auf so einer Quadrik. Diese ist Träger des Regulus aller Strahlen, deren Momente bezüglich aller Schrauben des oben erwähnten Bündels verschwinden. — Eine Ebene des beweglichen Systems durchläuft eine dreigliedrige Ebenenschar

mit einer Ebenendichte dE . Alle Ebenen von R' , die im Augenblick zum selben dE führen, stehen senkrecht auf den Erzeugenden eines Kegels zweiter Ordnung, dessen Achsen die des kanonischen Systems sind. Schließlich werden die Fälle behandelt, wo einige der c_i gleich sind oder verschwinden. Gustav Lochs.

Kurita, Minoru: On a certain motion in the Euclidean space. Tôhoku math. J., II. Ser. 2, 275—285 (1951).

Sind $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n$ die Ortsvektoren der Eckpunkte eines r -dimensionalen Simplex S_r in einem euklidischen R_n und ist

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=0}^r \lambda_i \mathfrak{x}_i, \quad \sum_{i=0}^r \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

der Ortsvektor eines beliebigen Punktes von S_r , dann gilt bei einer Bewegung von S_r im R_n für die Bogenlängen der Bahnkurven

$$(1) \quad L \leq \sum_{i=0}^r \lambda_i L_i.$$

Verf. untersucht die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß in (1) für alle inneren Punkte von S_r das Gleichheitszeichen gilt. Er findet, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn entweder die Bewegung eine Translation ist (Typus A) oder die Bahnkurven die orthogonalen Trajektorien einer einparametrischen Schar linearer r -dimensionaler Mannigfaltigkeiten T_r sind (Typus B bis E). — Typus B: Die T_r sind die r -dimensionalen Schmiegräume einer Kurve K . Typus C: Die T_r enthalten die $(r-1)$ -dimensionalen Schmiegräume von K und einen festen Punkt. Typus D: Die T_r enthalten die k -dimensionalen Schmiegräume von K und sind zu einem festen R_{r-k} parallel. Typus E: Die T_r enthalten die $(k-1)$ -dimensionalen Schmiegräume von K und einen festen R_{r-k} . R. Inzinger.

Horninger, H.: Über eine Evolventenschraubung (zylindrische Schrotung einer Ebene). Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 16, 257—277 und türkische Zusammenfassung. 255—257 (1951).

Es wird die Bewegung untersucht, die durch gleichförmige Schrotung einer Ebene an einem Drehzylinder Z zustande kommt. Ein allgemeiner Punkt bewegt sich auf einer Evolventenschraublinie, d. i. eine Kurve auf einer geraden, offenen Regelschraubfläche oder auf einem Drehhyperboloid, die im Normalriß auf die Ebene des Zylinderquerschnitts als allgemeine Kreisevolvente erscheint. Sie ist auch Durchdringungskurve zweier coaxialen Regelschraubflächen von verschiedenen Parametern. Ein Punkt der beweglichen Polfläche beschreibt eine Evolventenschraublinie, deren Normalriß eine gespitzte Kreisevolvente ist. Regeldreh- und Regelschraubflächen lassen sich durch Evolventenschraubung besonderer Geraden erzeugen. Diese Flächen und die von allgemeinen Geraden überstrichenen Regelflächen erweisen sich als Träger von je ∞^2 Evolventenschraublinien, sie lassen sich auf ∞^1 Arten durch Evolventenschraubung erzeugen. Eine Ebene umhüllt i. a. eine Schraubtorse. Diese kann durch ∞^2 Evolventenschraubungen als Hüllfläche einer Ebene und durch ∞^1 solche Bewegungen auch als Bahnfläche einer Geraden erzeugt werden. — Verf. weist darauf hin, daß die Evolventenschraubung ein Sonderfall der vom Ref. behandelten Helikoidenbewegung ist, die durch Zusammensetzung zweier gleichförmigen Schraubungen entsteht (dies. Zbl. 37, 323). Die Evolventenschraublinien sind identisch mit den Leitspiralen der allgemeinen Helikoidenbewegung. Fritz Hohenberg.

Strubecker, Karl: Elliptische Schraubungen und nichteuklidische Loxodromen. Mat. Tidsskr. B 1951, 71—76 (1951).

Im Anschluß an eine Bemerkung des Ref., derzufolge jede Kreiszykloide als nichteuklidische Traktrix einer Geraden im Rahmen einer Cayley-Kleinschen Metrik angesehen werden kann, die sich auf den Scheitelkreis der Zykloide als absolutes Gebilde stützt, hat F. Fabricius-Bjerre den dualen Satz bewiesen, wonach jede „Ährenkurve“ $r \cos p\varphi = a$ als nichteuklidische Loxodrome des

Radienbüschels aufzufassen ist, wenn der Scheitelkreis $r = a$ als Maßkegelschnitt genommen wird (dies. Zbl. 43, 147). Dieser Satz wird nunmehr durch räumliche, auf frühere Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 1, 289) zurückgehende Betrachtungen neu gewonnen, indem die Ahrenkurve als Normalriß einer elliptischen Schraublinie gedeutet wird. Diese verläuft auf einem einschaligen Drehhyperboloid, welches gegenüber der Schraubung invariante Cliffordsche Fläche darstellt, und bildet naturgemäß in jedem Punkte mit dem Meridian und den beiden Erzeugenden ein konstantes Doppelverhältnis, das bei der Normalprojektion auf die Kehlkreisebene erhalten bleibt. Auch die von F. Fabricius-Bjerre bestimmte Kurve 4. Ordnung, die von den Berührungspunkten der aus einem festen Punkt an eine um ihr Zentrum rotierende Ahrenkurve legbaren Tangenten erfüllt wird, läßt sich auf dem angegebenen Wege leicht finden. *W. Wunderlich.*

Bosanač, Eduard: Über den Beweglichkeitsgrad kinematischer Verbindungen. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 6, 57—63 und deutsche Zusammenfassung. 64 (1951) [Kroatisch].

Es wird zunächst die der Eulerschen Polyederrelation entsprechende Gleichung $s = i + p - 1$ hergeleitet, wo s die Anzahl der Verbindungen, p die Anzahl der Polygone und i die Anzahl der Knotenpunkte bedeuten. Sind s_u Verbindungen vorhanden, die entfernt werden müssen, um Kreuzungen zu vermeiden, so gilt $s - s_u = i + p - 1$. Bedeutet k den Beweglichkeitsgrad des Gelenknetzes, so wird nun gezeigt, daß die Kriterien $k = i - (p + s_u - 1)$, $k = s - 2(p + s_u - 1)$, $k = 3n - 2(i + Z)$, $k = (3n - s)/2 - Z$, $k = i - Z'/2$, $k = s - Z'$, $k = i + Z + 3p + 3 - s_u$ gelten. Unter Z ist dabei der Ausdruck $Z = z_3 + 2z_4 + 3z_5 + \dots + (f - 2)z_f$ zu verstehen, wo z_3, z_4 usw. die Anzahlen der Knotenpunkte sind, in denen 3, 4 usw. in sich starre Teile zusammentreffen, während $Z' = 2(p - 1)$ gesetzt ist. Alle diese Kriterien haben dieselbe Tragweite, nur muß beachtet werden, daß überflüssige Verbindungen stets wegzulassen sind. Das Wittenbauersche Kriterium und das Grüblersche Kriterium sind Spezialfälle dieser Beziehungen. (Autoreferat.)

Bottema, O.: On Grubler's formulae for mechanisms. Appl. sci. Research A 2, 162—164 (1951).

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Mishra, R. S.: A new expression for geodesic torsion. Math. Student 19, 57—58 (1951).

Manikarnikamma, S. N.: Note on the previous paper. Math. Student 19, 58—59 (1951).

Unter Verwendung tensorieller Methoden wird ein Ausdruck für die geodätische Torsion τ_g einer Flächenkurve abgeleitet, sowie $x_n^2 + \tau_g^2$ berechnet, wobei x_n die Normalkrümmung ist. In der anschließenden Note wird diese Invariante gedeutet und im wesentlichen ohne Hinweis auf die bekannten Ableitungsgleichungen der Streifentheorie und die Deutung ihrer Invarianten zurückgekommen. (Vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I., 4. Auflage. Springer 1945, S. 67 ff.)

Hans R. Müller.

Srinivasiengar, C. N.: A property of scrolls. Math. Student 19, 44—46 (1951).

Für Regelflächen berechnet Verf. einige Beziehungen zwischen der geodätischen Krümmung der Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden, der Windung der Asymptotenlinien und der Gaußschen Krümmung. *Helmuth Gericke.*

Hartman, Philip: On geodesic coordinates. Amer. J. Math. 73, 949—954 (1951).

The author considers the surface S of class C'' with the arc-length $ds^2 = h(v) \cdot (du^2 + dv^2)$ where $h(v)$ is defined (for small $|v|$) by $h(v) = 1 + |v|^\lambda$ ($2 < \lambda < 3$). At the point $(0, 0)$ there exists a system of geodesic polar coordinates (r, φ) defined by a transformation $u = u(r, \varphi)$, $v = v(r, \varphi)$ of class C' which is not of class C'' (the partial derivative $v_{\varphi\varphi}(r, 0)$ fails to exist for $r > 0$). This answers a question left open by the author in a previous paper [Amer. J. Math. 72, 723—730 (1951)]. Another property of the surface S is that at the point $(u, v) = (0, 0)$ there exists

one choice of geodesic parallel coordinates which is not of class C'' , while all other choices are of class C''' .
Luis A. Santaló.

Vincensini, Paul: Sur les réseaux et les congruences (ω). Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. diff., Louvain du 11 au 14 avril 1951, 71–89 (1951).

Verf. untersucht konjugierte Netze, deren Kurven sich unter konstantem Winkel ω schneiden (ω -Netze), sowie Strahlensysteme mit konstantem Winkel ω der Brennebenen (ω -Kongruenzen). Strahlensysteme, deren Torsen beide Brennflächen in ω -Netzen (mit gleichem ω) schneiden, sind Ribaucoursche Systeme: Ihre Bestimmung wird auf zwei partielle Differentialgleichungen vom Laplaceschen Typus zurückgeführt. — Bekanntlich läßt sich das sphärische Bild der Torsen auch deuten als sphärisches Bild der Asymptotenlinien einer Fläche S , der erzeugenden Fläche der Kongruenz. Auf der erzeugenden Fläche einer solchen R -Kongruenz liefern die Kurven konstanter Gaußscher Krümmung eine Schar von Krümmungslinien. — Nach allgemeineren Überlegungen über Voßsche Kurvennetze, über Kongruenzen mit ω -Netzen mit nicht konstantem ω und die sogenannten Guichard-sche Methode zeigt Verf., daß Ribaucoursche ω -Kongruenzen zu gewissen Kongruenzen mit ebenen Mittenflächen parallel sind. Dabei heißen zwei zugeordnete Kongruenzen parallel, wenn entsprechende Strahlen und Brennebenen einander parallel sind.
W. Haack — J. Nitsche.

Jonas, Hans: Klassen von viergliedrigen Zyklen Laplacescher Transformationen und Umhüllungsgebilde einer bewegten Dupinschen Zyklide. Math. Nachr. 5, 259–300 (1951).

Verf. bestimmt die viergliedrigen Laplaceschen Zyklen des euklidischen Raumes, die einer der beiden folgenden Bedingungen genügen: a) Eines der Netze des Zyklus soll orthogonal, also ein Krümmungsliniennetz sein, b) eines der vier Strahlensysteme soll ein Normalensystem sein. In beiden Fällen hat dann das gegenüberliegende Gebilde die gleiche Eigenschaft. — Die Untersuchung steht in engem Zusammenhang mit früheren Arbeiten des Verf. über die Verbiegung der Flächen II. Grades (dies. Zbl. 11, 418). Aus der Darstellung der Biegungsflächen des hyperbolischen Paraboloids ergibt sich ein Zyklus vom Typ a mit zwei gegenüberliegenden orthogonalen Netzen auf derselben Kugel, aus dem unmittelbar ein Zyklus vom Typ b gewonnen wird. — Allgemein gehören die Krümmungslinien einer H -Fläche, die Verf. (a. a. o.) im Zusammenhang mit der Verbiegung des orthogonalen Hyperboloids definierte, einem viergliedrigen Laplace-Zyklus an, der somit zum Typ a gehört. Mittels der adjungierten H -Fläche erhält Verf. die Zyklen b . — Aus den Zyklen b lassen sich die Zyklen a durch eine involutorische Transformation gewinnen, die jedem Zyklus einen zweiten zuordnet. — Schließlich erklärt Verf. eine verallgemeinerte H -Fläche, die im wesentlichen schon von Bianchi im Zusammenhang mit Ribaucourschen Transformationen herangezogen wurde. Einer verallgemeinerten H -Fläche werden durch geeignete Laplace-Prozesse vier neue solche Flächen mit Korrespondenz der Krümmungslinien zugeordnet.
W. Haack.

Jonas, Hans: Ein mit der Verbiegung des Rotationsparaboloids verknüpftes Stratifikationsproblem. Math. Nachr. 5, 39–68 (1951).

Im ersten Teil behandelt Verf. die Stratifizierbarkeit eines Paares von Geradenkongruenzen ($G^I G^{II}$), deren Strahlen reziproke Polaren bezüglich der reellen oder imaginären Einheitskugel um O sind. Das Linienelement der Bildkugel der gemeinsamen Lote von ($G^I G^{II}$) hat im I. Fall die charakteristische Form des sphärischen Bildes einer Weingartenschen Fläche, deren einer Evolutenmantel auf das Rotationsparaboloid abwickelbar ist. Der II. Fall führt auf das System geodätischer Ellipsen und Hyperbeln der Bildkugel. Im ersten Falle ist unter den Flächen, die sich durch die Stratifizierbarkeit ergeben, zweimal die Kugel selbst enthalten. Sie wird dadurch wegen der Invarianz der Asymptotenlinien konform auf sich abgebildet, wodurch sich die gemeinsamen (konjugiert komplexen) Asymptotenlinienparameter der durch die Stratifizierbarkeit erzeugten zwei Flächenscharen einführen lassen. Die zwei Kugeln sind die sphärischen Bilder zweier Minimalflächen, die mit den Biegungsflächen in Zusammenhang stehen. Im weiteren Verlauf wird durch Einführung von Strahlenkoordinaten für die Kongruenzen eine Darstellung der vier Brennmäntel gegeben. Sie bilden einen viergliedrigen Laplace-Zyklus. Das zweite Paar der

berührenden W -Kongruenzen ist wieder stratifizierbar, alle vier Kongruenzen sind R -Systeme. Gleichzeitig lassen sich jedem Paar von Gegenseiten wegen der Stratifizierbarkeit viergliedrige W -Zyklen einbeschreiben. Sind die zwei neuen Gegenseiten polarreziprok, so erhält man Systeme, die dem ursprünglichen gleichartig sind.
W. Haack — J. Nitsche.

Saban, Giacomo: *Sulle congruenze di Guichard.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 3—8 (1951).

In Torsenparametern hat das duale Linienelement eines Strahlensystems die Form

$$dS^2 = e du^2 + 2(f + \varepsilon \bar{f}) du dv + g dv^2 \quad (\varepsilon^2 = 0).$$

Ist jetzt e nur von u , g nur von v abhängig, so kann durch eine geeignete Transformation $e = g = 1$ erreicht werden und dS^2 ist eine duale Erweiterung der Form von Tschebyscheff. Dann ist das System ein Guichardsches Strahlensystem. Der Realteil des Linienelementes entspricht dem sphärischen Bild einer auf Asymptotenlinienparameter bezogenen pseudosphärischen Fläche (Bianchi-Lukat, Differentialgeometrie, 2. Aufl. Leipzig 1910, Seite 290). *W. Haack — J. Nitsche.*

Dubnov, Ja. S.: *Die Geradenkongruenz eines affinen Gradienten.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 349—352 (1951) [Russisch].

Auf einer Fläche (M) sei eine Ortsfunktion $\varphi(u, v)$ gegeben. In der metrischen Geometrie gibt es zu φ ein Gradientenfeld. Verf. ordnet jeder Ortsfunktion φ affin-invariant eine Geradenkongruenz zu, derart daß die zum Punkt $M(u, v)$ gehörige Gerade in der Tangentenebene von M liegt. Ist C eine Kurve der Fläche durch M_0 , die von $\varphi = \text{const.}$ verschieden ist, so kann man den Ortsvektor \mathbf{r} längs C als Funktion von φ annehmen. Trägt man den Vektor $d\mathbf{r}/d\varphi$ in M_0 ab und variiert die Kurve C beliebig, so beschreibt der Endpunkt eine Gerade g der Tangentenebene von M_0 . Dadurch gewinnt Verf. die eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten M einer Fläche und den Geraden G einer Tangential-Kongruenz, die affin-invariant von φ abhängt. Umgekehrt: Eine gegebene Tangentialkongruenz (G) einer Fläche (M) besitzt nur dann eine Ortsfunktion $\varphi(u, v)$ auf (M), wenn den Torsen von (G) ein konjugiertes Netz auf (M) entspricht. — Im zweiten Teil behandelt Verf. einige Anwendungen dieses Hauptsatzes auf verschiedene Tangentialkongruenzen.
W. Haack.

Bjušgens, S. S.: *Über Stromlinien.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 78, 837—840 (1951) [Russisch].

Die Ableitungsgleichungen für ein bewegliches Dreibein $J_\alpha (J_1, J_2, J_3)$, dessen Nullpunkt im Punkt M des Raumes liegt, lauten $d\dot{M} = \omega_0^\alpha J_\alpha$; $dJ_1 = r J_2 - q J_3$; $dJ_2 = p J_3 - r J_1$; $dJ_3 = q J_1 - p J_2$. Dabei sind p, q, r Pfaffsche Formen, die sich durch ω_0^α ausdrücken lassen: $p = p_\alpha \omega_0^\alpha$, $q = q_\alpha \omega_0^\alpha$, $r = r_\alpha \omega_0^\alpha$. Verf. betrachtet die Feldlinien des Feldes J_3 (d. h. $\omega_0^1 = \omega_0^2 = 0$) als Stromlinien einer inkompressiblen Flüssigkeitsströmung eines Geschwindigkeitspotentials U . $\mathfrak{B} = V J_3$ ist der Geschwindigkeitsvektor. — Nachdem die hydrodynamischen Grundgleichungen auf eine geeignete Form gebracht sind [vgl. S. S. Bjušgens, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 10, Nr. 1, 73 (1946) und dies. Zbl. 31, 44] wird durch

$$J = q_3 J_1 - p_3 J_2 + (p_2 - q_1) J_3$$

ein zu J_3 adjungiertes Vektorfeld definiert. J liegt in der Schmiegungebene der durch M gehenden Stromlinie. Verf. gelangt zu folgendem Ergebnis: 1. Umhüllt J_3 die Stromlinien einer Potentialströmung, so besitzt das adjungierte Feld J eine Schar von Orthogonalflächen. 2. Die logarithmische Ableitung der Geschwindigkeit V in Richtung der Stromlinien ist gleich der mittleren Krümmung der Stromlinienkongruenz ($p_2 - q_1$).
W. Haack.

Bouchout, V.: Les lignes hexagonales dans les réseaux de surfaces. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. diff., Louvain de 11 au 14 avril 1951, 175—182 (1951).

Wenn im dreidimensionalen Raum drei Flächenscharen $f^i(x, y, z) = C^i$ gegeben sind, so kann man ähnlich den Sechseckgeweben der ebenen Geometrie nach der Schließungsbedingung räumlicher Polygone fragen. Verf. legt durch einen Punkt M die drei gegebenen Flächen $f^i(M)$ und konstruiert in der Umgebung von M , beginnend etwa im Punkt P_1 der Fläche $f^1(M)$, einen infinitesimalen Streckenzug so, daß P_2 in den Flächen $f^3(P_1)$ und $f^2(M)$, ferner P_3 in den Flächen $f^1(P_2)$ und $f^3(M)$ usw. bis P_7 in $f^2(P_6)$ und $f^1(M)$ liegt. Die Schließungsbedingung fordert, daß $f^3(P_7) - f^3(P_1)$ in erster Ordnung verschwindet. Sie ist nur erfüllt, wenn die Funktionaldeterminante der f^i Null ist. W. Haack.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Utz, W. R.: Almost periodic geodesics on manifolds of hyperbolic type. Duke math. J. 18, 147—164 (1951).

R_n : espace euclidien à n dimensions. S_n : boule unitaire ouverte de R_n . S_n^* : fermeture de S_n . $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$: fonctions de classe C^3 sur S_n telle que $0 \leq a < f(x) < b$. $M(f)$: variété riemannienne de support S_n et de métrique $(ds)^2 = \frac{4f^2(x) dx_i dx_i}{(1 - x_i x_i)^2}$; $M(1)$ est donc l'espace hyperbolique de courbure -1 dans la représentation de Poincaré. $D(z', z'')$: distance (géodésique) des points z', z'' pour $M(f)$. $H(z', z'')$: distance hyperbolique des points z', z'' . $H(A, B)$: distance de Hausdorff (év. infinie) des ensembles A et B dans $M(1)$. Un segment géodésique de $M(f)$ est dit de classe A si sa longueur est égale au minimum absolu des $M(f)$ -longueurs des courbes joignant ses extrémités. Une géodésique de $M(f)$ est dite de classe A si chacun de ses segments est de classe A . E (espace des phases): espace des paires $e = (p, v)$ (éléments de contact) où $p \in S_n$ et v est un vecteur unitaire de R_n . $q(e', e'')$: distance de E. Hopf des éléments e' et e'' de E ; cette distance est telle que la $M(f)$ -longueur d'une géodésique de $M(f)$ est égale à la q -longueur de son image dans E (lieu des éléments de contact). L'A. étend (§§ 4.1) à $M(f)$ un lemme donné par H. M. Morse [Trans. Amer. math. Soc. 26, 25—60 (1924)], dans le cas $n = 2$, suivant lequel il existe une constante R telle qu'à tout point z d'un segment géodésique de $M(f)$ de classe A correspond au moins un point z^* du segment hyperbolique confinal vérifiant $H(z, z^*) < R$. Ce lemme permet d'étendre aisément des théorèmes de H. M. Morse (loc. cit.) ainsi: A toute droite hyperbolique h correspond au moins une géodésique g de $M(f)$ de classe A vérifiant $H(h, g) < R$, et inversement. G : groupe discontinu (groupe fuchsien) de congruences simultanées de $M(1)$ et $M(f)$ qui, à l'exception de l'identité, sont dépourvues de points doubles. $M(f, G)$: espace riemannien déduit de $M(f)$ par identification des points congruents par G . $D_G(z', z'')$: distances dans $M(f, G)$ des points z' et z'' . $H_G(z', z'')$: distance dans $M(1, G)$ des points z' et z'' . Géodésique de classe A dans $M(f, G)$: image d'une géodésique de classe A dans $M(f)$. W : espace des éléments de contact dans $M(f, G)$. $d(w', w'')$: b. inf. $q(e', e'')$ pour toutes les paires (e', e'') de représentants dans E des points w' et w'' de W . Tout élément $w = (p, v)$ de W définit une géodésique dans $M(f, G)$; pour tout nombre t , $F_t(w)$ représente l'élément de contact de cette géodésique au point d'abscisse curviligne t comptée à partir de p . $F(t)$ est une homéomorphie de W sur lui-même. (F_t, W) est un flot géodésique. Une géodésique de $M(f, G)$ est dite presque périodique si ses éléments de contact définissent une orbite presque périodique dans W , c'est-à-dire une orbite passant à moins de ε d'un quelconque de ses points pour un ensemble $\dots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ de valeurs de t , non borné inférieurement et supérieurement et tel que b. inf. $(t_i - t_{i-1}) > 0$. Une géodésique de $M(f)$ est dite périodique ou presque périodique (sous-entendu: vis-à-vis de G) si elle engendre une géodésique de $M(f, G)$ périodique ou presque périodique respectivement. Le qualificatif „strictement“ devant „presque périodique“ signifie que le cas périodique est exclu. Voici les théorèmes principaux: Théorème I (§§ 8.4) — A toute géodésique presque périodique g' de $M(1, G)$ correspond (au moins) une géodésique g'' de classe A de $M(f, G)$ telle que la distance de Hausdorff $D_G(g', g'')$ soit finie. Théorème II (§§ 9.1) — Si $n = 2$ et s'il existe deux droites d_1 et d_2 de $M(1)$ périodiques et se coupant en P_0 sous un angle aigu, $M(1, G)$ admet une géodésique strictement presque périodique. Pour établir Th. II, l'auteur construit à l'intérieur des angles aigus définis par d_1 et d_2 une ligne en zig-zag $Z: \dots, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \dots$, comprenant des segments G -périodiques alternativement perpendiculaires (dans $M(1)$) à d_1 et d_2 et dont les longueurs sont définies à partir d'une suite à deux éléments distincts $\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$, strictement presque périodique. Z a deux extrémités (sur $S_n^* - S_n$), la droite hyperbolique les joignant a comme image dans $M(1, G)$ la géodésique désirée. Remarques du rapporteur — (1) L'espace hyperbolique inter-

vient constamment par l'intermédiaire de la représentation euclidienne de Poincaré, ainsi la démonstration du lemme 4.1 contient une évaluation de la distance de deux points de $N(1)$ sur le lieu (hypercycle) des points équidistants d'une droite à partir de ds pour $f = 1$. Une telle formule se trouve par exemple chez H. Liebmann, *Nichteuklidische Geometrie*, Berlin 1923, p. 66. (2) Le Th. 5.1 concernant l'extension des transformations de G en homéomorphismes de R_n en lui-même est conséquence de la représentation euclidienne des congruences de $M(1)$ comme restrictions à S_n des transformations circulaires de R_n conservant l'absolu $S_n^* - S_n$.

Christian Pauc.

Fejes Tóth, László: Über den Affinumfang. Math. Nachr. 6, 51—64 (1951).

Zerlegt man einen ebenen stetig gekrümmten Kurvenbogen K in endlich viele Teile und ersetzt man jeden Teilbogen k durch einen gleichlangen Bogen e einer Einheitsellipse (Halbachsenprodukt $ab = 1$) so, daß die Krümmungen von k und e in je einem Punkt übereinstimmen, so strebt die Summe der Affinlängen (Längen der inhaltstreu-affinverwandten Kreisbogen) der benutzten Ellipsenbogen bei unbegrenzter Verfeinerung der Zerlegung von K der Affinlänge von K zu. Auf Grund dieser sehr instruktiven Einführung der Affinlänge werden dann eine größere Reihe schöner geometrischer Eigenschaften der Affinlänge bewiesen, von denen ich als Beispiel nenne: Es seien A, B zwei Punkte der den Eibereich E berandenden Eilinie K vom Affinumfang λ , deren Tangenten sich in C schneiden. Das Dreieck ABC (A, B stets auf K) werde nun so um E herumgeführt, daß sein Inhalt Δ fest bleibt. E_Δ und $E_{-\Delta}$ seien die Inhalte der von C bzw. von den Sehnen AB berandeten Gebiete. Dann ist

$$\lambda = \lim_{\Delta=0} \frac{E_\Delta - E_{-\Delta}}{\Delta^{2/3}} = 2 \lim_{\Delta=0} \frac{E_\Delta - E}{\Delta^{2/3}} = 2 \lim_{\Delta=0} \frac{E - E_{-\Delta}}{\Delta^{2/3}}.$$

Auch die Darstellung der Affinlänge durch einen Grenzprozeß vermittels Dreiecksketten, wie bei W. Blaschke (Vorlesungen über Differentialgeometrie II, S. 10—11, Berlin 1923), wird leicht gewonnen und den folgenden Beweisen zugrunde gelegt. Die isoperimetrische Eigenschaft der Ellipse sowie eine bekannte Maximaleigenschaft des Parabelbogens \overline{AB} im Dreieck AOB sind in dem Satz 1 des Verf. enthalten: Unter den im $\triangle AOB$ verlaufenden Kurvenbogen \overline{AB} von festem Segmentinhalt besitzt der Kegelschnittbogen die maximale Affinlänge, der AO und BO berührt. Die isoperimetrische Ungleichung der Affingeometrie ergibt sich als Grenzfall ($n = \infty$) von Satz 2: Liegt ein Eibereich E vom Affinumfang λ in einem konvexen n -Eck T , so ist $\lambda^3 \leq 8 T n^2 \sin^2(\pi/n)$. Gleichheit gilt nur, wenn T affin regulär ist und E von den n Parabelbogen begrenzt ist, die je zwei aneinander stoßende Seiten von T in den Mittelpunkten berühren. — Das Hauptergebnis ist die Antwort auf die folgende interessante Frage: In ein gegebenes Gebiet soll eine feste Zahl n von Eibereichen ohne gegenseitige Überdeckung eingelagert sein. Wie sind die Bereiche zu wählen und anzuordnen, damit die Summe λ ihrer Affinlängen möglichst groß wird? Satz 3 gibt die Antwort: Ist das Gebiet ein Polygon U von höchstens sechs Seiten, so ist $\lambda^3 \leq 72 n^2 U$. Gleichheit besteht nur für ein affin-reguläres Sechseck U mit einem einzigen einbeschriebenen regulären Parabelbogensechseck. λ^3/n^2 kommt aber 72 U beliebig nahe, wenn in U eine wachsende Zahl von kongruenten regulären Parabelbogensechsecken in der dichtesten Packung eingelagert wird. — Hieraus folgt: Gegeben sei eine unendliche Menge von nicht übereinandergreifenden Eibereichen; Q sei ein Quadrat, n die Zahl der ganz in Q enthaltenen Bereiche, λ ihre Affinumfangsumme. Q wachse nun konzentrisch und homothetisch unbegrenzt; dabei mögen $\lambda = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{n}$, $D = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{n}{Q}$ existieren; dann ist $D\lambda^3 \leq 72$. Man

beachte dabei, daß ohne Beschränkung der Gestalt oder ihrer Anordnung ihre Kongruenz, reguläre Gestalt und Anordnung Folgen der Extremalforderung sind, daß der durchschnittliche Affinumfang λ der Bereiche bei gegebener Anzahldichte D möglichst groß sein soll. — Zum Schluß werden einige Übertragungen auf die Affinoberfläche eines Eikörpers genannt.

Wilhelm Süss.

Ščerbakov, R. N.: Das Dreibein einer Kurve auf einer Fläche in der affinen Differentialgeometrie. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 76, 655—657 (1951) [Russisch].

Mit Hilfe Pfaffscher Formen wird einer Kurve auf einer Fläche im affinen Raum ein begleitendes Dreibein zugeordnet und zunächst der Zusammenhang der Invarianten des zugehörigen Flächenstreifens mit denen der Fläche angegeben. Durch Nullsetzen einer der Invarianten werden gewisse Kurvenklassen festgelegt; umgekehrt sind durch die Existenz ausgezeichneter Kurvenscharen gewisse Flächenklassen charakterisiert. So gewinnt Verf. eine Kennzeichnung der affinen Analoga der Weingartenschen Flächen und gewisser Schiebflächen, auf denen das Darboux-Segre-Netz von den Schiebkurven gebildet wird. — Bei der Frage nach Flächen,

für welche die Kongruenz der Affinnormalen und eine Kongruenz tangentialer Strahlen wechselseitig stratifizierbar sind, ergeben sich einerseits die eigentlichen Affinsphären, andererseits Flächen, deren Krümmungsbild in eine ebene Kurve ausartet. — Bemerkung der Ref.: Der Angriff des Verf. gegen die vom ersten Ref. (dies. Zbl. 3, 363) gegebene Charakterisierung aller Schiebflächen mit Erzeugenden Darboux-Kurven ist unzutreffend. Die vom Verf. untersuchte Klasse ist eine spezielle und in den Ergebnissen des Ref. (a. a. O. S. 73) enthalten.

W. Haack — J. Nitsche.

Klingenberg, Wilhelm: Zur affinen Differentialgeometrie. I. Über p -dimensionale Minimalflächen und Sphären im n -dimensionalen Raum. II. Über zweidimensionale Flächen im vierdimensionalen Raum. Math. Z. 54, 65—80, 184—216 (1951).

I. Die Arbeit fußt auf der Untersuchung von K. H. Weise (dies. Zbl. 18, 87; 19, 185), in der die Einbettung einer F_p im affinen Raum A_n behandelt wird. Durch eine gewisse Verallgemeinerung der Apolaritätsbedingung kann man unter den die F_p in 2. Ordnung berührenden p -dimensionalen Schmiegeparaboloiden eines bestimmen, so daß dessen $(n-p)$ -dimensionaler Durchmesserraum gegenüber der Parameterwahl invariant ist und bei Affinitäten sich als kontravarianter Vektorraum verhält. Er wird deshalb als Affinnormalenraum benutzt und ist für $p = n-1$ mit der gewöhnlichen Affinnormalen identisch. Mit seiner Hilfe werden die Ableitungsgleichungen der F_p im A_n und ihre Integrierbarkeitsbedingungen aufgestellt. Bei inhaltstreuen Affinitäten gibt es eine Affinoberfläche. Die Eulersche Gleichung des entsprechenden Variationsproblems läßt für die Minimalflächen Verallgemeinerungen bekannter Sätze aussprechen. In Erweiterung der Affinsphären werden p -Sphären betrachtet als F_p , bei denen die Normalenräume einen $(n-p-1)$ -dimensionalen Raum gemeinsam haben. Es zeigt sich, daß aus der Voraussetzung, daß diese Bedingung im Kleinen erfüllt ist, sie auch im Großen folgt.

II. Die Affingeometrie der F_2 im A_4 wird hier mit den allgemeinen Methoden des Teils I behandelt. Als bevorzugte Parameter der F_2 $\chi(u^1, u^2)$ werden „konjugierte“ zugrunde gelegt, die sich als die Nullkurven der schon von C. Burstin und W. Mayer [Math. Z. 26, 373—407 (1927)] herangezogenen quadratischen Form $|\chi_1, \chi_2, \chi_{11}, \chi_{22}| du^i du^k$ ($i, k = 1, 2$) einführen lassen. Für die zusätzliche Wahl besonderer Normalenvektoren wird eine kanonische Darstellung der F_2 gegeben und das dabei benutzte „kanonische Koordinatensystem“ und damit die Weisesche Affinnormalenebene geometrisch charakterisiert. Mit den für dieses Koordinatensystem aufgestellten Ableitungsgleichungen, die mit Integrierbarkeitsbedingungen angegeben werden, läßt sich ein von Teil I unabhängiger Zugang zur hier behandelten Theorie finden. — Die Mittelpunkte der dreidimensionalen Quadriken, die die F_2 in einem nicht-parabolischen Punkt von 3. Ordnung berühren, liegen auf einem quadratischen Kegel. Tangentialebene und Normalenebene sind einander bezüglich dieses Kegels konjugiert; hiermit ist die Normalenebene erneut geometrisch gekennzeichnet. — Die Normalenebene eines F_2 -Punktes P wird von den benachbarten Normalenebenen in Punkten eines Kegelschnitts, der sog. „Krümmungsspur“, geschnitten. Den uneigentlichen Punkten dieser C_2 entsprechen ausgezeichnete Richtungen auf der F_2 , die der „Hauptkrümmungslinien“. Diese sind diejenigen Kurven, längs denen die Normalenebenen eine Hypertorse bilden. Semisphären, d. h. solche F_2 , auf denen jede Kurve Hauptkrümmungslinie ist, sind dadurch charakterisiert, daß entweder jede Normalenebene eine zu einer festen Geraden parallele Gerade enthält oder die Richtungen aller Normalenebenen in einem A_3 liegen. Es werden die semisphärischen Schiebflächen bestimmt. Im Sonderfall der Sphären, bei denen alle Normalenebenen eine feste Gerade enthalten, bleibt bei der Bestimmung aller Möglichkeiten noch eine Frage ungeklärt. Die uneigentlichen Sphären, unter denen auch die sphärischen Schiebflächen sich befinden, werden angegeben. Zu den semisphärischen Flächen gehören auch die Minimalschiebflächen, die ebenso wie die sphärischen Minimalflächen als Anwendungsbeispiele der benutzten Methoden bestimmt werden, die sich dabei gut bewähren.

Wilhelm Süß.

Bompiani, E.: Topologie des éléments différentiels et quelques applications. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. diff., Louvain du 11 au 14 avril 1951, 9—36 (1951).

By topological transformations it is understood a one-to-one transformation with continuous derivatives up to a certain order. The author observes that certain known projective invariants of two or more curves, surfaces or varieties tangent at a point O are also topological invariants. A general method for the obtention of such invariants for configurations of elements of curve at a point is given and application is made to some particular cases. With respect to elements of surface

the problem considered in detail is the following: let σ_2, σ'_2 be two elements of surface tangent at the point O ; for each pair of elements of curve, E_1 contained in σ_2 and E'_1 contained in σ'_2 , with the same tangent, one considers the principal plane of Halphen; this plane plays the role of the osculating plane of the elements E_1 and many properties of the osculating planes to the curves of a surface at a point may be generalized. The author considers also the problem of the projective applicability of surfaces contained in a curved space of three dimensions (i. e. a space in which instead of straight lines we have a system of paths $\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$); the obtained conditions are a straightforward generalization of the classical ones to which they reduce by $\Gamma_{jk}^i = 0$. Finally some applications to certain problems of integration of linear partial differential equations of first order are given.

Luis A. Santaló.

Tanturri, Giuseppe: Caratterizzazione geometrica di alcuni sistemi ∞^5 di curve nello spazio. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **10**, 243—258 (1951).

The paper is concerned with the system of ∞^5 integral curves of the differential system $y''' = c(x, y, z, y', z', y''), z'' = K(x, y, z, y', z') y''$. The obtained results are of the following type: a) A condition is given in order that the E_3 (elements of the third order) of the integral curves which contain a fixed E_1 (point + tangent) belong to an element of surface of the third order; b) The particular systems $y''' = F + G y'' + H y'^2, z'' = K y''$ with $KK_{z'} + K_{y'} = 0$ are characterized by the property that the E_4 which contain a generic E_1 form a „pencil“ (set of E_4 whose E_2 are tangent and coplanar and belong to an element of surface of the fourth order); c) The systems $y''' = G(x, y, z, y', z') y'' + H(x, y, z, y', z') y'^2, z'' = K(x, y, z, y', z') y''$ are studied with detail and are related with a previous work of Terracini.

Luis A. Santaló.

Berezman, A. M.: Das kanonische Vierbein einer Fläche im vierdimensionalen projektiven Raum. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 373—376 (1951) [Russisch].

Nach Cartans Methode des Repère mobile bestimmt Verf. durch geeignete Untergruppen der allgemeinen projektiven Transformation des P_4 eine kanonische Form der Ableitungsgleichungen einer zweidimensionalen Fläche P_2 im P_4 . Im Anschluß daran werden die Eckpunkte des projektiv-invarianten Bezugs-Pentaaeders unter Benutzung des einzigen konjugierten Kurvennetzes der Fläche und der zugehörigen Laplace-Transformation geometrisch gedeutet.

W. Haack — J. Nitsche.

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces associées à une suite de Laplace terminée. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. diff., Louvain du 11 au 14 avril 1951, 191—203 (1951).

Die Haupttangente einer Fläche (x) gehen durch die Abbildung auf die Kleinsche Hyperquadrik Q in zwei Flächen $(U), (V)$ von Q über, die in Q eine Laplacesche Folge $U_n \dots U_2 U_1 U V V_1 \dots V_{n+2}$ erzeugen. Verf. untersucht den Fall, daß die Folge mit U_n nach links im Laplaceschen Sinn abbricht d. h. d. r. t., daß die Kurve (U_n) nicht in einer Hyperebene liegt, und beweist, daß sie dann nach rechts mit V_{n+2} im Sinne Goursats aufhört [Satz von Bompiani, Rend. Circ. Mat. Palermo **34**, 383—407 (1912)]. Eine solche Folge hat $2n + 4$ Elemente. Die Zahl n gibt eine Klassifikation der Flächen (x) . Für $n = 0$ ist (x) Regelfläche; für $n = 1$ gehören die Asymptotenlinien von (x) einem linearen Komplex an. Für $n = 2$ gehören die längs einer v -Kurve genommenen u -Tangenten einem linearen Komplex an. — Sind $(x), (y)$ die Brennflächen einer W -Kongruenz und gehört zu (x) [d. h. zu den Haupttangente von (x)] eine Folge mit $2n + 4$ Elementen, so ist auch die Folge, die dem anderen Brennmantel (y) in Q zugeordnet ist, endlich und enthält $2n + 2$ oder $2n + 4$ oder $2n + 6$ Elemente.

W. Haack.

Hsiung, Chuan-Chih: A general theory of conjugate nets in projective hyper-space. Trans. Amer. math. Soc. **70**, 312—322 (1951).

Im Anschluß an E. P. Lane (A treatise on projective differential geometry, Univ. Chicago Press 1942, Kap. 8) hat Verf. in einer früheren Mitteilung (dies. Zbl. **34**, 96) konjugierte Netze im linearen 4-dimensionalen Raum S_4 untersucht. Jetzt wird die Untersuchung auf den linearen n -dimensionalen Raum S_n verallgemeinert. Nach Aufstellung eines Systems von Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen beweist Verf. folgende Sätze: 1. Die Schnittpunkte der Tangenten eines konjugierten Netzes mit einer Hyperebene S_{n-1} beschreiben in dieser S_{n-1} zwei konjugierte Netze, die durch Laplace-Transformationen auseinander hervorgehen. — 2. Die Tangentialebene eines Punktes $X(u, v)$ des Netzes schneidet eine feste S_{n-2} in einem Punkt $P(u, v)$. Durchläuft X die Netzkurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, so erzeugt $P(u, v)$ ein konjugiertes Netz in der S_{n-2} . — Schließlich werden die Netze mit gleichen, von Null verschiedenen Laplace-Invarianten durch die Existenz einer oskulierenden Hyperquadrik gekennzeichnet, die neben dem Netzpunkt X auch dessen Laplace-Transformierte X_1 ; X_{-1} in zweiter Ordnung berührt.

W. Haack — J. Nitsche.

Marcus, F.: De la définition de stratifiabilité en un sens, d'un couple de congruences de droites. Commun. Acad. Republ. popul. Române **1**, 57—59, russische und französ. Zusammenfassgn. 59, 59 (1951) [Rumänisch].

L'A. démontre qu'on peut donner une définition moins restreinte que celle donnée initialement par Fubini, à la condition de stratifiabilité en un seul sens, de deux congruences de droites. De même, en tenant compte d'un résultat antérieur du même auteur, on simplifie encore plus la condition de la stratifiabilité en double sens, pour deux congruences de droites.

(Autoreferat.)

Finikov, S. P.: W -Systeme. Mat. Sbornik, n. Ser. **29 (71)**, 349—370 (1951) [Russisch].

Eine Fläche S , die Brennfläche von zwei W -Kongruenzen ist, ist zugleich Brennfläche einer einparametrischen Schar von W -Kongruenzen, der jene beiden angehören. Die zweiten Brennflächen S_a der W -Kongruenzen bilden eine einparametrische Schar, deren Asymptotenlinien sich entsprechen. Die zu einem Punkt M von S gehörenden Punkte der Schar S_a liegen auf einer Geraden r . Umgekehrt besitzt auch jede Fläche der Schar S_a eine Schar von W -Kongruenzen, deren andere Brennflächen für alle Flächen S_a die gleiche Schar S_b bilden. Die Punkte der Schar S_b , die einem Punkt von S_a entsprechen, liegen auf der Geraden r . Die Flächen (S_a) , (S_b) bilden das System von Bianchi; die Strahlen r , r' erzeugen ein stratifizierbares Paar von Kongruenzen mit den stratifizierenden Flächen (S_a) , (S_b) . Das System enthält eine zweiparametrische Schar von W -Kongruenzen, aber nur zwei einparametrische Scharen von Brennflächen mit „starrer“ Zuordnung der Punkte. Im Anschluß an die Untersuchung über stratifizierbare Kurvenpaare [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **9**, Nr. 2, 79—111 (1945)] konstruiert Verf., ausgehend von zwei geeigneten Asymptotenlinien der Flächenschar S_a , eine zweiparametrische Schar von W -Kongruenzen mit zwei einparametrischen Scharen von Brennflächen ohne starre Zuordnung der Punkte. Die zu Systemen mit starrer Zuordnung gehörenden Brennflächen (der W -Kongruenz) lassen sich dadurch charakterisieren, daß die Asymptotenlinien der einen Schar linearen Komplexen angehören. Verschiedene Asymptotenlinien der gleichen Fläche gehören zu verschiedenen Komplexen. Aber die einander entsprechenden Asymptotenlinien der verschiedenen Flächen gehören zum gleichen Komplex. Die W -Kongruenzen führen somit eine Asymptotenlinie einer Brennfläche in eine Asymptotenlinie der anderen Brennfläche über, die dem gleichen Komplex angehört.

Wolfgang Haack.

Finikov, S.: Ein System von W -Kongruenzen mit funktionaler Willkür. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 197—199 (1951) [Russisch].

Im Zusammenhang mit vorsteh. referierter Arbeit zeigt Verf., daß ein zweidimensionales W -Gebilde, bestehend aus ∞^2 W -Kongruenzen mit nur zwei einparametrischen Brennflächenscharen, von vier willkürlichen Funktionen einer Variablen abhängt.

Wolfgang Haack.

Backes, F.: Quelques remarques relatives à la géométrie des cercles et des sphères. Mathesis **60**, 169—171 (1951).

Betrachtet man in der Ebene eine einparametrische Schar von Kreisen Γ , so geht die Verbindungsgerade der Charakteristiken eines Kreises durch die Charak-

teristik der Potenzachse von Γ und eines festen Kreises C . — Dieser Satz wird auf den Fall des Raumes in verschiedenen Richtungen erweitert. Die Ebene einer Charakteristik einer Kugel einer einparametrischen Schar geht durch die Charakteristik der Potenzebene dieser Kugel und irgendeiner festen Kugel. — Des weiteren sei Γ ein Kreis einer einparametrischen Schar, wobei der Kreis nicht eine Kugel beschreibt. Setzen wir voraus, daß der Kreis zwei Charakteristiken A, B besitzt, dann bestimmt die Verbindungsgerade der Schnittpunkte von Γ und einer festen Kugel eine Rückkehrkante und der Berührungspunkt gehört der Geraden AB an. Diese Sätze werden mittels einfacher Überlegungen bewiesen und Spezialfälle werden erwähnt. — Mit schärferen Hilfsmitteln wird gezeigt: Die Verbindungsgerade der Charakteristiken einer Kugel aus einer zweiparametrischen Schar geht durch die Charakteristik P der Potenzebene dieser Kugel und irgendeiner festen Kugel. Die Torsen der Kongruenz (AB) schneiden auf der von P beschriebenen Fläche ein konjugiertes Netz ein.

J. C. H. Gerretsen.

Backes, F.: *Sur les congruences conjuguées à une surface*. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 879—887 (1951).

*Verf. wiederholt den Beweis des letzten im vorsteh. Referat genannten Satzes. Da eine homographische Transformation den Kugelschnitt in einen willkürlichen Kegelschnitt überführt, kann man das Ergebnis folgendermaßen fassen: Es beschreibe die quadratische Fläche Σ durch einen Kegelschnitt Ω eine zweiparametrische Schar, und es seien A, B die Charakteristiken der Fläche. Dann schneidet die Gerade AB die Ebene des zweiten der Fläche und einer festen quadratischen Fläche S durch Ω gemeinsamen Kegelschnittes in einem Punkt P derart, daß die Torsen der Kongruenz AB auf der von P beschriebenen Fläche (P) ein konjugiertes Netz ausschneiden. — Ist umgekehrt Ω ein fester Kegelschnitt auf einer quadratischen Fläche S und bezeichnet (P) irgendeine Fläche, legt man durch Ω und den Schnittkegelschnitt von S und der Berührungsebene in P an (P) eine zweiparametrische Schar von quadratischen Flächen Σ , dann erzeugen die Verbindungsgeraden der Charakteristiken A, B eine Kongruenz, deren Torsen auf (P) ein konjugiertes Netz bestimmen. Auf diese Weise können alle zu (P) im betrachteten Sinne konjugierten Kongruenzen erhalten werden. Verf. bemerkt, daß die Ergebnisse auch im nicht-euklidischen Raume gültig sind.

J. C. H. Gerretsen.

Backès, F.: *La méthode du pentasphère oblique mobile et ses applications*. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. diff., Louvain du 11 au 14 avril 1951, 183—190 (1951).

In einigen Fragen aus der Geometrie der Kreise und Kugeln kann bisweilen an Stelle des üblichen orthogonalen pentasphärischen Systems die Verwendung eines aus fünf Kugeln in allgemeiner Lage bestehenden Bezugssystems wegen seiner größeren Anpassungsfähigkeit vorteilhaft sein. In der Arbeit werden die Grundformeln für ein solches System skizziert und auf einige Anwendungen hingewiesen. Orientierte Kugeln und Kreise werden nicht betrachtet. Ausgehend von der Koordinatendefinition, derselben wie im orthogonalen Fall, und der Darbouxsschen Relation zwischen den Potenzen eines Punktes in bezug auf fünf Kugeln, werden zuerst die Gleichungen der einfachsten Gebilde angegeben, und anschließend aus den Transformationsformeln für die Koordinaten, linearen unimodularen Substitutionen in fünf Veränderlichen, die Ausdrücke für die relativen Komponenten a_{ik} ($i, k = 1, \dots, 5$; $\sum a_{ii} = 0$) des bewegten Bezugssystems sowie die zwischen diesen Komponenten bestehenden Integrabilitätsbedingungen vom Maurer-Cartanschen Typus abgeleitet. Die Demoulinischen Formeln (differentielle Beziehungen zwischen den relativen Koordinaten eines Punktes, einer Kugel oder eines Kreises) übertragen sich ohne formale Komplizierung. Die Anwendungen beziehen sich hauptsächlich auf zyklische Systeme. So wird u. a. auf Existenz und Eigenschaften folgender bemerkenswerter Figur hingewiesen: S_1 und S_3 seien zwei von den Parametern u und v abhängige Kugeln. Der charakteristische (char.) Kreis von S_1 bei alleiniger Variation von u und derjenige von S_3 bei Variation von v mögen auf einer Kugel S_2 liegen, deren char. Punkte die Schnittpunkte dieser beiden Kreise seien. Ebenso möge der char. Kreis von S_1 bei Variation von v und derjenige von S_3 bei Variation von u auf einer Kugel S_4 liegen, für die die Schnittpunkte dieser beiden Kreise ebenfalls char. Punkte seien. Zur bequemen Untersuchung der erzeugten Kongruenzen wähle man als bewegtes pentasphärisches Koordinatensystem die Kugeln S_1, S_2, S_3, S_4

zusammen mit einer festen Kugel S_5 , die übrigens so bestimmt werden kann, daß die vier ersten zu ihr orthogonal bleiben. So beweist man leicht, daß z. B. das System der Schnittkreise C von S_1 und S_3 ein zyklisches ist und die Achse d von C ein W -Strahlensystem beschreibt. Umgekehrt erhält man alle Systeme solcher C -Kreise, indem zu jeder Geraden d eines beliebig vorgegebenen W -Systems der Kreis konstruiert wird, der d zur Achse hat und eine feste Kugel orthogonal schneidet.

R. Ullrich.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Clark, R. S.: On the conformal theory of curves in a general differential metric space. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 58—70 (1951).

Die Arbeit bildet eine Verallgemeinerung der Arbeit von A. Fialkow [Trans. Amer. math. Soc. 51, 435—501 (1942)], in der die konforme Theorie der Kurven in Riemannschen Räumen ausgearbeitet wurde. Verf. hat in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 43, 374) die Konformgeometrie in allgemeinen Räumen (von Schouten und Haantjes) entwickelt, von denen die Finslerschen sowie die Cartanschen Spezialfälle sind. Anknüpfend an diese Arbeit und an den Begriff des konformen Differentials entwickelt nun Verf. eine konforme Theorie der Kurven in diesen allgemeinen Räumen, wo die Grundfunktion von einer Vektordichte abhängig ist. — Die Methode des Verf. ist jedoch verschieden von jener von Fialkow. Verf. leitet ein Analogon von Frenetschen Gleichungen ab (indem in bezug auf den sogenannten Konformparameter differenziert wird). Die unmittelbare Verallgemeinerung der Methode von Fialkow führt zu einem Prozeß der Differentiation, welcher, von einem konformmetrischen Tensor ausgehend, wieder einen konformmetrischen Tensor liefert, während die Methode des Verf. gestattet, aus einem konformen Relativtensor (von beliebigem Gewicht) einen konformen Tensor von demselben Gewicht zu bekommen. — In den letzten zwei Abschnitten verallgemeinert Verf. den Begriff „conformal paths“ und den der konformen geodätischen Linie und gibt für beide notwendige und hinreichende Bedingungen, sowie dafür, daß die beiden Begriffe zusammenfallen. Insbesondere decken sich die beiden Begriffe in Finslerschen Räumen.

Stanislaw Golab.

Brickell, F.: On metrical geometries based on an integral as fundamental invariant. Proc. London math. Soc., II. Ser. 53, 280—293 (1951).

The geometries of Finsler and Cartan can be generalised by considering the problem in the Calculus of Variations associated with the integral $\int \cdots \int L(x^i, p^{i_1 \cdots i_k}) dt^1 \cdots dt^k$ ($i = 1, \dots, n$)

where $p^{i_1 \cdots i_k}$ is the simple k -vector obtained by omitting $(n - k)$ columns of the matrix $||\partial x / \partial t||$ and where L is a positive homogeneous function of the first degree in the $p^{i_1 \cdots i_k}$. In the present paper the case $k = 2$ is considered, the aim being to develop geometries based on contravariant bivector densities of weight p (the covariant case leading to analogous results, as discussed in the authors Thesis, London, 1948). This procedure is in some measure analogous to that of Schouten and Haantjes (this Zbl. 13, 366) when developing Finsler and Cartan geometry from a unified point of view. Let u^{ij} be a simple pseudo-bivector, v^{ij} a simple bivector density of weight p having the same orientation as u^{ij} . The „measure“ of v^{ij} is defined by a scalar function $\varphi(x^i, v^{hk})$, ($h < k$), postulating that φ is a positive homogeneous function of the first degree in the v^{hk} . Writing $L(x^i, u^{hk}) = \varphi(x^i, v^{hk})$, L is called the fundamental function. The bivector metric tensor is defined by $g^{-p} g_{ij, hk} = \partial^2 (\frac{1}{2} L^2) / \partial u^{ij} \partial u^{hk}$, ($p \neq n/2$), where $g^{n-1} = G$, G being the value of the $\frac{1}{2}n(n-1)$ th order determinant of the $g_{ij, hk}$ ($i < j, h < k$). For a locally euclidean metric it must be possible to put $g_{ij, hk} = g_{ih} g_{jk} - g_{ik} g_{jh}$ where $g_{ij} = g_{ji}$. It is shown that the restriction on L resulting from the condition that u^{ij} be simple (it being assumed in later developments that L is adjusted to satisfy this condition) is not in general sufficient to satisfy the conditions for a locally euclidean metric. For the latter necessary and sufficient analytical conditions are derived. The unit bivector, the adjoint $(n-2)$ -vector and the adjoint metric are introduced and the uniqueness of linear forms in the u^{rs} are discussed. For the case of a locally euclidean metric a covariant differential is introduced and further developments (torsion, curvature, theory of subspaces) are indicated.

Hanno Rund.

Katsurada, Yoshie: On the theory of non-holonomic systems in the Finsler space. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 140—148 (1951).

On montre comment on peut étendre la notion de système de n congruences indépendantes au cas d'un espace général et l'on utilise cette notion au cas des espaces de Finsler. Etant donnés n formes (1) $ds^\alpha = \lambda_\alpha^a dx^a$ où $\lambda_\alpha^a(x, dx)$ sont homogènes du degré zéro dans les dx , le long d'une courbe $x^\alpha = f^\alpha(t)$ nous avons $s'^\alpha = ds^\alpha/dt = \lambda_\alpha^a(x, x') x'^a$. Les λ_α^a sont donc covariantes dans l'indice α à un changement de variables. En supposant le dét. $|\lambda_\alpha^a| \neq 0$ les (1) nous donnent (2) $dx^\alpha = \lambda_\alpha^a(x, dx) ds^a$, où λ_α^a sont aussi homogènes en dx du degré zéro et contrevariantes en α . — Nous avons aussi les formules de réciprocité $\lambda_\alpha^a \lambda_b^\alpha = \delta_a^b$, $\lambda_\alpha^a \lambda_a^\beta = \delta_\alpha^\beta$. Si au lieu des dx dans

$f(x, dx)$ on introduit les ds^a , on la désigne par $*f$ et l'on considère le symbole de dérivation

$$\frac{\partial *f}{\partial s^a} = \left[\frac{\partial *f}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial f}{\partial x'^\beta} \frac{\partial * \lambda_b^\beta}{\partial x^\alpha} s^b \right].$$

La loi de commutation des dérivées secondes introduit les quantités

$$(3) \quad w_{ab}^e = \left(\frac{\partial * x_\alpha^e}{\partial x^\beta} - \frac{\partial * \lambda_\beta^e}{\partial x^\alpha} \right) * \lambda_a^\alpha * \lambda_b^\beta$$

qui ont comme on voit, les mêmes expressions que les coefficients des covariants bilinéaires des formes ds^a , dans le cas où λ_a^α ne dépendent pas des dx . On introduit aussi les quantités $\Omega_{ab}^e = (\partial * \lambda_a^\alpha / \partial s^b) * \lambda_\alpha^e$ et l'on montre comment se changent les w_{ab}^e et Ω_{ab}^e par un changement des formes, $ds^a = c_b^a(x, dx) ds^b$. Etant donné un tenseur, par exemple un vecteur contravariant v^α , on définit comme composantes dans le système des formes ds^a les quantités $v^a = \lambda_a^\alpha v^\alpha$ et l'on observe que tandis que les $\partial v^\alpha / \partial x'^\beta$, sont les composantes d'un tenseur du second ordre, les $\partial * v^a / \partial s^b$ n'ont pas cette propriété mais elles définissent un tenseur si on leur ajoute $\Omega_{ab}^e v^d$. Si l'espace est un espace de Finsler où l'arc est donné par la formule $s = \int L(x, x') dt$ on peut poser $F = \frac{1}{2} \dot{\lambda}^2$, $g_{\alpha\beta} = \partial^2 F / \partial x^\alpha \partial x'^\beta$, $C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \partial g_{\alpha\beta} / \partial x'^\gamma$, où $g_{\alpha\beta}$ peut être considéré comme le tenseur métrique de l'espace. Dans le système des formes ds^a , ce tenseur a les composantes $g_{ab}^e = g_{\alpha\beta} \lambda_a^\alpha \lambda_b^\beta$ et l'on montre comment on peut exprimer la connexion de Cartan et les tenseurs de torsion et de courbure à l'aide de g_{ab} , w_{ab}^e , Ω_{ab}^e et du tenseur dérivé du tenseur métrique C_{abc} . — Les formules peuvent être beaucoup simplifiées si l'on considère des congruences orthogonales, donc celles pour lesquelles nous avons $g_{ab} = \delta_b^a$, ce que l'A. fait dans un autre travail [J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, 1950], où l'on montre comment la notion d'espace non holonome dans des espaces de Riemann, considéré par le Réf. peut être étendue aux espaces de Finsler.

G. Vranceanu.

Aussem, M. V.: *Metrische Räume von n Dimensionen, gegründet auf dem Begriff des Inhalts m -dimensionaler Flächen*. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 701—704 (1951) [Russisch].

Cartan a montré que l'on peut construire des espaces métriques à n dimensions si l'on connaît l'élément d'aire des hypersurfaces, donc l'élément d'aire des variétés à $m = n - 1$ dimensions. Davies a montré que la même propriété a lieu si l'on connaît l'élément d'aire des variétés à $m = 2$ ou à $m = n - 2$ dimensions. — Hokari a montré que la propriété a lieu quelque soit m . L'A. considère le même problème par une autre méthode. Etant donné dans l'espace (x^1, \dots, x^n) une variété à m dimensions $x^\alpha = f^\alpha(x^i)$ et l'aire de cette variété

$$\sigma = \int_{(m)} F(x, p_i^\alpha) [dx^1 \dots dx^m] \quad \left(p_i^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \right)$$

on pose $p_i^\alpha = -u_i^\alpha / u_\alpha^\alpha$ et $L(x, u) = \int_\gamma u_i^\gamma$, $F(x, -u_i^\alpha / u_\alpha^\alpha)$, on considère ensuite

comme élément plan (x, p) de l'espace métrique, le point x et un plan à m dimensions passant par ce point. En associant à cet élément plan un repère (M, e_I) , nous aurons le tenseur métrique par les formules $e_I e_J = g_{IJ}(x, p)$. Le passage à un repère voisin introduit les composantes de la connexion et l'A. montre, en utilisant les coordonnées grassmanniennes $P_{I_1}, \dots, P_{I_{n-m}}$ de l'élément plan (x, p) , comment on peut obtenir tout le tenseur g_{IJ} que les composantes de la connexion à l'aide de la fonction L .

G. Vranceanu.

Reeb, Georges: *Sur une propriété globale des variétés minima d'un espace de Cartan*. C. r. Acad. Sci., Paris 232, 1279—1280 (1951).

For the case of an n -dimensional space V_n (with coordinates x^i) the author, using the terminology of the theory of fibre spaces, formulates precisely the structure (F_{n-1}) to be imposed on V_n in order to arrive at a Cartan space. This is done by introducing the space V_{2n} [or V_{2n}^*] of contravariant [or covariant] $(n-1)$ -vectors tangent to V_n . P is the canonical projection of V_{2n} [or V_{2n}^*] onto V_n . The structure (F_{n-1}) is defined when a function $f(x_i, u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)$ of V_{2n} is given satisfying the condition that $f(x, u)$ at $R_x^n = P^{-1}(x)$ is a norm of the fibre R_x^n . Analogously a function $f^*(x_i, p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n)$ of V_{2n}^* defines (F_{n-1}) . This

structure may also be associated with a problem in the Calculus of Variations corresponding to an $(n-1)$ -fold integral, whose extremal manifolds are called minimal. The equation $f^*(x, p) = 1$ defines a subspace W_{2n-1} of V_{2n} . An orientated manifold of n dimensions embedded in W_{2n-1} is said to be a transversal manifold to a set Γ of simple $(n-1)$ -vectors tangent to W_{2n-1} if no element of Γ is tangent to it. If Γ is constructed (as in the present paper) so that its $(n-1)$ -dimensional integral manifolds are minimal with respect to (F_{n-1}) , such a transversal compact manifold cannot exist. This theorem is an analogue of an earlier result due to the author (this Zbl. 34, 358) to the effect that the geodesic flux of a Finsler space does not admit of a compact transversal manifold.

Hanno Rund.

● Cartan, É.: *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann.* (Cahiers Scientifiques.) 2^e éd. Nouveau tirage. Paris: Gauthier-Villars 1951. VI, 378 p. 1800 fr.

Diese zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten hauptsächlich dadurch, daß einige Notationsänderungen vorgenommen sind und daß die Kapitel IX, XI, XII und XIII neu sind. In IX wird die Methode des „repère mobile“ auseinandergesetzt, und diese Methode wird angewandt auf symmetrische Räume in XI, auf starre Bewegungen der V_n in XII und auf Abbildung zweier V_n aufeinander in XIII. Auch die Noten IV über die geodätischen Linien einer normalen V_n und V über vollständig integrable Pfaffsche Systeme sind neu. Es fehlt leider ein Index.

Jan Arnoldus Schouten.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: *Gaussian curvature and local embedding.* Amer. J. Math. 73, 876—884 (1951).

The authors refine a theorem given in a previous work (this Zbl. 38, 334). A function is called of class $C^n(\lambda)$, where $n = 0, 1, 2, \dots$ and $0 < \lambda < 1$, on a domain if it is of class C^n (that is, if it possesses there continuous n -th partial derivatives) and if all the n -th derivatives satisfy a uniform Hölder condition of order λ on every compact subset of the domain. The line element $ds^2 = g_{ik} du^i du^k$ ($i, k = 1, 2$) is said to be of class C^n or $C^n(\lambda)$ if each coefficient function belongs to the class C^n or $C^n(\lambda)$ respectively. For $n \geq 1$ the line element ds^2 is said to possess a local embedding of class C^n or $C^n(\lambda)$ at a given point (u_0^1, u_0^2) if in a vicinity of (u_0^1, u_0^2) there exist three functions $x^i = x^i(u^1, u^2)$ of class C^n or $C^n(\lambda)$, respectively, satisfying $(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = g_{ik} du^i du^k$. The refined theorems are: a) Let $0 < \mu < \lambda < 1$. In a neighborhood of $(0,0)$ let $g_{ik} du^i du^k$ be a positive-definite line element of class $C^1(\lambda)$ which possesses a positive curvature $K = K(u^1, u^2)$ of class $C^0(\lambda)$; then the line element has a local embedding of class $C^2(\mu)$ [if $C^2(\mu)$ can be improved to $C^2(\lambda)$ remains undecided]. b) Let $n \geq 1$. In a neighborhood of $(0,0)$ let $g_{ik} du^i du^k$ be a positive definite line element of class C^n which possesses a negative curvature $K = K(u^1, u^2)$ of class C^{n-1} ; then the line element has a local embedding of class C^{n+1} (it remains undecided if this remains true if the curvature is positive). — For line elements of class C^1 the curvature K is first defined by its integrated form $(*) \Phi(T) = \int_J (A du +$

$B dv)$ where T is the interior of the Jordan curve J which is piecewise of class C^1 and

$$A = \frac{1}{2} g^{-1} [(g_{12}/g_{11}) g_{11u} + g_{11v} - g_{12u}], \quad B = \frac{1}{2} g^{-1} [(g_{12}/g_{11}) g_{11v} - g_{22u} + g_{12v}].$$

If the set function $\Phi(T)$ has a representation of the form $(*)$ in terms of a function $K(u, v)$ which is independent of T and which is summable over every compact subset of the simply connected domain considered, then $g_{ik} du^i du^k$ is said to possess the curvature $K(u, v)$.

Luis A. Santaló.

Vrănceanu, Gh.: *Sur les groupes de mouvements d'un espace de Riemann.* Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 137—139, russische und französ. Zusammenfassgn. 139, 140 (1951) [Rumänisch].

Récemment, J. P. Egorov (ce Zbl. 38, 346) a montré qu'un espace V_n de Riemann, qui n'est pas un espace d'Einstein, possède un groupe maximum d'automorphismes à $\frac{1}{2} n(n-1) + 1$ paramètres et ce maximum est atteint. L'A. montre que, si l'espace V_n est en même temps non conformément euclidien, le groupe maximum possède au plus $\frac{1}{2} (n-1)(n-2) + 3$ paramètres et que ce maximum est atteint. Il donne, également, une nouvelle démonstration du résultat d'Egorov, à savoir que, si l'espace V_n d'Einstein n'est pas à courbure constante, le groupe maximum d'automorphismes possède au plus $\frac{1}{2} n(n-1) + 2$ paramètres, et il montre que ce nombre peut être diminué de $n-4$ unités, donc que le maximum est $M = \frac{1}{2} (n-1)(n-2) + 5$. Ce maximum est atteint pour $n = 4$ et $n = 6$ et il ne peut pas être atteint si $n \geq 7$.

Autoreferat.

Kuiper, N. H.: On the holonomic groups of the vector displacement in Riemannian spaces. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **54**, 445—451; *Indagationes math.* **13**, 445—451 (1951).

Die orientierten Kurven des Riemannschen Raumes V_n mit festgestelltem Anfangspunkte und Endpunkte P bilden eine Gruppe. Die parallele Übertragung der Vektoren in V_n bestimmt eine homöomorphe Abbildung dieser Gruppe auf die Gruppe H der orthogonalen Transformationen im tangentialen Raume $T(P)$, die die Holonomiegruppe in P genannt wird. Ist die Gruppe H irreduzibel, so wird V_n irreduzibel (in P) genannt. Mit Hilfe der Begriffe des Produktraumes (T. Y. Thomas 1939) und des direkten Produktes (F. A. Ficken 1939) beweist Verf. einige Sätze über die Zerlegung des Raumes V_n in das Produkt von irreduziblen Riemannschen Räumen mit irreduziblen Holonomiegruppen von der Dimension 1 bzw. mit nichtholonomen Gruppen, die mit normalen Untergruppen von der Dimension 1 oder 2 ausgestattet sind. Verf. gibt ferner die Klassifikation einer einfachen reellen und kompakten Lieschen Gruppe an. *Stanislaw Golab.*

Mishra, R. S.: On the congruence of curves through points of a subspace imbedded in a Riemannian space. *Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér.* **65**, 109—115 (1951).

In jedem Punkt einer V_n im V_m ($n < m$) seien $(m - n)$ Vektoren n_τ ($\tau = n + 1, \dots, m$) gegeben, die nicht im Tangentialraum T der V_n liegen sollen. Verf. definiert als τ -te „union curve“ eine solche Kurve in der V_n , deren Schmiegebene die Vektoren n_τ für ein festes τ enthält. (Anm. des Ref.: Sobald Verf. benutzt, daß es zu jedem n_τ eine union curve gibt, muß er voraussetzen, daß der 2-te Schmiegraum der V_n bereits mit der V_m identisch ist. Dies bedeutet für die Dimension der V_n im V_m die nicht formulierte Einschränkung: $\binom{n+1}{2} + n \geq m$.) Sind die n_τ orthogonal zu T , so werden die union-curves Geodätische. Verf. leitet an Hand der kennzeichnenden Differentialgleichung einer union curve (abgeleitet bei R. S. Mishra, dies. Zbl. **42**, 158) Beziehungen zwischen einer „union curvature“ und der geodätischen und normalen Krümmung her. Zum Schluß werden der Begriff der Schmiegebene, Normalebene und rektifizierenden Ebene einer Kurve im V_3 verallgemeinert. *Wilhelm Klingenberg.*

Sen, R. N.: On an algebraic system generated by a single element and its application in Riemannian geometry. III. *Bull. Calcutta math. Soc.* **43**, 77—94 (1951).

[Part I. this Zbl. **41**, 305, Part II. *Bull. Calcutta math. Soc.* **42**, 177—187 (1950).]

The author considers two functions $\psi(j)$ and $\chi(j)$ of the integers $j = 1, \dots, p$ ($p = 4n, n > 1$) with the properties: 1. The functions are linear and distinct and different from the identity. 2. $\psi(j)$ and $\chi(j)$ ($j = 1, \dots, p$) are cyclic permutations of $1, \dots, p$. 3. $\psi(\psi(j)) = \chi(\chi(j)) = j \pmod{p}$. 4. The sequence $j, \psi, \psi\chi, \psi\chi\psi, \dots$ is a cyclic sequence of order p . It is shown that these functions exist. The elements form a finite group. The properties of this group are studied. It is possible to construct a sequence of connections in a Riemannian space, which is closely connected with the above algebraic system (Compare part I). *Johannes Haantjes.*

Petrov, A. Z.: Über Räume, die Gravitationsfelder bestimmen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **81**, 149—152 (1951) [Russisch].

T_4 sei ein Einsteinscher Raum mit Fundamentaltensor g_{ij} von der Signatur $(---+)$. Die Bivektoren in einem Punkte bestimmen einen 6-dimensionalen Raum E_6 mit Fundamentaltensor $g_{\alpha\beta}$ ($g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk} \rightarrow g_{\alpha\beta}$) von der Signatur $(---++++)$. Der Krümmungsaffinor R_{kijh} ist ein Tensor $R_{\alpha\beta}$ in E_6 und $K = R_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$ die skalare Krümmung des Bivektors v^α . $R_{\alpha\beta}$ kann durch eine geeignete Wahl des orthogonalen Bezugssystems in eine Normalform gebracht werden. Nennt man zwei T_4 äquivalent, wenn die Normalformen der $R_{\alpha\beta}$ dieser Räume demselben Typus angehören, so wird eine Klassifikation der T_4 erhalten. Es gibt 7 Typen von Normalformen; die zugehörigen Charakteristiken werden an-

gegeben. Drei der korrespondierenden Klassen werden näher untersucht. Es stellt sich heraus, daß die T_4 mit einer $R_{\alpha\beta}$ der Charakteristik [(11) (11) (11)] ein holonomes orthogonales Bezugssystem gestattet, für welches die x^4 -Kongruenz geodätisch ist. Die Beweise fehlen; nur die Beweismethoden sind angegeben.

Johannes Haantjes.

Tachibana, Syun-ichi: On pseudo-parallelism in Einstein spaces. Tôhoku math. J., II. Ser. 2, 214—219 (1951).

Verf. betrachtet einen Einsteinschen Raum E_n mit einem positiv definiten Fundamentaltensor g_{ik} und mit $R = g^{ik} R_{ik} \neq 0$, wo R_{ik} durch Faltung aus dem Krümmungstensor entstanden ist. — Auf Grund der Resultate von S. Sasaki und K. Yano, die Verallgemeinerungen der Ergebnisse von Poincaré und Klein über Darstellungen der konformen und projektiven Räume bilden, bestimmt Verf. im E_n den Begriff eines A- bzw. B-Parallelismus von zwei geodätischen Linien, indem er die Möbiusschen bzw. projektiven Tangentialräume in Betracht zieht. Mit Hilfe dieser Begriffe bestimmt Verf. den Begriff des pseudo-parallelen Feldes von Einheitsvektoren und beweist den Satz, daß der Raum E_n , der n linear unabhängige pseudoparallele Felder zuläßt, von konstanter Krümmung ist. — Die Arbeit schließt mit einem Hinweis von S. Sasaki, daß die Ergebnisse auf beliebige Riemannsche Räume V_n verallgemeinert werden können.

Stanislaw Golab.

Lichnerowicz, André: Sur les variétés symplectiques. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 723—725 (1951).

Die erste Nr. dieser Note befaßt sich mit symplektischen Strukturen, deren alternierende quadratische Form in der gegebenen Metrik verschwindende kovariante Ableitungen hat. Es folgt aber aus einem Satz von Eckmann und Frölicher (dies. Zbl. 42, 405), daß diese Strukturen die Kählerschen sind. — Eine alternierende Differentialform heiße rein, wenn sie eine Eigenform der Abbildung $I [I^2 \varphi^p = (-1)^p \varphi^p]$ ist. In der zweiten Nr. wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür gegeben, daß für eine Form φ^p sowohl φ^p als auch $I \varphi^p$ harmonische Formen seien. Diese Bedingung wird in Nr. 3 dazu verwendet, in gewissen Fällen die Existenz reiner, geschlossener Formen der Klasse 0 sicherzustellen.

H. Guggenheimer.

Haimovici, Ad.: Espaces à métrique angulaire. Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 157—162, russische und französ. Zusammenfassgn. 162, 162—163 (1951) [Rumänisch].

Dans la transformation particulière (T): $x'^1 = x'^1(x^1)$, $x'^2 = x'^2(x^2)$, $dx'^0 = dx^0 + a_1 dx_1 + a_2 dx_2$ nous obtenons entre les coefficients de la connexion projective, les relations

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 \frac{dx'^2}{dx^2} &= \Gamma_{11}^2 \left(\frac{dx'^1}{dx^1} \right)^2, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^1 \frac{dx'^2}{dx^2}, \quad 2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 = (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \frac{dx'^1}{dx^1} + \frac{d^2 x'^1}{(dx^1)^2} \left| \frac{dx'^1}{dx^1} \right., \\ \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^2} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^0 &= \left(\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^2} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^0 \right) \frac{dx'^1}{dx^1} \frac{dx'^2}{dx^2}, \quad \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{1}{2} (\Gamma_{11}^1)^2 - 2\Gamma_{11}^0 + 2\Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 = \\ &= \left[\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{1}{2} (\Gamma_{11}^1)^2 - 2\Gamma_{11}^0 + 2\Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 \right] \left(\frac{dx'^1}{dx^1} \right)^2 - \{x'^1, x^1\} \end{aligned}$$

qui font intervenir les invariants Γ_{12}^2 , Γ_{12}^1 , $\partial \Gamma_{12}^2 / \partial x^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^0$ et trois invariants analogues où l'on échange 1 par 2, tandis que $2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1$, $\partial \Gamma_{11}^1 / \partial x^1 + \frac{1}{2} (\Gamma_{11}^1)^2 - 2\Gamma_{11}^0 + 2\Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2$ et leurs analogues sont des objets géométriques. Le dernier objet permet de prolonger un résultat donné par Ch. Vranceanu pour les cas d'une seule dimension. — L'A. montre qu'on peut toujours réduire les composantes Γ_{22}^1 , Γ_{11}^2 de la connexion à zéro et que cette propriété est conservée par la transformation (T), ce qui justifie l'utilisation de cette transformation. (Autoreferat.)

Schouten, J. A.: Sur les tenseurs de V_n aux directions principales V_{n-1} -normales. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. diff., Louvain du 11 au 14 avril 1951, 67—70 (1951).

Etant donné un tenseur covariant h_{ij} du second ordre dans un espace V_n à tenseur fondamental a_{ij} , il en existe un système de congruences orthogonales dans V_n de façon à avoir $a_{ij} = \lambda_i^h \lambda_j^h$, $h_{ij} = \varrho_h \lambda_i^h \lambda_j^h$ les λ_i^h étant les moments de ces

congruences. Le système de congruences est unique si les invariants ϱ_h sont distincts. En désignant avec $ds^a = \lambda_a^i dx^i$ les différentielles des arcs de ces congruences, si une équation $ds^a = 0$, par exemple $ds^1 = 0$ est complètement intégrable, elle définit une famille de V_{n-1} normaux à la congruence (1). Toutes les congruences sont V_{n-1} normaux, si les coefficients de rotation γ_{kl}^h de Ricci sont nuls pour $h \neq k \neq l$. — Tonolo a donné à ces conditions pour $n = 3$ une forme indépendante du système de congruences (λ). L'A. montre que si ϱ_a sont distincts et non nuls on peut donner à ces conditions la forme

$$h_{[j}^r h_{i]r,k} = h^{-1r}_{[j} h_{i]r,k} = h^{-1r}_{[j} h_{i]r,k}^{-1} = 0$$

où nous avons $h^{-1r}_{[j} h_{i]r,k} = a_{jl}$ et $h_{ir,k}$ sont les dérivées covariantes de h_{ij} . Si un des invariants ϱ_h est nul, on peut prendre au lieu de h_{ij} , $h'_{ij} = h_{ij} + \alpha a_{ij}$, où α est choisi de façon qu'aucun des ϱ'_h ne soit pas nul. Des considérations analogues on peut faire pour un tenseur h_j^i comme l'a montré Nijenhuis (ce Zbl. 42, 160).

G. Vranceanu.

Bompiani, Enrico: Significato del tensore di torsione di una connessione affine. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 273—276 (1951).

Let L_{lh}^i be an asymmetric connection and let us put $\Gamma_{lh}^i = \frac{1}{2} (L_{lh}^i + L_{hl}^i)$, $S_{lh}^i = \frac{1}{2} (L_{hl}^i - L_{lh}^i)$ = tensor of torsion. At any point x and for any infinitesimal displacement dx^i , the author defines the center-affine transformation $\xi^i = (\delta_h^i - S_{lh}^i dx^l) \xi^h$ which transforms the vectors ξ^i into the vectors $\bar{\xi}^i$. The parallel displacement defined by L_{lh}^i is then decomposed in this center-affine transformation plus the symmetric parallel displacement defined by Γ_{lh}^i . Some consequences are given.

Luis A. Santaló.

Vranceanu, Gh.: Espaces à connexion affine constante localement euclidiens. Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 29—32, russische und französ. Zusammenfassgn. 33, 33—34 (1951) [Rumänisch].

Dans l'étude des espaces à connexion affine $A_n(x^1, \dots, x^n)$, un cas particulier important est constitué par les espaces à connexion constante Γ_{jk}^i . Ce sont les espaces qui possèdent un groupe de transformations en eux mêmes simplement transitif abélien. Dans cette Note, l'A. considère l'équivalence en grand d'un tel espace, — localement euclidien — avec l'espace euclidien affine $E_n(u^1, \dots, u^n)$. Cette équivalence dépend de l'intégration de l'équation (1) $\partial^2 u / \partial x^i \partial x^j + \Gamma_{jk}^i \partial u / \partial x^k = 0$ où les Γ_{jk}^i sont des constantes réelles et satisfont aux conditions $\Gamma_{kf}^i \Gamma_{jl}^f - \Gamma_{lf}^i \Gamma_{jk}^f = 0$, qui expriment que le tenseur de courbure de A_n est nul. — On montre que si l'équation (1) possède des solutions de la forme $u = e^{\alpha_i x^i}$ où les α_i sont des constantes, l'espace A_n n'est pas équivalent en grand avec E_n . Si l'équation (1) possède des solutions $u = \alpha_i x^i$, on donne une condition suffisante pour que l'espace A_n soit équivalent en grand avec E_n . On montre que les solutions de (1) sont toujours des fonctions entières, donc la transformation $u^i = u^i(x^1, \dots, x^n)$ transforme l'espace A_n entier, dans une partie ou dans tout l'espace E_n et l'équivalence en grand existe, si les fonctions inverses $x^i(u^1, \dots, u^n)$ qui satisfont aux équations

$$\partial^2 x^i / \partial u^j \partial u^k - \Gamma_{rs}^i \partial x^r / \partial u^j \partial x^s / \partial u^k$$

sont, elles aussi, des fonctions entières, ce qui n'arrive pas en général. (Autoreferat.)

Adati, Tyuzi: On subprojective spaces. I. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 159—173 (1951).

Die Definition der subprojektiven Räume geht auf B. Kagan zurück. Für die subprojektiven V_n stellte Rachevsky notwendige und hinreichende Bedingungen auf, aus denen hervorgeht, daß diese Räume jedenfalls konform-euklidisch sind. Es wird hier bewiesen, daß eine V_n dann und nur dann konformeuklidisch ist, wenn es ein Koordinatensystem gibt, so daß

$$(1) \quad \left\{ \begin{matrix} x \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} = 2 \varphi_{(\mu} A_{\lambda)}^x + \varphi_{\mu \lambda} v^x,$$

wo v^α eine torsenbildendes Vektorfeld ist, d. h. einer Gleichung (2) $\nabla_\mu v^\alpha = \alpha A_\mu^\alpha + \beta_\mu v^\alpha$ genügt. Der erste Abschnitt behandelt torsenbildende, konzikulare, konkurrente und kovariant konstante kontravariante Vektorfelder. In II wird die zur Übertragung (1) gehörige Krümmungsgröße in $\varphi_\lambda, \nabla_\mu \varphi_\lambda, \varphi_\mu \lambda, \nabla_\nu \varphi_\mu \lambda, v^\alpha, \alpha$ und β ausgedrückt. Dabei treten die Affinoren $u_{\mu\nu}$ und $U_{\mu\nu\omega}$ auf, die später eine bedeutende Rolle spielen. In III—V werden die Rachevskyschen Bedingungen zu diesen Größen in Beziehung gesetzt. VI bringt den Schluß des Beweises, und es wird außerdem gezeigt, daß eine subprojektive V_n dann und nur dann eine S_n ist, wenn $U_{\mu\nu\omega}$ verschwindet. VII bringt einige Theoreme über konzikulare Vektorfelder, und es wird u. a. die Existenz solcher Felder in Beziehung gesetzt zur Existenz von Systemen von V_{n-1} mit lauter Umbilikalpunkten. In VIII werden weitere Eigenschaften der subprojektiven V_n erörtert, und es wird u. a. gezeigt, daß diese V_n sich auch charakterisieren lassen als konformeuklidische V_n , die eine konzikulare Transformation gestatten.

Jan Arnoldus Schouten.

Mihăileanu, N. N.: **Objets géométriques associés aux espaces à connexion projective P_2 .** Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 165—169, russische und französ. Zusammenfassgn. 169, 170 (1951) [Rumänisch].

En partant du fait qu'un espace P_1 à connexion projective à une dimension conduit à un objet géométrique du second ordre, l'A. considère un problème analogue pour un espace P_2 par rapport au groupe

$$(1) \quad x'^1 = x'^1(x^1), \quad x'^2 = x'^2(x^2), \quad dx'^0 = dx^0 + a_1 dx^1 + a_2 dx^2.$$

On montre que l'on obtient ainsi 12 relations entre les 12 coefficients Γ_{jk}^i ($i, j, k = 0, 1, 2$) de la connexion projective et les deux paramètres a_1, a_2 . L'élimination de ces paramètres nous dit que $\Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2, \partial \Gamma_{12}^2 / \partial x^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^0$ et les quantités analogues où l'on change l'indice 1 avec 2 sont des invariants relatifs tandis que $2 \Gamma_{12}^0 - \Gamma_{11}^1, \partial \Gamma_{11}^1 / \partial x^1 + \frac{1}{2} (\Gamma_{11}^1)^2 = 2 \Gamma_{11}^0 + 2 \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2$ et leurs analogues sont des objets géométriques du premier et du second ordre respectivement. On applique les résultats, au cas d'un espace A_2 à connexion affine et en particulier d'une surface et l'on justifie la considération du groupe (1), en utilisant un résultat du Réf. qui dit que l'on peut par un changement de variables annuler les composantes $\Gamma_{11}^2, \Gamma_{22}^1$.

G. Vranceanu.

Ichinohe, Akira: **Sur la possibilité de plonger un espace à connexion conforme donné dans un espace conforme.** Tôhoku math. J., II. Ser. 2, 193—204 (1951).

Dans l'ordre d'idées du théorème de M. Janet permettant de plonger un espace riemannien dans un espace euclidien, l'A. établit: on peut plonger (localement) un espace à n dimensions à connexion conforme normale donné dans un espace conforme à N dimensions, à connexion normale, à condition qu'on ait: $N \geq \frac{1}{2} n(n+1) - 1$.

Pierre Lelong.

Jastrebov, Ju. N.: **Verallgemeinerte Gruppenräume.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 161—164 (1951) [Russisch].

Die Arbeit betrifft die Geometrie der Gruppenmannigfaltigkeit, die durch eine stetige Transformationsgruppe definiert wird. In dieser Mannigfaltigkeit bestimmt Verf. mit Hilfe von zwei Eigenschaften zwei lineare Übertragungen (von verschwindender Krümmung), die ein gemeinsames System von geodätischen Linien besitzen, wobei diese geodätischen Linien von einparametrischen Untergruppen und ihren Nebenklassen gebildet werden. — Umgekehrt kann man, ausgehend von der Schar der geodätischen Linien, mit Hilfe der zwei oben erwähnten Eigenschaften die ursprüngliche Gruppe wiederherstellen. — Ferner verallgemeinert Verf. das Problem, indem nur eine von diesen Eigenschaften erfüllt wird. Für so definierte Räume P_n wird eine Reihe von Sätzen bewiesen.

Stanisław Golab.

Bochner, S.: **Complex spaces with transitive commutative groups of transformations.** Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 356—359 (1951).

Es wird folgendes Theorem bewiesen: V_{2k} , $k \geq 1$ sei ein (nicht algebraischer, nicht kompakter) komplexer $2k$ -dimensionaler Koordinatenraum. Wenn es $r \geq k$ holomorphe kontravariante Vektorfelder η_p^α ; $\alpha = 1, \dots, k$; $p = 1, \dots, r$, gibt, so daß der Rang der Matrix der η_p^α überall den maximalen Wert k hat und daß die

Klammersymbole

$$\varphi_{p^{\alpha}q^{\beta}} \equiv \eta_{p^{\beta}}^{\alpha} \frac{\partial \eta_{q^{\alpha}}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} - \eta_{q^{\beta}}^{\alpha} \frac{\partial \eta_{p^{\alpha}}^{\beta}}{\partial x^{\beta}}$$

identisch verschwinden, so gibt es k einfache Abelsche Integrale erster Art, durch welche der Raum holomorph und lokal eindeutig auf einen euklidischen Raum abgebildet wird. Ist V_{2k} kompakt, so ist der Raum ein komplexer Multitorus. In einer Schlußbemerkung wird die Konstruktion einer Kählerschen Metrik erörtert.

Jan Arnoldus Schouten.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Haantjes, J.: Sur la géométrie infinitésimale des espaces métriques. Centre Belge Rech.-math., Colloque Géom. diff., Louvain du 11 au 14 avril 1951, 91—97 (1951).

A désigne un arc rectifiable d'un espace métrique M , $d = d(q, s)$ la distance des points q et s de A , $l = l(q, s)$ la longueur du segment qs de A . La courbure $K(p)$ de A en p est définie comme la limite (finie), quand elle existe, de $(24(l-d)/d^3)^{1/2}$, les points q et s convergeant librement vers p en restant distincts [ce Zbl. 30, 75. Lire dans l'analyse $(24(l-d)/l^3)^{1/2}$ au lieu de $((l-d)/24 l^3)^{1/2}$]. La limite (finie), lorsqu'elle existe, de la courbure $\kappa(q, r, s)$ des triplets q, r, s de points de A vérifiant $q < r < s$ et contractant sur p , est la courbure de Menger $k(p)$. Théorème I: L'existence de $k(p)$ implique celle de $K(p)$ et leur égalité. Théorème II: Dans un espace euclidien les deux définitions de courbure sont équivalentes. Contre-exemple: $A = [0, 1]$, $d(x, y) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} \sin \frac{1}{t}$ où $t = |x - y|$; $K(p)$ existe en tout point de A et est $= 2$, $k(p)$ n'existe nulle part. Idée des démonstrations: (I) L'arc qs dans un voisinage $U(p, \delta)$ de p est subdivisé par les points p_1, p_2, \dots, p_N tels que $d(q, p_1) = d(p_1, p_2) = \dots = d(p_{N-1}, p_N) = \varepsilon$ et $d(p_N, s) \leq \varepsilon$, et $N\varepsilon$ soit $> l - \zeta$, ζ étant un nombre positif arbitraire. L'addition des inégalités $d(q, p_n) - d(q, p_{n-1}) > \varepsilon - \frac{1}{4} l^2 \varrho_2^2 \varepsilon$, $n = 2, \dots, N$ où $\varrho_2 =$ maximum de la courbure des triplets du segment qs , fournit pour un choix convenable de ζ et ε une évaluation de $l - d$ faisant intervenir les extrema ϱ_1 et ϱ_2 de la courbure des triplets du segment qs , d'où est déduite pour $\varrho \rightarrow 0$ l'existence de $K(p) = k(p)$. (II) L'existence de $K(p)$ étant postulée, celle de $k(p)$ dépend du comportement de $\sigma(q, r, s) = [d(q, r) + d(r, s) - d(q, s)]/l(q, r)l(r, s)l(q, s)$ pour les triplets de A ne convergeant pas régulièrement vers p , c'est-à-dire tels que $\omega = l(q, r)/l(r, s)$ ne reste pas entre deux bornes positives fixes. $l(r, s)$ étant supposée $\leq l(q, r)$, l'arc qs est subdivisé par les points p_0, p_1, \dots, p_{m+1} tels que $0 < l(q, p_0) < l(r, s)$, $l(p_i, p_{i+1}) = l(r, s)$ pour $i = 0, 1, \dots, m$ et $p_{m+1} = s$. Ainsi $p_m = r$, $m < \omega \leq m + 1$. Posant $Q_n = [d(p_{n-1}, p_n) + d(q, p_{n-1}) - d(q, p_n)]/d(p_{n-1}, p_n)$, $n = 1, \dots, m + 1$, l'auteur déduit de l'inégalité de Ptolémée pour les triplets q, p_{n-1}, p_n, p_{n+1} une inégalité pour $Q_{n+1} - Q_n$, d'où par calcul direct de ϱ_1 et sommation, une inégalité pour $[d(q, r) + d(r, s) - d(q, s)]/d(r, s)$ où n'entre pas m . Le résultat désiré $\lim \sigma(q, r, s) = (K^2(p)/4!)$ s'ensuit aisément. La démonstration ne faisant intervenir l'inégalité de Ptolémée que pour de petits quadruplets, Th. II est valable si M vérifie une inégalité de Ptolémée „approximative“, par exemple si M est un espace elliptique ou hyperbolique (ce Zbl. 42, 406), plus généralement pour tout arc A dont la courbure supérieure de Wald est finie en chaque point. Dans le contre-exemple une suite régulière fournit une courbure de Menger $= 2$, une suite irrégulière en fournit une valeur 13/24.

Chr. Pauc.

Waag, E. J. van der: Equivalence d'arc et de corde. I. II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 390—403, 404—417; Indagationes math. 13, 390—403, 404—417 (1951).

Es werden zunächst einige Verallgemeinerungen des Mittelwertsatzes der

Differentialrechnung für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen besprochen. Daran schließen sich Betrachtungen über gebundene und freie Limiten des zweiten Differenzenquotienten einer reellen Funktion einer reellen Veränderlichen. — Im Punkt O einer rektifizierbaren Kurve \mathfrak{C} (im E_n) heißt der „Bogen“ \widehat{OX} äquivalent zur „Sehne“ OX , wenn $\lim \widehat{OX}:OX = 1$ ($X \in \mathfrak{C}$). Diese Definition ist gleichwertig mit folgender: $\lim \widehat{XY}:XY = 1$, wenn $X, Y \in \mathfrak{C}$ und $X, Y \rightarrow O$ derart, daß O stets auf \mathfrak{C} zwischen X und Y liegt; vorausgesetzt ist dabei, daß in O die gewöhnliche Tangente an \mathfrak{C} existiert (d. h. die Halbtangenten an \mathfrak{C} in O existieren und ihre Vereinigung ist eine volle Gerade). Man spricht von uniformer Äquivalenz, wenn $\lim \widehat{XY}:XY = 1$, wie auch X und Y gegen O konvergieren. Für eine in der Umgebung U von O rektifizierbare Kurve herrscht im Punkt O uniforme Äquivalenz genau dann, wenn für U eine Parameterdarstellung $p(t)$ existiert derart, daß $p(0) = O$ und $\lim |p(t_1) - p(t_2)|:|t_1 - t_2|$ existiert und nicht Null ist, wenn t_1, t_2 irgendwie gegen 0 konvergieren. — Man sagt, ein (variables) Dreieck „plattet sich ab“, wenn (mindestens) einer seiner Winkel gegen Null konvergiert. Es wird durch ein Beispiel gezeigt: Der folgende Satz von G. Bouligand ist nicht umkehrbar: Wenn auf einer rektifizierbaren Kurve $p(t)$ uniforme Äquivalenz im Punkt O herrscht, dann plattet sich das Bilddreieck der Urbilder t_1, t_2, t_3 ab, falls die t_i irgendwie gegen Null konvergieren. Wegen weiterer Einzelheiten sei auf die Arbeit selbst verwiesen.

Otto Haupt.

Viola, Tullio: Sul comportamento d'una porzione di superficie regolare, in prossimità del contorno. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 1—23 (1951).

G. Scorza Dragoni (ce Zbl. 15, 42) a construit une surface quarrable $z = f(x, y)$ limitée par une courbe simple fermée Γ présentant en un point P de Γ la singularité suivante: il existe un nombre c positif et un voisinage W de P sur Γ tel que toute courbe rectifiable γ joignant sur la surface deux points P' et P'' de $\Gamma \cap W$ de part et d'autre de P et ne rencontrant Γ qu'en P' et P'' , ait une longueur $L(\gamma) > c$. L'A. relie ce phénomène à ceux qu'il a étudiés dans des publications antérieures (ce Zbl. 37, 247; 39, 180; 40, 177). S'inspirant de Scorza Dragoni il construit une surface quarrable Σ limitée par le contour $ABCD$ d'un rectangle Ω jouissant de la propriété (α): quel que soit le segment $A'B'$ de AB et la suite de courbes γ'_n situées à l'intérieur de Σ et convergeant vers $A'B'$, $\lim L(\gamma'_n) = \infty$. Esquisse — l : nombre positif fixe choisi convenablement, ε : nombre fixe entre 0 et 1, $\delta = (1 - \varepsilon)/\sqrt{2}$, η_1, η_2, \dots : suite fixe décroissante de nombres positifs tendant vers zéro, n, k : nombres entiers positifs impairs quelconques, Ω : rectangle du plan des (x, y) de sommets $(0, 0), (1, 0), (0, \lambda), (1, \lambda)$ où $\lambda = l + 2\eta_1$, $s_{n,k}$: segment d'extrémités $P'_{n,k} = (k/2^n, \eta_n)$, $P''_{n,k} = (k/2^n, l\delta^{n-1} + \eta_n)$, $q_{n,k}$: carré perpendiculaire au plan des (x, y) construit sur $s_{n,k}$ dans le demi-espace $z \geq 0$, Σ' : surface déduite de Ω par adjonction des $q_{n,k}$ comptés deux fois, exception faite des points $P'_{n,k}, P''_{n,k}$ et des côtés distincts de $s_{n,k}$. Ces carrés verticaux jouent le rôle d'obstacles, obligeant toute courbe intérieure à Σ' , se rapprochant de AB , à s'allonger indéfiniment. Ce résultat est déduit immédiatement de la proposition plane suivante: pour toute suite $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ de courbes de Ω sans points communs avec AB , contournant les obstacles et tendant vers AB , $\lim L(\gamma_n) = \infty$. La même proposition vaut pour tout segment $A'B'$ de AB . Σ est déduite de Σ' écartant les faces doubles de $q_{n,k}$ et émoussant les arêtes de manière à obtenir une surface représentable par $z = f(x, y)$, f admettant des dérivées partielles continues d'ordre arbitrairement élevé. Σ présente pour un observateur se déplaçant horizontalement suivant un segment $(0, \eta), (1, \eta)$ une succession d'ondulations régulières transversales n'atteignant pas AB , devenant de plus en plus fréquentes quand $\eta \rightarrow 0$. Transformation de Σ en Σ^* : Aucun point de AB ne présente la singularité de Scorza Dragoni. Afin de réaliser celle-ci, Σ est transformée en Σ^* par $\varrho = y, \theta = \pi x$ (ϱ, θ : coordonnées polaires dans le plan des (x, y)), z restant inchangé. AB est contracté en $P^* = (0, 0, 0)$. Σ^* est limitée par le segment A^*B^* où $A^* = (-1, 0, 0)$, $B^* = (1, 0, 0)$ et une demi-circonférence. Σ^* présente des ondulations disposées en éventail autour de P^* et possède la propriété β : quelle que soit la suite de courbes γ_n^* ayant leurs extrémités sur A^*B^* de part et d'autre de P^* , dont tous les points, sauf ces extrémités, sont intérieurs à Σ^* et qui convergent vers P^* , $\lim L(\gamma_n^*) = \infty$. Conjonction α & β : L'A. a cherché sans succès à réaliser α et β simultanément le long d'un segment du contour d'une surface quarrable. Par altération répétée de Σ il est parvenu, tout en maintenant α , à obtenir le phénomène β aux points d'un ensemble dénombrable dense sur AB .

Christian Pauc.

Levi, F. W.: On Helly's theorem and the axioms of convexity. J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 65—76 (1951).

Verf. zeigt, daß die Gültigkeit des bekannten Helly-Radonschen Theorems (Theorem H) nicht auf den seiner klassischen Formulierung zugrunde liegenden euklidischen Raum beschränkt ist. — Für eine Klasse \mathfrak{C}^0 von Teilmengen eines abstrakten Raumes werden vier Axiome C_1, C_2, C_3, C_4 formuliert, durch welche die konvexen Mengen des Raumes charakterisiert sind. Die umfassendere Klasse \mathfrak{C} , für welche nur die zwei ersten Axiome C_1, C_2 verbindlich sind, enthält die semikonvexen Mengen. Ein geeignet gefaßtes Theorem H gilt dann für semikonvexe Mengen. Die beiden hier verantwortlichen Axiome seien hier wiedergegeben: C_1 : Der Durchschnitt beliebig vieler zu \mathfrak{C} gehörenden Mengen soll wieder zu \mathfrak{C} gehören. — Dieses Postulat gestattet bereits die Bildung der konvexen Hülle $|T|$ einer Menge $T \subset T'$, welche wenigstens in einer zu \mathfrak{C} gehörenden Menge T' enthalten ist; $|T|$ ist der Durchschnitt aller Mengen T' . Für eine endliche Menge $T = (P_1, \dots, P_n)$ von „Punkten“ P_i setzt Verf. $|T| = |P_1 \dots P_n|$. — C_2 : Ist $m > n$ und gilt $Q_1, \dots, Q_m \subset |P_1 \dots P_n|$, so gibt es eine Permutation i_1, \dots, i_m der Indizes $1, \dots, m$ und eine natürliche Zahl $r < m$, so daß der Durchschnitt von $Q_{i_1} \dots Q_{i_r}$ und $Q_{i_{r+1}} \dots Q_{i_m}$ nicht leer ist. — Innerhalb einer Klasse \mathfrak{C} gilt das Theorem H in der folgenden Form: Sind $N > n$ semikonvexe Mengen K_1, \dots, K_N in der konvexen Hülle $|P_1 \dots P_n|$ von n Punkten enthalten, und haben je n beliebig ausgewählte Mengen K_i einen nicht leeren Durchschnitt, so gilt das nämliche für alle N Mengen K_i . — Verf. zeigt weiter, daß die Klasse der „konvexen“ Mengen eines n -dimensionalen Raumes, für den die Axiome der Inzidenz und Anordnung (D: Hilbert) gelten, eine Klasse \mathfrak{C} im oben erörterten Sinne darstellt. Die Axiome C_1 und C_2 werden gefolgert und somit ist die Gültigkeit eines Theorems H sichergestellt. — Verschiedene Anwendungen werden skizziert. Die Klasse derjenigen Elementenkomplexe einer Gruppe G , welche aus den Untergruppen von G durch Tilgung des Einselementes hervorgehen, kann die Axiome C_1 und C_2 erfüllen; in diesem Fall nennt Verf. G semikonvex. So ist z. B. jede freie Abelsche Gruppe mit n Erzeugenden semikonvex, und es gilt das Theorem H . — Abschließend werden einige Eigenschaften besprochen, die sich auf die auf den vier Axiomen C_1 bis C_4 basierende Konvexgeometrie beziehen.

Hugo Hadwiger.

Valentine, F. A.: Arcwise convex sets. Proc. Amer. math. Soc. 2, 159—165 (1951).

All sets considered here are plane point sets. The author terms a continuum S unilaterally connected if each pair of points x, y in S lies in a subcontinuum of S which is contained in one of the closed half-planes determined by the line passing through x, y . A set S is called arcwise convex if each pair of its points can be joined by a convex arc lying in S . Theorem: Each component of the complement of an unilaterally connected continuum is an arcwise convex set. Let x be a point of S such that every point of S can be joined to x by a convex arc lying in S ; let us denote by $K(S)$ the set of these x . Theorem: If S is a simply connected closed set, then $K(S)$ is an arcwise convex set.

István Fáry.

Valentine, F. A.: A characterization of simply connected closed arcwise convex sets. Proc. Amer. math. Soc. 2, 778—780 (1951).

A necessary and sufficient condition that a simply connected closed set $S \subset E_2$ be arcwise convex is that it be unilaterally connected (see preceeding review).

István Fáry.

Locher-Ernst, L.: Polarentheorie der Eilinen. Elemente Math. 6, 1—7 (1951).

Verf. zeigt, wie sich für beliebige (nicht-algebraische) Eilinen eine Polarentheorie entwickeln läßt: Bezeichnet k eine solche Kurve, π deren Ebene und P einen willkürlichen Punkt von π , so kann jedem Strahl s des Büschels $P(s \dots)$ von π der Schnittpunkt P' der in den beiden Punkten $[ks]$ vorhandenen Kurventangenten zugewiesen werden. Die Gesamtheit der Punkte P' erfüllt eine Kurve $l(P \dots)$; jede Tangente von $l(P \dots)$ ist eine „Polare“ von P . In dualer Weise werden die „Pole“ einer Geraden definiert. Verf. zeigt insbesondere, wie diese Konstruktionsvorschrift für diejenigen Punkte P von π ausgeführt werden kann, aus denen sich an k reelle Tangenten legen lassen, und illustriert die Theorie durch eine Reihe eindrucksvoller Abbildungen.

Heinz Horninger.

Valentine, F. A.: A class of convex curves related to the conic sections. Amer. math. Monthly 58, 671—674 (1941).

Let L and S be two disjoint closed convex sets in the plane. For any point x let $L(x)$ and $S(x)$ designate the distance from x to L and to S respectively. Let C denote the set of points x for which $S(x) \leq e L(x)$ ($e > 0$). If L is a straight line and S a point, then it is well known that C is bounded by a conic section. If L is a straight line and S any closed convex set, then C (1) is a bounded convex set, (2) an unbounded convex set, (3) consists of two unbounded convex sets, according to whether (1) $e < 1$, (2) $e = 1$, (3) $e > 1$. If $e > 1$, then each component of C has two asymptotes whose slopes are $\pm \sqrt{e^2 - 1}$. If $e < 1$ let L_x and L_y be two lines of support to C , parallel to L , and let L^* be the middle line between them. Let further L_ξ and L_η be two lines of support to S , parallel to L , and let L' be the middle line between them. Then if c is the distance between L^* and L' , and $2a$ is the distance between L_x and L_y , we have $c = e a$. János Horváth.

Green, John W.: A note on the chords of a convex curve. *Portugaliae Math.* 10, 121—123 (1951).

w sei die Breite (minimaler Abstand zweier paralleler Stützgeraden) einer Eilinie C . Verf. zeigt: Es gibt stets zwei zueinander senkrechte Stützgeraden von der Art, daß die Verbindungssehne ihrer Berührungspunkte eine Länge $l \geq w/\sqrt{2}$ hat. C ist ein Kreis, wenn sich diese untere Schranke nicht übertreffen läßt. Der Beweis arbeitet mit C umschriebenen Rechtecken und in diese einbeschriebenen Vierecken: Sind a, b die Seiten eines solchen Rechtecks $a \geq b$, so hat eine Seite des Vierecks die Länge $\geq b/\sqrt{2}$; es ist $a = b$, wenn keine Seite eines einbeschriebenen Vierecks größer als $b/\sqrt{2}$ ist. Wilhelm Süß.

Favard, J.: Sur quelques problèmes de couvercles. *Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. diff., Louvain du 11 au 14 avril 1951*, 37—49 (1951).

Let C be a convex body of volume V and area S and denote: $r(C)$ = radius of the smallest circular cylinder circumscribed to C ; $\sigma_e(C, d)$ [$\lambda_e(C, d)$] = area [length] of the cross section of the cylinder circumscribed to C parallel to the direction d ; $\sigma_i(C, d)$ [$\lambda_i(C, d)$] = maximum of the areas [lengths] of the plane sections of C perpendicular to the direction d ; $r(S, V)$ = minimum of $r(C)$; $\pi R^2(S, V)$ = maximum of $\sigma_i(C, d)$. The author shows: a) $r(C) = r(S, V)$ only when C is a circular cylinder with two half spheres as bases (proof based on an isoperimetric inequality of Bonnesen); b) $\sigma_e(C, d) \geq \sigma_i(C, d) \geq \pi r^2(S, V)$; c) $\lambda_e(C, d) \geq \lambda_i(C, d) \geq 2\pi r(S, V)$; d) $\sigma_i(C, d) = \pi R^2(S, V)$ only when C is the symmetric „lens“ (intersection of two spheres of the same radius) and the direction d is that of the axis. Some general analytic considerations referring to problems of the kind above considered are also given. Luis A. Santaló.

Rogers, C. A.: The closest packing of convex two-dimensional domains. *Acta Math.* 86, 309—321 (1951).

Hauptergebnis: Sind in einem ebenen konvexen Gebiet vom Inhalt T n kongruente homothetische konvexe Scheiben vom Gesamtinhalt t eingelagert, so ist die Lagerungsdichte (*) $D = t/T \leq n\Delta/(n + \Delta - 1)$, wobei Δ die Dichte der dichtesten gitterförmigen Packung der Scheiben bedeutet. Hieraus folgt die bemerkenswerte Tatsache, daß die dichteste homothetische Lagerung von unendlich vielen kongruenten konvexen Scheiben gitterförmig ist. Die Ungleichung (*) ist mit einer Abschätzung des Ref. (dies. Zbl. 37, 221) analog, aus der sich die genannte Folgerung von (*) im Falle zentralsymmetrischer Scheiben sogar für nicht parallel orientierte Scheiben ergibt. Im Falle von Kreisscheiben ist (*) etwas schwächer als die für $n \geq 2$ gültige Abschätzung des Ref. $D < \Delta = 0,9069 \dots$ (s. z. B. dies. Zbl. 40, 385). László Fejes Tóth.

Hadwiger, H.: Translationsinvariante, additive und stetige Eibereichfunktionale. *Publ. math., Debrecen* 2, 81—94 (1951).

Den Untersuchungen liegt die Menge der Funktionale $\varphi(A)$ über der Menge der beschränkten,

abgeschlossenen und konvexen Bereiche A der Ebene zugrunde. Für diese Eibereichfunktionale werden die folgenden Bedingungen formuliert: (I) Translationsinvarianz: $\varphi(A) = \varphi(A')$, wenn A' aus A durch eine Translation gewonnen wird. (II) Additivität: $\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A + B)$ falls der Eibereich $A + B$ durch die Sehne $S = AB$ in die beiden Teilbereiche A und B zerlegt wird. (III) Stetigkeit: $\varphi(A^n) \rightarrow \varphi(A)$, wenn für $n \rightarrow \infty$ die Bereichfolge A^n im üblichen Sinne gegen A konvergiert. (IV) Beschränktheit: $|\varphi(A)| \leq M$, wenn A einem festen Einheitskreisbereich angehört und M eine nur von φ abhängige Konstante bedeutet. (V) Monotonie: $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ für $A \subset B$. — Betrachtet werden nur Eibereichfunktionale, die translationsinvariant (I) und additiv (II) sind und einer der weiteren Bedingungen (III), (IV) oder (V) genügen. Für die dadurch bestimmten Mengen von Eibereichfunktionalen gilt dann die Ordnungsrelation

$$(1) \quad T(I, II, V) \subset M(I, II, III) \subset N(I, II, IV).$$

Das Hauptziel des Verf. ist eine vollständige Charakterisierung der stetigen, translationsinvarianten und additiven Funktionalen $\varphi(A)$ zu geben, für die er als Ausweitung eines früher erzielten Resultates für ebensolche Funktionale konvexer Polygone (dies. Zbl. 36, 120) die Darstellung

$$(2) \quad \varphi(A) = \alpha + L_\beta(A) + \gamma F(A)$$

findet. Darin bedeuten α, γ willkürliche Konstanten, $F(A)$ den Flächeninhalt und $L_\beta(A) = \int \beta(\xi) d\xi$ das Randintegral einer stetigen periodischen Funktion $\beta(\xi)$ des Normalenwinkels ξ der Stützgeraden von A . Die Darstellung (2) ist eindeutig bis auf additiv hinzutretende Nullfunktionale $\varphi_0(A) = L_{\beta_0}(A)$ mit $\beta_0(\xi) = p \cos \xi + q \sin \xi$, über deren frei wählbare Konstanten p und q durch die Vorschreibung geeigneter Nebenbedingungen verfügt werden kann. Wegen (1) gilt dieses Hauptergebnis auch für die Funktionalen der Menge T . An einem Beispiel wird schließlich gezeigt, wie sich die in der Darstellung (2) auftretenden Konstanten α, γ und die Funktion $\beta(\xi)$ bestimmen lassen, wenn die Werte des Funktionalen für die Bereiche eines Basissystems gegeben sind. Wird die Translationsinvarianz (I) durch die stärkere Forderung der Bewegungsinvarianz ersetzt, dann gilt

$$\varphi(A) = \alpha + \beta L(A) + \gamma F(A),$$

wobei α, β, γ willkürliche Konstanten und $L(A)$ und $F(A)$ den Umfang und den Flächeninhalt von A bedeuten. R. Inzinger.

Santaló, Luis A.: Die Wahrscheinlichkeit in den geometrischen Konstruktionen. Ann. Soc. ci. Argentina 152, 203—229 (1951) [Spanisch].

Eine Sammlung von Beispielen zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten. Zunächst werden für ein Dreieck 3 Elemente (z. B. die Seitenlängen oder die Höhen) vorgegeben und nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß es dazu ein Dreieck gibt. Dann folgen projektive Aufgaben, z. B.: Gegeben 2 Geradenpaare durch einen Punkt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die durch sie bestimmte Involution elliptisch wird? Zum Schluß verwandte Aufgaben der Darstellenden Geometrie. Wilhelm Blaschke.

García Alvarez, M.: Kontinuierliche Wahrscheinlichkeiten. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 11, 243—256 (1951) [Spanisch].

Elementary exposition of geometrical probability.

Stefan Vajda.

Topologie:

• **Urysohn (Uryson), P. S.: Arbeiten zur Topologie und zu anderen Gebieten der Mathematik. Band I, II.** Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1951. S. 1—512, 513—992. R. 19,75; 18,65 [Russisch].

Die vorliegende Gesamtausgabe der mathematischen Arbeiten von Urysohn wurde von der Moskauer Mathematischen Gesellschaft angeregt und von P. Alexandroff redigiert. Mit wenigen Ausnahmen beziehen sich diese Arbeiten alle auf Fragen der Topologie. In einem einleitenden Aufsatz gibt Alexandroff zunächst eine Darstellung des Lebenslaufes von Urysohn und seiner wissenschaftlichen Tätigkeit. Besonders die Zeit der Entstehung der Dimensionstheorie (1921/22) wird sehr lebhaft geschildert. Es folgt eine ausführliche Besprechung der Hauptergebnisse von Urysohn: Studium der normalen Räume, Metrisationssatz, Dimensionstheorie. Die Weiterentwicklung dieser Fragen bis in die neueste Zeit wird verfolgt, wobei das Weiterwirken der Urysohnschen Gedanken deutlich hervortritt. Ein längerer Abschnitt ist dem Prioritätsstreit Urysohn-Menger über die Begründung der Dimensionstheorie gewidmet. Nach ausführlicher Diskussion des Inhaltes der Mengerschen Arbeiten und Gegenüberstellung mit den Resultaten von Urysohn glaubt sich Alexandroff zu dem Schluß berechtigt, daß „der Vorrang von Urysohn vor Menger in der Begründung der Dimensionstheorie eine objek-

tive historische Tatsache ist, die die Möglichkeit ausschließt, Menger als mit Urysohn gleichberechtigten Mitverfasser dieser Theorie zu betrachten“. — Die eigentlichen Werke sind in drei Teile geteilt: im ersten sind die von Urysohn selbst verfaßten Arbeiten abgedruckt, unter ihnen insbesondere die Arbeit „Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen“, in der zum erstenmal das bekannte Urysohnsche Lemma auftritt, sowie der erste Teil der großen dimensions-theoretischen Arbeit „Mémoire sur les multiplicités cantorienes“. Der zweite Teil bringt die posthum herausgegebenen Arbeiten, unter ihnen den zweiten Teil der genannten dimensions-theoretischen Arbeit, die bekannten Arbeiten „Zum Metrisationsproblem“ und „Sur un espace métrique universel“. Der dritte Teil enthält die gemeinsamen Arbeiten von Alexandroff und Urysohn, insbesondere das große „Mémoire sur les espaces topologiques compacts“. Alle Arbeiten sind mit ausführlichen erläuternden und ergänzenden Anmerkungen versehen, die (mit drei Ausnahmen) von Alexandroff verfaßt sind. In ihnen wird insbesondere die Weiterentwicklung der betreffenden Fragestellung bis zur Gegenwart skizziert, z. B. wird zum Metrisationsproblem schon die wichtige Arbeit von Ju. Smirnov (dies Zbl. 42, 168) zitiert. Auf diese Weise entsteht ein klares und lebendiges Bild des tiefgreifenden Einflusses, den die Gedanken und Ansätze von Urysohn auf die Weiterentwicklung der Topologie gewonnen haben.

Ewald Burger.

Neves Real, Luis: Der Begriff des „Filters“, seine Beziehungen zur Limes-theorie und die Definition der reellen Zahlen. *Gaz. Mat., Lisboa* 12, 39—46 (1951) [Portugiesisch].

Exposé de caractère didactique des notions de filtre, limite, structure uniforme, espace uniforme, espace complet. Cet exposé est destiné comme introduction à un „Cours d'analyse de variable réelle“ que préparent actuellement plusieurs mathématiciens de Porto en collaboration. Malheureusement plusieurs inexactitudes et omissions se sont glissées dans le texte qui peuvent facilement tromper le débutant pour qui l'article a été écrit. Ainsi l'axiome „si $V \in \mathfrak{B}(x)$, il existe $W \in \mathfrak{B}(x)$ tel que pour tout $y \in W$ on ait $V \in \mathfrak{B}(y)$ “ concernant les systèmes de voisinages $\mathfrak{B}(x)$ a été oublié. Vers la fin de la page 40, l'A. dit que l'intersection de tous les voisinages d'un point x se réduit à $\{x\}$, sans avoir introduit au préalable aucun axiome de séparabilité. L'axiome F. 2. est inutile car il est une conséquence immédiate de F. 1. L'A. n'explique pas que la nécessité d'introduire des filtres s'impose dans les espaces où chaque point ne possède pas un système fondamental dénombrable de voisinages. Finalement l'omission la plus regrettable est celle du nom de Henri Cartan, à qui est due la notion du filtre.

János Horváth.

Arnold, B. II.: Birkhoff's problem 20. *Ann. of Math., II. Ser.* 54, 319—324 (1951).

Verf. beschäftigt sich mit den Beziehungen zwischen der Definition eines Raumes E mittels der abgeschlossenen Mengen (I) und der mittels Limesbeziehungen (II). Der Übergang von (I) zu (II) geschieht so: In der Menge E sei \mathfrak{F} das System der als „abgeschlossen“ bezeichneten Teilmengen von E ; die nicht leere gerichtete Menge $\{x_\alpha\}$ von Punkten x_α aus E heißt „konvergent gegen a “, $a \in E$, $\{x_\alpha\} \rightarrow a$, wenn es zu jedem a nicht enthaltenden F aus \mathfrak{F} ein x_{α_1} gibt, welches mit allen seinen Nachfolgern nicht in F enthalten ist. Der Übergang von (II) zu (I) geschieht folgendermaßen: \mathfrak{R} sei die Gesamtheit aller „Konvergenzrelationen“ $\{x_\alpha\} \rightarrow a$ in E ; $X \subseteq E$ heißt „abgeschlossen“, wenn mit $\{x_\alpha\} \rightarrow a$ und mit $x_\alpha \in X$ für alle α allemal $a \in X$. Zur Formulierung der Zusammenhänge bezeichne \mathfrak{S} die Gesamtheit aller formalen Paare $H = (\{x_\alpha\} \rightarrow a)$, bestehend aus einer gerichteten Menge $\{x_\alpha\}$ von Punkten aus E und aus einem weiteren Punkt a von E , ferner \mathfrak{C} das System aller Teilmengen X von E , und ϱ die folgende Relation: $X \varrho H$, d. h. $X \varrho (\{x_\alpha\} \rightarrow a)$ bedeutet: Wenn X eine konfinale Teilmenge von $\{x_\alpha\}$ umfaßt, dann ist a in X enthalten. Jedem Teilsystem \mathfrak{F} von \mathfrak{C} ordnet man zu die Menge \mathfrak{F}^* aller H aus \mathfrak{S} mit der Eigenschaft, daß $F \in \mathfrak{F}$ allemal $X \varrho H$ nach sich zieht; zu jedem Teilsystem \mathfrak{R} von \mathfrak{S} gehört die Menge \mathfrak{R}^+ aller X aus \mathfrak{C} mit der Eigenschaft, daß $K \in \mathfrak{R}$ allemal $X \varrho K$ zur Folge hat. Nun gilt: Zu (I) \rightarrow (II): Betrachtet man irgendein Teilsystem \mathfrak{F} von \mathfrak{C} als das System der „abgeschlossenen“ Teilmengen von E , so ist \mathfrak{F}^* gerade die Gesamtheit der „Konvergenzrelationen“ in E . Zu (II) \rightarrow (I): Besitzt das Teilsystem \mathfrak{R} von \mathfrak{S} die Eigenschaft, daß für jedes $(\{x_\alpha\} \rightarrow a)$ aus \mathfrak{R} und jede konfinale Teilmenge $\{x_{\alpha'}\}$ von $\{x_\alpha\}$ allemal $(\{x_{\alpha'}\} \rightarrow a)$ in \mathfrak{R} enthalten ist, so ist \mathfrak{R}^+ gerade die Gesamtheit der „abgeschlossenen“ Teilmengen von E . — G. Birkhoff hat bewiesen, daß $(\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{F}^*$ und $(\mathfrak{R}^+)^+ = \mathfrak{R}^+$. Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß die „Polaritätsbeziehungen“ $(\mathfrak{F}^+)^+ = \mathfrak{F}$ bzw. $(\mathfrak{R}^+)^* = \mathfrak{R}$ gelten; jene sind für das Erste im wesentlichen die Postulate für die abgeschlossenen Mengen eines topolo-

gischen Raumes, und für das Zweite naheliegende Postulate für den Limesbegriff. Die im Birkhoff'schen Problem (Lattice Theory, New York 1948, p. 57; dies. Zbl. 33, 101) ursprünglich definierte Relation ϱ mußte auf Grund eines Gegenbeispiels durch die obige ersetzt werden.

Georg Aumann.

Hanai, Sítiro: On N. Matsuyama's closure operators on general neighbourhood spaces. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 45—47 (1951).

N. Matsuyama (ce Zbl. 41, 97) a défini dans un espace topologique S des opérations de φ -fermeture généralisant l'opération de fermeture usuelle, et dépendant d'une fonction φ définie pour toutes les parties de S , ayant pour valeurs des parties de S , telles que $A \subset \varphi(A)$ et que $A \subset B$ implique $\varphi(A) \subset \varphi(B)$. L'A. poursuit l'étude de la comparaison des φ -fermetures pour les diverses fonctions φ .

Jean Dieudonné.

Marinescu, G.: Sur une mécanique générale. IV. Une relation d'équivalence. Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 141—144, russische und französ. Zusammenfass. 144, 144—145 (1951) [Rumänisch].

Pour les parties I—III v. Acad. Républ. popul. Române, Bul. Şti., Ser. Mat., Fiz., Chim. 2, 211—217, 575, 585. On montre que la notion de limite dans les lattices satisfaisant aux conditions I—V de la 1^{re} partie ne satisfait pas en général à la condition d'unicité. D'autre part, dans le lattice des ensembles fermés d'un espace métrique compact, la limite définie dans I satisfait à cette condition. Dans le § 4 on introduit une relation d'équivalence dans les lattices \mathcal{L} , satisfaisant aux axiomes I—V de I. Définition: Les éléments x et y de \mathcal{L} sont équivalents si x est inclus dans tout voisinage de y et y est inclus dans tout voisinage de x . Dans l'espace-quotient relativement à cette relation d'équivalence, la notion de limite satisfait à la condition de l'unicité.

Autoreferat.

Estill, Mary Ellen: Separation in non-separable spaces. Duke math. J. 18, 623—629 (1951).

Examples and results concerning separability in the sense of Moore's theory.

István Fáry.

Smirnov, Ju. M.: Einige Beziehungen in der Dimensionstheorie. Mat. Sbornik, n. S. 29 (71), 157—172 (1951) [Russisch].

Wie bekannt, führen die verschiedenen Definitionen der Dimension bei Räumen, die nicht metrisch-separabel sind, auf verschiedene Ergebnisse, die in gewissen Beziehungen zueinander stehen. Es seien: a) $\dim R$ die Dimension von R , bestimmt mittels der Überdeckungen von R , b) $\text{ind } R$ die Menger-Urysohn'sche Dimension von R bei Zugrundelegung von Umgebungen der Punkte von R , c) $\text{Ind } R$ die Menger-Urysohn'sche Dimension von R bei Zugrundelegung von Umgebungen der abgeschlossenen Mengen in R . Verf. beweist: Für normale Räume R mit der Eigenschaft, daß jede offene Überdeckung von R eine abzählbare Überdeckung enthält, gilt: $\dim R \leq \text{ind } R$. Es wird ein Beispiel eines normalen Raumes S konstruiert, für den $\text{ind } S = 1 < \text{Ind } S$ ist. Wird die maximale bikompakte Erweiterung des Raumes R mit βR bezeichnet, so gilt für vollkommen normale Räume (in denen jede offene Menge vom Typ F_σ ist): $\text{ind } \beta R = \text{Ind } R = \text{Ind } \beta R$.

Walter Thimm.

Colmez, Jean: Sur les espaces précompacts. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1552—1553 (1951).

In this note the author announces three series of results. The first concerns precompact spaces, or spaces with a uniform structure in which all the structures are precompact. The author has proved that if E is a completely regular space the following propositions are equivalent: (1) Every structure of E is precompact; (2) every numerical image of E which is continuous is bounded; (3) every metric, continuous image of E is compact; (4) any enumerable covering of E by open sets contains a finite number of open sets whose closures have a union containing E ; (5) every filter with an enumerable, open, basis has a contact point. — Another series of results generalize a result of J. Dieudonné [J. Math. pur. appl., IX. Sér. 23, 65—66 (1944)]. A uniform structure is said to be complete if it makes the space

complete. The author states conditions that a structure defined in a completely regular space be a complete structure. He then shows how this notion yields a generalization of compact spaces. — Thirdly the author defines locally precompact spaces. These are completely regular spaces, every point of which has a precompact neighbourhood. Some indications are given about a method allowing to develop for uniformly locally precompact spaces a theory of integration similar to the one developed in the case of locally compact spaces. *C. Racine.*

Kelly, L. M. and E. A. Nordhaus: Distance sets in metric spaces. Trans. Amer. math. Soc. **71**, 440—456 (1951).

Ist S eine Menge in einem metrischen Raum, so bezeichnen wir mit $D(S)$ die Menge der Entfernungen $\delta(x, y)$, $x \in S$, $y \in S$. $D(S)$ heißt die d -Menge der Menge S . Eine aus nichtnegativen Zahlen bestehende und die Null enthaltende Menge heiße eine n -Menge. Die Verff. ergänzen zuerst die Ergebnisse von Kelley (dies. Zbl. **43**, 167) mit den Sätzen: Eine nichtabzhlbare n -Menge N ist dann und nur dann die n -Menge eines separablen metrischen Raumes, wenn Null ein Häufungspunkt von N ist. Eine n -Menge N ist dann und nur dann die d -Menge eines separablen metrischen Raumes gegebener (Menger-Urysohn'scher) Dimension $k > 0$, wenn N ein mit Null beginnendes Intervall enthält. Es gibt n -Mengen N der Mächtigkeit $k + 1$ mit der Eigenschaft, daß jede n -Menge der Mächtigkeit $k + 2$, die N als Teilmenge enthält, im euklidischen Raum E_k realisierbar ist. — Dann untersuchen sie die Beziehungen zwischen der topologischen Struktur einer Menge S und der der zugehörigen d -Menge $D(S)$. — Eine n -Menge N heiße starr in bezug auf eine Klasse von Räumen, wenn sie in dieser Klasse realisierbar ist und alle ihre Realisierungen zueinander isometrisch sind. Sind diese Realisierungen zueinander homöomorph, so heißt die n -Menge N topologisch starr in bezug auf die betreffende Klasse. Keine n -Menge ist in bezug auf die Klasse aller metrischen Räume, oder aller separablen metrischen Räume, oder aller separablen metrischen Räume von gegebener Dimension k starr. Keine n -Menge ist in bezug auf die Klasse aller metrischen Räume topologisch starr. Eine n -Menge, deren positive Elemente eine positive untere Grenze haben, ist in bezug auf die Klasse aller separablen metrischen Räume dann und nur dann topologisch starr, wenn sie abzählbar unendlich ist. — Endlich wird die Existenz von n -Mengen, die in E_k realisierbar sind, in E_{k-1} aber nicht, untersucht, und die analogen Fragen in allgemeineren Entfernungsraumen werden auch in Angriff genommen.

kos Csszr.

Wang, Hsien-Chung: Two theorems on metric spaces. Pacific J. Math. **1**, 473—480 (1951).

The author has determined all the compact metric two-point homogeneous spaces [Ann. of Math., II. Ser. **55**, 177—191 (1952)]; he gives here some results pertaining to the non compact case. Let E be a finite dimensional, finitely compact, convex metric space in which each point possesses a neighbourhood W_p having the following property: each point $x \in W_p$, ($x \neq p$), can be joined to p by exactly one segment in E (i. e. by an isometric image of a closed interval with the usual metric). Theorems: a) E is a manifold, b) if E is odd dimensional and non compact, it is congruent either to the euclidean space or to the hyperbolic space. The proofs rely mainly on the study of spheres $K(p, \varepsilon)$ with centre p and sufficiently small radius ε , on which the compact group Γ_p of isometries leaving p fixed acts transitively and effectively; it is first shown that E contains an open set homeomorphic to the product of $K(p, \varepsilon)$ by an open interval, hence $K(p, \varepsilon)$ is locally connected, Γ_p is a Lie groupe (Montgomery-Zippin, this Zbl. **25**, 237) and $K(p, \varepsilon)$ and E are manifolds. The author then proves that $K(p, \varepsilon)$ is homeomorphic to the usual $(n - 1)$ -dimensional topological sphere therefore, by known results, Γ_p is either the orthogonal group $SO(n)$ or (for $n = 7$), the exceptional group G_2 . The paper ends with a detailed discussion of these two cases.

Armand Borel.

Swain, R. L.: Approximate isometries in bounded spaces. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 727—729 (1951).

Verf. beweist: Es sei M eine Teilmenge eines kompakten, metrischen Raumes S und $\eta > 0$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, daß, wenn T eine ε -Isometrie von M in S ist, eine Isometrie T' von M existiert mit $\delta(T(x), T'(x)) < \eta$ für jeden Punkt x aus S . [δ bedeutet den Abstand; T ist eine ε -Isometrie, wenn $|\delta(x, y) - \delta(T(x), T(y))| < \varepsilon$ ist für $x, y \in M$.]

Georg Nbeling.

Ganea, T.: Opérations à ensembles simplement connexes. Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 147—148, russische und französ. Zusammenfassgn. 149 (1951) [Rumänisch].

La connexion simple et le groupe fondamental étant définies selon C. Chevalley, Theory of Lie groups I (Princeton 1946), soit $\{F_\lambda\}$ une famille d'ensembles fermés dans l'espace compact, connexe et localement connexe E . Si toute intersection finie de parties F_λ est simplement connexe et l'intersection $F = \bigcap F_\lambda$ est localement connexe, F est simplement connexe. De même, si toute intersection finie de parties F_λ est dans la famille et si tout F_λ , ainsi que $F = \bigcap F_\lambda$, possède un espace de recouvrement simplement connexe, $\pi_1(F)$ est isomorphe à un rétracte de $\lim_{\leftarrow} \{\pi_1(F_\lambda); T_{\mu}^\lambda\}$, où $T_{\mu}^\lambda: \pi_1(F_\lambda) \rightarrow \pi_1(F_\mu)$ est un homomorphisme généré par la transformation identique $t_{\mu}^\lambda: F_\lambda \rightarrow F_\mu$, pour $F_\lambda \subset F_\mu$. Ces deux théorèmes n'ont pas lieu si l'on adopte les définitions du groupe fondamental et de la connexion simple basées sur la déformation des courbes fermées [v. K. Borsuk, Fundam. Math. 24, 154 (1935)]. — Suit une généralisation du théorème sur trois continus, ainsi que l'énoncé par lequel la connexion simple est cycliquement réductible et extensible. Autoreferat.

Ganea, T.: Transformations à petites tranches. Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 41—42, russische und französ. Zusammenfassgn. 42—43, 43 (1951) [Rumänisch].

Il existe un recouvrement ouvert ε de l'espace paracompact X à l'espace de recouvrement simplement connexe (\tilde{X}, f) , tel que pour tout ε -image Y de X , admettant un espace de recouvrement simplement connexe, $\pi_1(Y)$ contient un rétracte isomorphe à $\pi_1(X)$. Ce théorème n'a pas lieu pour le groupe fondamental défini à l'aide des déformations des courbes fermées ainsi qu'il est prouvé dans la Note de M. K. Borsuk (ce Zbl. 19, 333). Il en résulte que le continu acyclique, considéré par M. Borsuk (l. c.), n'admet que des espaces de recouvrement triviaux, sans être simplement connexe par déformation des courbes fermées. (Autoreferat.)

Burgess, C. E.: Continua and their complementary domains in the plane. Duke math. J. 18, 901—917 (1951).

In this paper are examined various combinations of conditions which ensure that a plane continuum M is indecomposable or is the sum of two proper subcontinua which are indecomposable (or at least one of which is indecomposable). These conditions involve the existence of compactly connected continua in M converging to M , or the existence of particular finite families of complementary domains of M in the plane S . Besides some subsidiary results and lemmas the following are the main results proved: If M is a continuum decomposable as a sum of two proper subcontinua but not as a sum of three continua no one of which is contained in the sum of the other two, then M is uniquely decomposable as the sum of two proper indecomposable continua. (Th. 1.) — If M_1, M_2, M_3, \dots is a sequence of mutually exclusive non-degenerate (i) compactly connected continua, (ii) continuous curves, converging to a continuum M , then there exists a sequence of (i) compact continua, (ii) arcs, T_1, T_2, T_3, \dots converging to M such that for each n (i) the continuum T_n is a subset of M_n irreducible between some two points, (ii) T_n is a subset of M_n . (Ths. 5 & 6.) — If every point of a continuum M is a boundary point of the sum of a finite number of complementary domains and further there exists a sequence of compactly connected continua in M converging to M , then either M is an indecomposable continuum or it is uniquely decomposable as the sum of two proper indecomposable subcontinua; further, under the same hypotheses, M is the boundary of just one complementary domain or the boundary of the sum of two complementary domains. (Ths. 7 & 8.) — When H is a closed set, and M is a continuum lying in $\text{cl}(S - H)$ and intersecting $(S - H)$ such that whenever three domains R_1, R_2, R_3 intersect M there exist three complementary domains of $M + H$ each intersecting each of the domains R_1, R_2, R_3 , then either M is an indecomposable continuum or it is uniquely decomposable as the sum of two proper indecomposable subcontinua. (Th. 10.) — If a continuum M containing no domain contains a sequence of mutually exclusive continuous curves converging to it, and further there exists a finite set G of complementary domains such that there is a domain intersecting M and lying in $M + G^*$ ($G^* =$ the union of the sets in G), then either M is indecomposable or is the sum of two of its proper subcontinua of which one is indecomposable. (Th. 11.) — The indecomposable continuum M is the boundary of a single complementary domain if there is a finite collection G of complementary domains, and a domain intersecting M lying in $M + G^*$. (Th. 12.) — Examples are also constructed to show (i) that in Th. 1 the possibility that „ M is the sum of three continua no one of which is contained in the sum of the other two“ has to be excluded; (ii) that in Th. 7 the word „finite“ cannot be omitted; (iii) that in Th. 8 it is not always true that there is a complementary domain with M as boundary; (iv) that when M is decomposable under the hypothesis of Th. 8 we cannot conclude that there exist two complementary domains of M ; and (v) that under the hypotheses of Th. 11 it is not necessary that, when M is decomposable as a sum of two proper subcontinua, both the subcontinua should be indecomposable. V. S. Krishnan.

Cairns, Stewart S.: An elementary proof of the Jordan-Schoenflies theorem. Proc. Amer. math. Soc. 2, 860—867 (1951).

Der Beweis zerfällt in drei Teile. Zunächst wird das Jordan-Schoenfliesche Theorem für Polygone bewiesen. Dann wird gezeigt: Unter der Voraussetzung, daß zur Jordan-Kurve c in der Ebene ein inneres Gebiet α gehört, kann die topologische Abbildung von c auf eine Kreislinie erweitert werden auf Teilgebiete von α , die α approximieren. Schließlich ergibt sich als Folgerung aus den ersten beiden Teilen, daß c ein und nur ein inneres Gebiet α bestimmt. *Künnetth.*

Miščenko, E. F.: Zur Homologietheorie der nicht-abgeschlossenen Mengen. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 587—592 (1951) [Russisch].

Diese Arbeit enthält einige Ergänzungen und Verschärfungen zu der Arbeit von Alexandroff über Dualitätssätze nicht-abgeschlossener Mengen der n -Sphäre (dies. Zbl. 33, 133). Wegen der Bezeichnungen vgl. das genannte Referat. 1. Die Komplementärmenge eines krummen gehäuteten Polyeders braucht kein krummes gehäutetes Polyeder zu sein. Verf. beweist jedoch, daß sie ein Homologieretrakt in bezug auf einen diskreten Koeffizientenbereich ist. Daher folgt aus dem Dualitätssatz für Homologieretrakte, daß in den Dualitätssatz für krumme gehäutete Polyeder die beiden Mengen A und B doch symmetrisch eingehen. 2. Es werden die Bedingungen, unter denen Alexandroff bewiesen hat, daß der natürliche Homomorphismus von $\Delta_c^p A$ in $D^p A$ ein Isomorphismus auf ist, abgeschwächt. 3. Es wird ein kürzerer Beweis des Dualitätssatzes für Homologieretrakte gegeben.

Ewald Burger.

Burger, E.: Über die Dualitätssätze für Homotopieketten. Ann. of Math., II. Ser. 54, 56—67 (1951).

Die Gruppen E, G, H seien Abelsche Gruppen mit dem Operatorenbereich Ω . Ist χ ein operatorentreuer Homomorphismus von E auf H , so heißt E, χ eine Erweiterung von G mit H , wenn der Kern von χ die (zulässige) Untergruppe G von H ist. Jeder Erweiterung von G mit H läßt sich ein Faktorensystem zuordnen (oder genauer eine Klasse äquivalenter Faktorensysteme), nämlich zwei Funktionen $f(h_1, h_2), g(\omega, h)$ mit Argumenten in H bzw. in Ω, H und Werten in G , die umgekehrt die Erweiterung bestimmen. Die Klassen äquivalenter Faktorensysteme bilden eine Gruppe $\text{Ext}(G, H)$. Dem Nullelement derselben entspricht die direkte Summe von G und H . Die Gruppe Ext ist eine Abelsche Gruppe. Falls Ω kommutativ ist oder falls G Doppelmodul bezüglich Ω ist, besitzt Ext auch Ω als Operatorenbereich. Ist H die Faktorgruppe einer freien Abelschen Gruppe F mit Ω als Operatorenbereich nach R , so läßt sich $\text{Ext}(G, H)$ aus Operatorhomomorphismen von R in G berechnen. — Mit diesen Ergebnissen lassen sich die Beweise für die Dualitätssätze für Überdeckungen von Komplexen einheitlich, d. h. ohne Aufspaltung der fraglichen Gruppen in Bettigruppen und Torsionsgruppen, führen, und zwar im wesentlichen durch Übertragung einer Beweisordnung von Eilenberg-MacLane für Gruppen ohne Operatoren.

Kurt Reidemeister.

Smith, P. A.: The complex of a group relative to a set of generators. I. II. Ann. of Math., II. Ser. 54, 371—402, 403—424 (1951).

I. Die Wege eines Komplexes K bilden ein Gruppoid $G(K)$, mit dessen Hilfe die Fundamentalgruppe von K sich direkt in $G(K)$ erklären läßt. Diese Tatsache gibt Anlaß, die Eigenschaften eines Gruppoids G mit ausgezeichneter Untergruppe V zu untersuchen und zwei Gruppen $p_n(G, V)$ ($n = 1, 2$) zu erklären, die für ein $G(K)$ mit der ersten und zweiten Homotopiegruppe von K identisch sind. Simplicialkomplexe geben Anlaß zu dem Begriff „lokale Gruppe“, welche durch ein System X von Erzeugenden x und gewisse Ersetzungsregeln $x_i x_k = x_l$ definiert ist. Eine lokale Gruppe bestimmt eine freie Gruppe $G(X)$ mit einem System definierender Relationen $V(X)$ und damit zwei Homotopiegruppen $p_n(X)$ ($n = 1, 2$). Eine lokale

Gruppe X , welche in eine Gruppe Q eingebettet ist, bestimmt einen Komplex $K(Q, X)$ mit $p_1(K) = p_1(Q, X)$ und $p_2(K) = p_2(X)$. Dadurch lassen sich universelle Komplexe $K(Q, X)$ mit $p_1(K) = 1$ definieren und analoge Eigenschaften wie für die universellen Überlagerungen für diese nachweisen. Ferner lassen sich notwendige und hinreichende Eigenschaften lokaler Gruppen für die Einbettbarkeit in Gruppen angeben.

II. Der zweite Teil beschäftigt sich mit der zweiten Homotopiegruppe für Komplexe $K(Q, X)$, für die $p_1(K) = 1$ ist. Es wird die Erweiterung E, φ einer lokalen Gruppe X erklärt und gezeigt: Wenn $p_2(K) = 1$ ist, so ist jede Erweiterung von X fortsetzbar über Q und umgekehrt. Der wesentliche Beweisschritt besteht in der Konstruktion einer Funktion $u(x)$ mit Werten in E , für die $u(x_1 x_2) = u(x_1)u(x_2)$ gilt. Die Fortsetzung über Q besteht zunächst in einer Fortsetzung für die Relationen in den x zu Relationen in den $u(x)$. Dies gelingt, weil bei $p_2(X) = 1$ nur Peifferidentitäten für die Relationen in den x bestehen und diese für beliebige Relationen erfüllt sind.

Kurt Reidemeister.

Keesee, John W.: On the homotopy axiom. Ann. of Math., II. Ser. 54, 247–249 (1951).

Cet article montre comment, avec les deux premiers axiomes de l'axiomatique d'Eilenberg-Steenrod, et la propriété dite „de continuité“, on peut démontrer l'axiome d'homotopie: Si h_t désigne l'injection de K dans $K \times I$ donnée par $h_t(x) = (x, t)$, $0 \leq t \leq 1$, la propriété de continuité montre que, pour toute classe e de la cohomologie de $K \times I$, on a: $h_r^*(e) = h_t^*(e)$, pour toute valeur r assez voisine de t . Il en résulte que $h_0^* = h_1^*$, et par suite l'axiome d'homotopie. Dans l'énoncé du „Reduction Theorem“, lire en troisième ligne: „containing X_0 “ à la place de „containing A “.

René Thom.

Hu, Sze-tsen: On the realizability of homotopy groups and their operations. Pacific J. Math. 1, 583–602 (1951).

J. H. C. Whitehead (dies. Zbl. 37, 396) hat bewiesen, daß es zu beliebig gegebener Folge von Gruppen $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$, wobei π_i für $i \geq 2$ abelsch ist und π_1 auf die höheren π_i operiert, ein (unendliches) Polytop gibt, für das die vorgegebenen Gruppen Fundamentalgruppe und höhere Homotopiegruppen sind. Verf. zieht auch die Whitehead-Produkte zwischen den höheren Homotopiegruppen in den Kreis der Betrachtung und beweist, daß es zu der vorgegebenen Gruppenfolge einen (stetig-zusammenhängenden) topologischen Raum gibt, der diese Gruppen als Fundamentalgruppe und höhere Homotopiegruppen hat und für den alle Whitehead-Produkte trivial sind. Hieraus folgt noch als spezielle Anwendung, daß die Whitehead-Produkte wesentliche Invarianten sind, d. h. daß sie im allgemeinen nicht schon durch die Homotopiegruppen und die Operationsweise der Fundamentalgruppe bestimmt sind.

Ewald Burger.

Uehara, Hiroshi: On a Hopf homotopy classification theorem. Nagoya math. J. 3, 49–54 (1951).

Verf. behandelt die folgende Verallgemeinerung des Hopfschen Satzes über die Homotopieklassen der stetigen Abbildungen eines n -dimensionalen Polyeders in die n -Sphäre. (Vgl. S.-t. Hu, dies. Zbl. 32, 432): X sei ein kompakter Hausdorffscher Raum mit $\dim(X) \leq n$, und Y sei ein zusammenhängender absoluter Umgebungsretrakt mit $\pi_r(Y) = 0$ für $r < n$. Die Homotopieklassen der stetigen Abbildungen von X in Y lassen sich eindeutig den Elementen der n -ten Čechschen Cohomologiegruppe $H^n(X, \pi_n(Y))$ von X mit Koeffizientengruppe $\pi_n(Y)$ zuordnen. — Der Beweis erfolgt unter Verwendung von Methoden („bridge“ und „bridge mapping“), die S.-t. Hu (loc. cit.) entwickelt hat.

Friedrich Hirzebruch.

Shimada, Nobuo und Hiroshi Uehara: On a homotopy classification of mappings of an $(n+1)$ dimensional complex into an arcwise connected topological space which is aspherical in dimensions less than n ($n > 2$). Nagoya math. J. 3, 67–72 (1951).

Es werden die Homotopieklassen von Abbildungen eines Raumes X in einen Raum Y , welcher bis zur Dimension $n - 1$ asphärisch ist, (in Verallgemeinerung dieses Satzes für den Fall, daß Y eine n -dimensionale Sphäre ist) angegeben. Seien $\pi_k(Y)$ die Homotopiegruppen von Y und $H_k(X, \pi_k(Y))$ die Kohomologiegruppen von X mit Koeffizienten aus $\pi_k(Y)$. Die $(n + 1)$ -dimensionalen Homotopieklassen der Abbildungen lassen sich durch eine Kohomologieklassse der Dimension n der Kohomologiegruppe von X und durch Elemente einer bestimmten Faktorgruppe von $H_{n+1}(X, \pi_{n+1}(Y))$ kennzeichnen. — Das Resultat ist 1950 ohne Mitteilung des Beweises schon von Postnikow (dies. Zbl. 37, 262) veröffentlicht.

Kurt Reidemeister.

Nakaoka, Minoru: On Whitney's extension theorem. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 2, 31—37 (1951).

Ce papier donne une démonstration du théorème d'extension de Whitney sur les applications d'un complexe de dimension 4 dans un espace Y simplement connexe. Utilisant le „complexe réduit“ de J. H. C. Whitehead, l'A. n'a aucune difficulté à montrer que la seconde obstruction, de dimension 4, est le carré de Pontrjagin de la classe caractéristique (de dimension 2), l'accouplement des coefficients $\pi_2(Y) \rightarrow \pi_3(Y)$ étant réalisé par l'opération η définie par l'application de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$.

René Thom.

Wada, Hidekazu: On the structure of a sphere bundle. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 136—139 (1951).

1. M^n sei ein $(n - m)$ -sphere bundle über S^m ($n > m \geq 2$, $M^n/S^{n-m} = S^m$), und es werde zusätzlich vorausgesetzt, daß die Homotopiegruppen $\pi_i(M^n)$ für $1 \leq i \leq m$ verschwinden. Aus der exakten Homotopiesequenz, die zu $M^n/S^{n-m} = S^m$ gehört, ergibt sich dann: $n = 2m - 1$. — 2. Die orientierbare Mannigfaltigkeit M^{2m-1} sei ein $(m - 1)$ -sphere bundle über S^m ($M^{2m-1}/S^{m-1} = S^m$) mit der Projektion π . π sei algebraisch unwesentlich (d. h.: jeder m -dimensionale Zyklus von M^{2m-1} wird durch π mit dem Abbildungsgrad 0 auf S^m abgebildet; die Fasern beranden in M^{2m-1}). Die Hopfsche Invariante γ von π ist dann definiert. Es gilt: Bei geeigneter Orientierung von M^{2m-1} ist $\gamma(\pi) = 1$. Verf. bespricht als Beispiel die Sphärefaserung $S^3/S^1 = S^2$. Anm. des Ref.: Der Satz 2 des Verf. ergibt sich auch aus der Arbeit von Gysin (dies. Zbl. 26, 270, Satz 42). Aus einem anderen Satz von Gysin folgt, daß es sphere bundles mit den unter 2. angegebenen Eigenschaften nur für gerades m geben kann. Diese sphere bundles besitzen Schnittflächen mit einer isolierten Singularität vom Index 1.

Friedrich Hirzebruch.

Hopf, Heinz: Über komplexanalytische Mannigfaltigkeiten. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 10, 169—182 (1951).

In diesem Vortrag (Rom 1950) berichtete Verf. über einige Ergebnisse und Fragestellungen aus der Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten: Eine komplexe Mannigfaltigkeit M^{2m} von m komplexen Dimensionen ist eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit von $2m$ reellen Dimensionen, die mit lokalen komplexen Koordinatensystemen so überdeckt ist, daß der Übergang von einem System zu einem anderen durch ein System von m regulären Funktionen von m komplexen Variablen erfolgt. (Es gilt dann: Die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation ist stets $\neq 0$.) Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist orientierbar. Zwei komplexe Mannigfaltigkeiten heißen analytisch äquivalent, wenn sie eineindeutig und analytisch aufeinander abgebildet werden können (analytisch: Die Abbildung wird in bezug auf lokale Koordinaten durch reguläre Funktionen beschrieben). — 1. Die singularitätenfreien algebraischen Mannigfaltigkeiten sind kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten. Es gibt kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten, z. B. die kartesischen Produkte $S^1 \times S^{2m-1}$ ($m > 2$, $S^k = k$ -Sphäre), die mit keiner algebraischen Mannigfaltigkeit homöomorph sind. (Die Bettischen Zahlen gerader Dimensionen einer algebraischen Mannigfaltigkeit sind positiv. Die 2. Bettische Zahl von $S^1 \times S^{2m-1}$ ist 0.) Die Klasse der topologischen Mannigfaltigkeiten gerader Dimensionen, die als komplexe Mannigfaltigkeiten auftreten können, ist also größer als die Klasse der topologischen Mannigfaltigkeiten, die algebraischen Mannigfaltigkeiten homöomorph sind. 2. Es ergibt sich daher die Frage: Welche orientierbaren topologischen Mannigfaltigkeiten M^{2m} treten als komplexe Mannigfaltigkeit auf? Für $m = 1$ gilt bekanntlich: Jede orientierbare Fläche kann zu einer Riemannschen Fläche gemacht werden. Für $m > 1$ ist

die Situation ganz anders: Verf. (dies. Zbl. 33, 25 und 39, 399) und C. Ehresmann (dies. Zbl. 39, 397) haben unabhängig voneinander bewiesen, daß auf der S^4 keine komplexe Struktur eingeführt werden kann. Verf. (loc. cit.) hat unendlich viele orientierbare M^4 angegeben, die nicht komplex sind. Diese Ergebnisse sind von prinzipieller Wichtigkeit. Sie haben zu der Aufgabe geführt, Methoden zur Entscheidung der Frage, ob eine vorgelegte orientierbare M^{2m} komplex ist oder nicht, zu finden. Jede komplexe Mannigfaltigkeit ist „fast-komplex“ (C. Ehresmann, loc. cit.). Eine (differenzierbare) M^{2m} heißt fast-komplex, wenn für jeden Punkt $p \in M$ eine lineare Abbildung \mathfrak{J}_p des Tangentialvektorraumes M_p^{2m} von p auf sich gegeben ist, die stetig von p abhängt und für die gilt: $\mathfrak{J}_p^2 = \text{Identität}$. Bisher ist jeder Beweis dafür, daß eine M^{2m} nicht komplex ist, so geführt worden: Man zeigt, daß M^{2m} nicht fast-komplex ist. Man kennt keine fast-komplexe Mannigfaltigkeit, die nicht komplex ist. S^6 ist fast-komplex (Kirchhoff, dies. Zbl. 30, 273). Es ist unbekannt, ob S^6 komplex ist. (Beachte in diesem Zusammenhang die Arbeiten von C. Ehresmann und P. Libermann, dies. Zbl. 42, 159, und von B. Eckmann und A. Frölicher, dies. Zbl. 42, 159, in denen gezeigt wird, daß es keine komplexe Struktur der S^6 gibt, die die Kirchhoffsche fast-komplexe Struktur induziert.) Die Frage „fast-komplex oder nicht?“ kann mit topologischen Methoden angegriffen werden. Um den „Unterschied“ zwischen fast-komplex und komplex herauszuarbeiten, sind anscheinend feinere analytische Methoden erforderlich. — 3. Verallgemeinerung der Fragestellung von 2. Gegeben orientierbare M^{2m} . Wieviel verschiedene komplexe Strukturen für M^{2m} gibt es? Anders gesagt: Wieviel (nicht analytisch äquivalente) komplexe Mannigfaltigkeiten gibt es, die zu M^{2m} homöomorph sind? Für geschlossene Riemannsche Flächen ($m = 1$) wird diese Frage mit der Theorie der Moduln behandelt. S^2 (Geschlecht 0) besitzt genau eine komplexe Struktur. $S^1 \times S^1$ (Geschlecht 1) besitzt unendlich viele verschiedene komplexe Strukturen. — Ref. hat gezeigt (dies. Zbl. 43, 303): $S^2 \times S^2$ besitzt unendlich viele verschiedene komplexe Strukturen. — Es ist unbekannt, ob die komplex-projektive Ebene verschiedene komplexe Strukturen zuläßt. Ist eine algebraische Fläche, die zur komplex-projektiven Ebene homöomorph ist, eindeutig birational auf die komplex-projektive Ebene abbildbar? 4. Der σ -Prozeß. U sei eine komplexe Mannigfaltigkeit von 2 komplexen Dimensionen, o ein Punkt von U , σ sei die komplex-projektive Gerade (= Sphäre S^2) der komplexen Linienelemente in o . Man kann $\sigma \cup (U - o)$ in natürlicher Weise zu einer komplexen Mannigfaltigkeit machen, die also aus U durch Herausstechen von o und Einsetzen von σ hervorgeht. Dieser Prozeß ist aus der algebraischen Geometrie bekannt. Sind u, v lokale Koordinaten in einer Umgebung von o mit $o = (0, 0)$, dann kann man in der neuen komplexen Mannigfaltigkeit u, v außerhalb σ weiter als Koordinaten benutzen. Eine Umgebung von σ in der neuen Mannigfaltigkeit läßt sich mit Koordinatensystemen (u', v') , (u'', v'') überdecken. Koordinatentransformationen: $u = u', v = u'v'; u = u''v'', v = v''$. Durch $u' = 0$, bzw. $v'' = 0$ wird σ gegeben. Der σ -Prozeß ist rein lokaler Natur. Ein mehrfacher σ -Prozeß in o ist eine endlichfache Iteration des σ -Prozesses: In o wird $\sigma (= K_1)$ eingesetzt. (Auf endlich viele Punkte von σ wird dann der σ -Prozeß angewandt. o ist jetzt insgesamt durch eine Vereinigung K_2 von Sphären ersetzt worden. In der erhaltenen Mannigfaltigkeit wird auf endlich viele Punkte von K_2 der σ -Prozeß angewandt. o ist dann insgesamt durch eine Vereinigung K_3 von Sphären ersetzt worden ... usw. (endlich viele Schritte). — Geht U^* durch mehrfachen σ -Prozeß in o aus U hervor, dann gilt: o ist ersetzt worden durch eine Vereinigung K von Sphären σ_i , die als analytische Flächen (eine komplexe Dimension) singularitätenfrei in U^* eingebettet sind. [$U^* = K \cup (U - o)$.] Zwei Sphären von K schneiden sich nicht oder in genau einem Punkt einfach. Ein Punkt von K liegt auf höchstens zwei Sphären. Man kann K einen Streckenkomplex zuordnen: Jeder Sphäre von K entspricht ein Eckpunkt. Zwei Eckpunkte begrenzen genau dann eine Strecke, wenn die entsprechenden Sphären sich schneiden. Dieser Streckenkomplex ist zusammenhängend und zyklonfrei, also ein Baum. Man sagt daher: K ist ein Sphärenbaum. — U^* hat die folgende Eigenschaft (*): K ist kompakte Teilmenge von U^* . Es gibt eine analytische Abbildung von U^* auf U , die $U^* - K$ analytisch eineindeutig auf $U - o$ abbildet und K auf o abbildet. — Hat eine komplexe Mannigfaltigkeit U^* die Eigenschaft (*), dann sagt man: U^* geht durch analytisches Einsetzen von K in o aus U hervor, oder auch (vgl. Behnke-Stein, dies. Zbl. 43, 303): U^* ist (kompakte) Modifikation von U in o . Es ergibt sich die Frage nach allen Mannigfaltigkeiten U^* , die kompakte Modifikationen von U in o sind. Es gilt: Jede kompakte Modifikation von U in o kann man durch Anwendung eines mehrfachen σ -Prozesses auf o erhalten. K ist also stets ein Sphärenbaum. (Den Beweis dieses Satzes wird Verf. in den Math. Ann. veröffentlichen).

Friedrich Hirzebruch.

Jongmans, François: Les diviseurs de zéro de l'anneau de cohomologie des variétés kählériennes. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1254—1256 (1951).

Enoncé de conditions suffisantes entre les nombres de Betti d'une variété kählérienne V pour que le groupe H de cohomologie ait un diviseur de zéro: les énoncés paraissent insuffisamment établis au référent; si H est l'ensemble des formes harmoniques sur V , $\Phi \in H$, $\Psi \in H$ n'entraînent pas en général $(\Phi \wedge \Psi) \in H$, ainsi que l'A. paraît l'admettre.

Pierre Lelong.

Dubois-Violette: Étude des réseaux de courbes tracés sur une surface close et en général localement homéomorphes à un faisceau de droites parallèles. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 68, 267—325 (1951).

Lo scopo principale del lavoro, suddiviso in cinque parti, è lo studio dei reticolati R di curve tracciate su una superficie S semplice e chiusa, orientabile o non, di genere p e numero di connessione q . Nella prima parte l'A. studia l'effetto di strozzamenti della superficie (tagli lungo curve semplici e chiuse di S , non omologhe a zero su S , e identificazione di tutti i punti di ciascuno dei due bordi ottenuti) e determina un confine superiore per il numero di elementi che possono essere contenuti in un sistema di curve semplici e disgiunte, tracciate su S , il quale goda delle seguenti proprietà: le curve del sistema sono omotopicamente distinte, il sistema non è contenuto in sistemi più ampi che godano delle stesse proprietà (questo confine superiore è $3p - 2$ se S è orientabile, è $3q - 2$ se S non è orientabile). Nella seconda parte l'A. presenta uno studio preliminare dei reticolati R tracciati su una superficie (connessa) S e soddisfacenti alle seguenti condizioni: escluso un numero finito di punti (punti singolari), per ogni punto di S passa una sola curva di R e nell'intorno del punto R è omeomorfo a un fascio di rette parallele; l'A. introduce la nozione di indice di un punto singolare e dà una dimostrazione della formula dei punti uniti (nel caso che interessa la ricerca). Nella terza parte considera alcuni esempi di reticolati, dimostra l'esistenza di reticolati contenenti un sistema prefissato di curve semplici chiuse disgiunte (e non uno più ampio) e studia un reticolato tracciato su una superficie di genere 1. Le ultime due parti sono dedicate alle curve d'accumulazione dei reticolati soddisfacenti a condizioni del tipo: 1. ad ogni punto singolare di S fa capo un numero finito di curve di R ; 2. R non ammette curve chiuse; 3. ogni punto di S è d'accumulazione per una curva almeno di R , la curva potendosi allontanare dal punto ma mai definitivamente. Questa condizione 3. è poi soppressa nella quinta parte; nella quarta è indicata una condizione sufficiente per il verificarsi della 3. Nessuna indicazione bibliografica.

Giuseppe Scorza Dragoni.

Theoretische Physik.

Mechanik:

● **Green S. L.:** Intermediate dynamics and statics. London: University Tutorial Press 1951. 298 p. 12 s. 6 d.

● **Beghin, H. et G. Julia:** Exercices de mécanique. — Tome II. Paris: Gauthier-Villars 1951.

Aymerich, Giuseppe: Trasformazioni di Appell nel caso di forze lineari nelle velocità. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 20, 184—192 (1951).

Die Frage von Appell, wann die Bewegungsgleichung eines Punktes bei einer Punkttransformation der Form nach erhalten bleibt, falls auch noch das Zeitdifferential transformiert wird, war von Appell für den Fall einer nur vom Ort abhängigen Kraft beantwortet worden. Hier wird gezeigt, daß diese Antwort auch noch gilt, wenn die Kraft von der Geschwindigkeit linear abhängt. Beweis mit den Methoden der Tensorrechnung. Bei einer Auswahl, nämlich ∞^4 Bewegungen, kann ein Energieintegral existieren, und auch diese Tatsache bleibt bei der Appellschen Transformation erhalten.

Georg Hamel.

Froda, Al.: L'accélération en mécanique rationnelle. Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 51—53, russische und französ. Zusammenfassgn. 53—54, 54—55 (1951) [Rumänisch].

On commence par définir les vecteurs: accélération prospective \bar{a} , accélération rétrospective $\bar{\alpha}$, accélération complète A , en admettant respectivement $t > t_0$, $t < t_0$, $t \geq t_0$ avant la passage à la limite pour $t \rightarrow t_0$. Après avoir précisé quels sont les mouvements réalisables de la mécanique rationnelle (abstraction faite des forces passives), on fait remarquer que dans le système (R) des postulats de cette mécanique est inclus (AR): Dans tout mouvement réalisable d'un point matériel, l'accélération $\bar{\gamma}$ existe à tout instant des mouvements. — La supposition habituelle, selon laquelle les postulats de (R) sont valables, lorsque γ est définie comme A , contredit le sens de la relation fondamentale (NR): $\bar{F} = m \gamma$ (\bar{F} = force); car $\bar{\gamma}$ serait déterminée à l'instant t_0 par l'état des vitesses $\bar{v}(t)$, où $t < t_0$. Mais selon les conceptions des fondateurs de la mécanique, la force étant la cause des modifications ultérieures de la vitesse acquise (en vertu du postulat de l'inertie), c'est elle qui détermine l'accélération. De lors, on conclut: Dans la relation (NR) l'accélération doit être définie comme accélération prospective \bar{a} . — La même conclusion s'impose lorsqu'on remarque l'existence de mouvements réalisables sous

l'action d'une force F_d , présentant une discontinuité de première espèce. En vertu de (NR) γ_d présente le même genre de discontinuité, ce qui est impossible pour $\gamma = A$; car une dérivée vectorielle ne peut avoir de discontinuités de première espèce. La définition classique de l'accélération, comme dérivée vectorielle (unique) de la vitesse n'est pas compatible avec (NR) . — Si l'on admettait $\gamma = \bar{\alpha}$, on ne saurait formuler le postulat des conditions initiales, car $\bar{\alpha}$ n'existe pas à ce moment; on doit donc admettre $\bar{\gamma} = \bar{\alpha}$. (Autoreferat.)

Nejmark (Neumark), Ju. I. und N. A. Fufaev: Über einen Fehler V. Volterras, der ihm bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen anholonomer Systeme unterlaufen ist. *Priklad. Mat. Mech.* **15**, 642—648 (1951) [Russisch].

Les AA. relèvent des fautes 1) dans les raisonnements qui ont conduit Volterra à sa forme des équations du mouvement des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté, commune au cas holonome et non holonome; la conclusion finale de Volterra n'en demeure pas moins exacte — 2) dans les travaux de V. Dobronravov [ce Zbl. **22**, 31 et Učenyje Zapiski Moskov. Univ. **2**, Nr. **122**, 77—83 (1949)] dont les conclusions paraissent, en grande partie, erronées, comme les AA. le prouvent sur des contre-exemples. *Julien Kravtchenko.*

Sechniašvili, E. A.: Über die Bestimmung der Formen der Eigenschwingungen von Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden. *Soebščenija Akad. Nauk Gruzinskij SSR* **12**, 149—154 (1951) [Russisch].

Kucharski, W.: Zur Veranschaulichung und Erweiterung der Theorie des Pendels mit oszillierendem Drehpunkt. *Ingenieur-Arch.* **19**, 388—399 (1951).

Für das Pendel mit oszillierendem Drehpunkt wird aus dem physikalischen Effekt der Neigung zum Parallelismus, d. h. Verkleinerung des Winkels zwischen Pendelstange und Oszillationsrichtung des Aufhängepunktes, die Folgerung gezogen, daß die Pendelbewegung aus zwei Hauptbewegungen besteht, einer langsamen Grundbewegung und einer Zusatzbewegung hoher Frequenz und kleiner Amplitude. Es wird gezeigt, wie sich diese Theorie im Rahmen der üblichen Annäherungen bestätigen läßt. *H. Neuber.*

Haacke, Wolfhart: Bemerkungen zur Stabilität eines physikalischen Pendels. *II. Z. angew. Math. Mech.* **31**, 333—338 (1951).

Die vorliegende Arbeit bildet eine Weiterführung der Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **43**, 183). Während in der früheren Arbeit nur eine vertikale Bewegung des Aufhängepunktes untersucht wurde, befaßt sich die vorliegende Arbeit mit beliebigen ebenen periodischen Bewegungen des Aufhängepunktes. Es wird verlangt, daß der Schwerkraftsektor in der Schwingungsebene liegt. Die Bewegungsgleichungen des Pendels führen auf die Mathieusche Differentialgleichung und auf die Eigenwertparameter dieser Gleichung, welche als Koordinaten in einer Ebene gezeichnet werden. Die betreffende und freundlicherweise vom Autor nach dem Referenten benannte Darstellung erlaubt auch im vorliegenden Falle eine verhältnismäßig einfache Diskussion der labilen und stabilen Oszillationsbedingungen.

Max J. O. Strutt.

Becker, Leonard: Gyro pickoff indications at arbitrary plane attitudes. *J. aeronaut. Sci.* **18**, 718—724 (1951).

Aus den elementargeometrischen Beziehungen zwischen den Richtungskosinus zweier Achsensysteme (raumfest und flugzeugfest) werden die Beziehungen zwischen einer allgemeinen Lage der Flugzeugachsen und den dadurch bedingten Drehungen der Kreiselrahmen zweier kardanisch aufgehängter Kreisel — der eine mit raumfester vertikaler, der andere mit raumfester horizontaler Achse — gegenüber dem flugzeugfesten Gehäuse abgeleitet. Mittels Matrizenmultiplikation wird der Einfluß zusätzlicher kleiner Drehungen um die Flugzeugachsen auf die Stellung der Kreiselrahmen bestimmt. Diese zusätzlichen Drehungen der Kreiselrahmen, die zur automatischen Steuerung des Flugzeuges benutzt werden, hängen außer von der Störung noch von der Ausgangslage der Flugzeugachsen ab. Wenn nicht ein entsprechender,

allerdings sehr komplizierter Analysator benutzt wird, treten neben einer beabsichtigten Steuerkorrektur noch Störungen um die anderen Flugzeugachsen auf, die ihrerseits wieder Rückwirkungen auf die zu korrigierende Störung haben und so zu einer Instabilität der automatischen Steuerung führen können. Solche Koppelseinflüsse treten einmal zwischen Drehungen um die Hoch- und die Querachse und zum anderen zwischen Drehungen um die Hoch- und die Längsachse auf.

K. Krienes.

Stumpff, K.: Eine einfache symmetrische Ableitung der Lagrangeschen partikulären Lösungen des Dreikörperproblems. *Astron. Nachr.* **280**, 91—93 (1951).

Die bekannten Lagrangeschen partikulären Lösungen des Dreikörperproblems werden hier so abgeleitet, daß man verlangt, jeder der drei Körper beschreibe relativ zu jedem anderen eine Keplerbewegung. Da diese Zusatzforderung Differentialgleichungen gleichwertig ist, die ähnlich gebaut sind wie die Bewegungsgleichungen selbst, führt die Aufgabe auf eine elementar-algebraische Elimination.

Georg Hamel.

● **Delachet, A. et J. Taillé: La balistique.** („Que sais-je?“ Le point des connaissances actuelles.) Paris: Presses Universitaires de France 1951. 128 p.

Eine flüssig geschriebene Einführung in die „klassische“ Ballistik der Geschütze, die aber auch die Grenzen dieses Gebietes berührt, wo in der inneren Ballistik das Gebiet der Raketen, in der äußeren Ballistik das der gesteuerten Geräte und das der Astronautik beginnen. Das Buch behandelt, ohne Scheu vor der Infinitesimalrechnung, zunächst die Grundzüge der Theorie, z. B. in der inneren Ballistik die Fälle sofortiger und augenblicklicher Verbrennung, in der äußeren Ballistik die Bewegung im Vakuum und bei Potenzform des Luftwiderstandsgesetzes; doch wird auch überall auf die Verfeinerungen der Theorie hingewiesen. Dann aber bringt es auch die wesentlichen Methoden der angewandten (d. h. messenden) Ballistik. Viele Einzelgebiete kann diese Einführung auf 120 Oktavseiten nur kurz streifen. Sie ist aber wohl für ihren Zweck geeignet, zum Studium der Ballistik anzuregen, die weithin zugleich die Grundlagen für die Wissenschaften der modernen Fluggeräte bildet.

Uwe Timm Bödewadt.

Elastizität. Plastizität:

Neményi, P. F.: Recent developments in inverse and semi-inverse methods in the mechanics of continua. *Advances appl. Mech.* **II**, 123—151 (1951). Academic Press, Inc., Publ., New York 1951.

Unter einer inversen Methode versteht Verf. eine solche, durch die für partielle Differentialgleichungen Speziallösungen ohne Rücksicht auf Randbedingungen oder dergleichen gefunden werden. Halbinvers heißen sie, wenn irgendwelche zusätzliche Forderungen gestellt werden. Die Anzahl solcher, für die Mechanik der Continua fruchtbaren Ergebnisse ist bekanntlich sehr groß. Verf. gibt einen Überblick, geordnet nach den Hauptgebieten: inkompressible, ideale Flüssigkeiten, zähe inkompressible Flüssigkeiten; Gasströmungen; Elastostatik; Plastische Körper. 51 Literaturangaben. Eine sehr dankenswerte Veröffentlichung. Georg Hamel.

Ionescu-Cazimir, V.: Sur les équations de l'équilibre thermo-élastique. II. Les relations entre les tensions et la température. *Commun. Acad. Republ. popul. Române* **1**, 171—176, russische und französ. Zusammenfassgn. 176, 176—177 (1951) [Rumänisch].

L'A. applique une méthode donnée par Gr. C. Moisil à l'étude des équations de l'équilibre thermoélastique. Dans cette Note, on montre que les tensions et la température sont liées par les relations

$$1 \left(b_x + \frac{2\mu\beta}{\lambda + 2\mu} \vartheta \right) + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z + \frac{\mu\beta}{\lambda + \mu} \vartheta \right) = 0,$$

$$A\tau_x + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z + \frac{\mu\beta}{\lambda + \mu} \vartheta \right) = 0$$

(et les relations analogues pour σ_y , σ_z , τ_y , τ_z)

$$1\theta - \frac{1}{k(3\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial t} \{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z + [3\beta + h(3\lambda + 2\mu)] \theta\} = 0,$$

qui forment une base pour les relations entre les tensions et la température. (Autoreferat.)

Sonntag, G.: Der Übergang zum ebenen Spannungszustand vom ebenen Formänderungszustand im breiten gebogenen Balken. Z. angew. Math. Mech. 31, 344—348 (1951).

Verf. erläutert zunächst die Begriffe des ebenen Spannungs- und des ebenen Formänderungszustandes. Er stellt sich dann die Aufgabe, den Übergang von ersterem zu letzterem in einem besonderen Fall (breiter, gebogener Balken) zu beschreiben. Für die Aufgabe wird eine strenge Lösung gefunden. Folgende Beispiele werden durchgerechnet: 1. der gelenkig gestützte breite Balken mit gleichmäßiger Belastung, 2. der breite Balken mit reiner Momentenbelastung, 3. der zweiseitig gelenkig gestützte Plattenhalbstreifen mit gleichmäßiger Belastung.

Erwin Hardtwig.

Aymerich, Giuseppe: Sull'espressione in coordinate curvilinee degli sforzi e degli spostamenti in elasticità piana. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 20, 175—183 (1951).

Die Berechnung der Spannungen und Verrückungen erfolgt in der ebenen Elastizitätstheorie so, daß aus den Randbedingungen des Problems zunächst die Airysche Spannungsfunktion U bestimmt wird und aus ihr dann Spannungs- und Verrückungskomponenten hergeleitet werden. Die Schwierigkeit besteht im Auffinden der biharmonischen Funktion U . Zu ihrer Bestimmung sind verschiedene Methoden angegeben worden. Verf. umgeht einen Teil der Schwierigkeiten dadurch, daß er auf die ursprüngliche physikalische Bedeutung der Spannungsfunktion zurückgreift und aus ihr dann die Kraftkomponenten in krummlinigen Orthogonalkoordinaten ausdrückt. Die Verrückungskomponenten werden über die zu U konjugierte Biharmonische gewonnen.

Erwin Hardtwig.

Schmidt, Kurt: Behandlung ebener Elastizitätsprobleme mit Hilfe hyperkomplexer Singularitäten. Ingenieur-Arch. 19, 324—341 (1951).

Die übliche Behandlung ebener Probleme der Elastizitätstheorie stützt sich auf die Airysche Spannungsfunktion, das Inversionsverfahren oder die Methode der komplexen Integration. Ein von diesen klassischen Verfahren abweichendes ist von L. Sobrero angegeben worden (vgl. z. B.: Theorie der ebenen Elastizität, Leipzig 1934; dies. Zbl. 11, 31). Es macht sich den Zusammenhang zwischen Elastizitätstheorie und Theorie der hyperkomplexen Funktionen zunutze. Verf. gibt zunächst eine kurze Einleitung in das Verfahren von Sobrero, spezialisiert es auf den ebenen Spannungszustand und entwickelt hierauf die hyperkomplexe Spannungsfunktion in einer Reihe von Sonderfällen (Randwertprobleme erster Art, spannungsfreien Scheibenrand). Spannungs- und Verrückungskomponenten folgen elementar aus der Spannungsfunktion. Die Behandlung von Randwertproblemen zweiter Art nach dem Sobrero-Verfahren wird angeregt.

Erwin Hardtwig.

Gray, C. A. M.: Polynomial approximations in plane elastic problems. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 444—448 (1951).

Die von Muschelišvili entwickelte Methode zur Lösung ebener elastischer Probleme wurde bisher vorzugsweise im Fall rationaler Abbildungsfunktionen angewandt. Verf. gibt dagegen eine Lösungsmethode an, die auch dann noch anwendbar ist, wenn nur die Taylorsche Entwicklung der Abbildungsfunktion bekannt ist. Dies führt auf die Lösung eines unendlichen Systems simultaner Gleichungen, in denen als Unbekannte die Taylorkoeffizienten der von Muschelišvili definierten analytischen Funktionen auftreten. Diese Gleichungen lassen sich durch ein Iterationsverfahren lösen und geben beliebig genaue Ergebnisse. Zur Illustration wird das Problem einer an zwei entgegengesetzten Ecken in diagonaler Richtung

auf Zug beanspruchten quadratischen Scheibe durchgeführt und das Ergebnis mit den auf spannungsoptischem Wege erzielten Resultaten von Frocht verglichen.

Viktor Garten.

Ling, Chih-Bing and Kuo-Liang-Yang: On symmetrical strain in solids of revolution in spherical co-ordinates. *J. appl. Mech.* 18, 367—370 (1951).

Bei symmetrischer Belastung eines Rotationskörpers sind die Verrückungen in allen durch die Rotationsachse gehenden Ebenen gleich, alle den Spannungszustand beschreibenden Größen, wie Verrückungen und Spannungen leiten sich aus der Spannungsfunktion ab. Bei Rotationssymmetrie ist es naheliegend, die Spannungsfunktion und damit auch alle aus ihr ableitbaren Größen in Zylinderkoordinaten darzustellen. Verf. unternehmen es, die entsprechenden Ausdrücke in sphärischen Polarkoordinaten darzustellen, weil gelegentlich praktische Anwendungen eine solche Darstellung als zweckmäßig erscheinen lassen. Die Spannungsfunktion wird aus biharmonischen, in Polarkoordinaten ausgedrückten Funktionen aufgebaut, die willkürlichen Koeffizienten dienen zur Anpassung an die Randbedingungen. Anwendung auf den Fall eines Rotationskörpers mit kugelförmigem Hohlraum.

Erwin Hardtwig.

Mossakovskij, V. I.: Zur Frage der Abschätzung der Verrückungen in räumlichen Kontaktsystemen. *Priklad. Mat. Mech.* 15, 635—636 (1951) [Russisch].

Ein starrer Stempel mit ebener Sohle von beliebiger Grundrißform befinde sich in Berührung mit einem elastischen Halbraum. Die Druckverteilung $p(x, y)$ über die Sohlenfläche unter der Einwirkung einer normal zur Sohle wirkenden Kraft P , sowie der Momente M_x, M_y sei bekannt. Ist nun die Kontaktfläche eines anderen Stempels mit demselben Grundriß wie vorhin, aber mit einer anders geformten Sohle durch $z = f(x, y)$ gegeben, so lassen sich, wie Verf. zeigt, die Resultierenden P, M_x, M_y der neuen Druckfigur durch einige Quadraturen aus $p(x, y)$ und $f(x, y)$ bestimmen ohne vorherige Kenntnis der neuen Funktion $p(x, y)$ selbst. Der Stempel mit elliptischer Grundrißform wird als Beispiel für die Anwendung dieser Theorie angeführt.

S. Woinowsky-Krieger.

Okubo, H.: On the two-dimensional problem of a semi-infinite elastic body compressed by an elastic plane. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 4, 260—270 (1951).

Die Druckverteilung auf einem halbinendlichen elastischen Körper, der von einem rechteckigen elastischen Prisma mit gleichmäßiger Vertikalbelastung eingedrückt wird, wird für verschiedene Werte des Verhältnisses der Elastizitätsmoduln näherungsweise berechnet. Die Drücke steigen rasch zum Rand der Kontaktfläche hin.

Joachim Pretsch.

Clark, R. A. and E. Reissner: Bending of curved tubes. *Advances appl. Mech.* II, 93—122 (1951).

Die elastizitätstheoretische Behandlung der Durchbiegung gekrümmter, dünnwandiger Rohre datiert seit 1910, als Bantlin experimentell zeigte, daß gekrümmte Rohre sich leichter verbiegen lassen als geradlinige gleicher Querschnitte. Th. v. Kármán, Lorenz, Timoshenko, Karl, Beskin und M. T. Huber haben diese Erscheinung theoretisch untersucht und sind dabei entweder vom Prinzip der kleinsten Deformationsarbeit oder jenem kleinsten Potentials ausgegangen. Im Gegensatz dazu wird in vorliegender Arbeit von einer Differentialgleichung ausgegangen, die 1949 von E. Reissner aufgestellt wurde. Zugleich werden Betrachtungen aus der Theorie dünnwandiger Schalen herangezogen. Die Lösung des Problems wird durch trigonometrische Reihen dargestellt — die Bestimmung der Koeffizienten führt auf ein System linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Der Unterschied zwischen den älteren Methoden und der hier vorgetragenen besteht in der Art und Weise, dieses System auf ein endliches zurückzuführen. Die zum Erreichen einer bestimmten Genauigkeit erforderliche Gliederzahl hängt vom Wert eines bestimmten Parameters ab — wird dieser zu groß, wird die Reihenentwicklung unbrauchbar — hier tritt ein von den Verf. entwickeltes asymptotisches Verfahren ein. Beide Entwicklungen haben einen gemeinsamen Bereich, in dem sie praktisch brauchbar sind. Mathematisch besteht das Problem im Auffinden der asymptotischen Darstellung eines partikulären Integrals einer nichthomogenen, linearen Differentialgleichung, in der ein Parameter als Koeffizient einer Funktion auftritt, die für gewisse Werte ihres Arguments verschwindet.

Erwin Hardtwig.

Münz, H.: Ein Integrationsverfahren für die Berechnung der Biegespannungen achsensymmetrischer Schalen unter achsensymmetrischer Belastung. II. Ingenieur-Arch. 19, 255—270 (1951).

Das in Teil I (dies. Zbl. 42, 422) formulierte Variationsproblem vom Minimum der potentiellen Energie, bezogen auf achsensymmetrische Schalen unter achsensymmetrischer Belastung läßt sich in ein kanonisches Variationsproblem umformen. Die sich hieraus ergebenden kanonischen Gleichungen des Biegeproblems besitzen ein einfaches Integral (Gleichgewicht in Richtung der Rotationsachse), wodurch eine Reduktion der 6 linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung auf 4 Differentialgleichungen möglich wird. Trotz dieser Vereinfachung ist die weitere Rechnung im allgemeinen mit verhältnismäßig großem Aufwand verbunden, dem Verf. durch verschiedene Vernachlässigungen zu begegnen sucht. Einerseits wird die Meridianneigung gegen die Schalenachse als klein angenommen, ferner wird die Querkontraktion und die Änderung der Schalendicke vernachlässigt. Auf diese Weise ergibt sich eine verhältnismäßig einfache Näherungslösung. Die Methode wird am Beispiel des Wellrohres, sowie der Rohrsicke und der flachen Schale diskutiert. *H. Neuber.*

Mustari, Ch. M.: Über das elastische Gleichgewicht einer dünnen Schale mit anfänglichen Unregelmäßigkeiten in der Form der Mittelfläche. Priklad. Mat. Mech. 15, 743—750 (1951) [Russisch].

Es liege eine dünne Schale vor, deren Mittelfläche Abweichungen von der beabsichtigten geometrischen Grundform zeigt. Unter gewissen einschränkenden Annahmen über die Art dieser Unregelmäßigkeiten, die von der Größenordnung der Wanddicke sein sollen, und unter Beachtung einer zusätzlichen, von einer möglichen Instabilität der Schale herrührenden Deformation, gelangt Verf. zu einer Differentialgleichung der deformierten Mittelfläche der Schale. Eine einem gleichförmigen Innendruck ausgesetzte geschlossene Rotationsschale mit durchweg positivem Gaußschen Krümmungsmaß und örtlichen Unregelmäßigkeiten illustriert die Anwendung der Theorie. Insbesondere wird die Beulung einer abgeplatteten Ellipsoid-Schale unter Innendruck diskutiert. Verf. beanstandet dabei auf Grund seiner Ergebnisse die Beulformel von J. W. Geckeler (Handbuch der Physik, Bd. 6, S. 305, Berlin 1928), deren Ungenauigkeit er einer fehlerhaften Abschätzung der Widerstandsziffer der dem Äquator benachbarten Schalenstreifen zuschreibt.

S. Woinowsky-Krieger.

Galimov, K. Z.: Zur allgemeinen Theorie der Platten und Schalen bei endlichen Verschiebungen und Deformationen. Priklad. Mat. Mech. 15, 723—742 (1951) [Russisch].

Verf. gibt zunächst eine Übersicht über die in allgemeinen krummlinigen Koordinaten und in Vektorform ausgedrückten Relationen, die zwischen den Schnittkräften, Deformationen und endlichen Verschiebungen einer dünnwandigen Schale bestehen. Die unter Umständen zulässige Vernachlässigung der Differenz zwischen den beiden paarweise auftretenden tangentialen Schubkräften bzw. ebensolchen Drillungsmomenten bringt mit sich eine erhebliche Vereinfachung der weiteren Formulierungen. Es werden daher für die Kräfte und Momente zwei Tensoren eingeführt, die bei beliebigen Deformationen symmetrisch bleiben. Verf. geht dann kurz auf den Fall kleiner elastisch-plastischer Deformationen bei großen Verschiebungen ein. Anschließend werden Galerkinsche Gleichungen formuliert, die bei dem vorliegenden nichtlinearen Problem in keinerlei Beziehung zum energetischen Funktional stehen. Es wird dann ein allgemeines Funktional eingeführt und es werden Bedingungen angegeben, bei denen die betreffende Variationsgleichung besteht. Diese Gleichung wird schließlich umgeformt und einer näheren Betrachtung im Sonderfall homogener Gleichgewichtsgleichungen unterzogen. *S. Woinowsky-Krieger.*

Morgan, A. J. A.: Uniformly loaded semi-infinite wedge-shaped plates. J. aeronaut. Sci. 18, 845—847 (1951).

Eine im Winkelraum unbegrenzte, keilförmige Platte konstanter Dicke wird gleichmäßig belastet. Eine Kante ist frei, die andere eingespannt. Die Durchbiegungen $w(x, y)$ der in der x - y -Ebene liegenden Platte sind gesucht. Verf. führt die partielle Differentialgleichung 4. Ordnung, der die Funktion $w(x, y)$ genügen muß, durch eine passende Transformation auf die gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung zurück. Er gibt dafür die allgemeine Lösung an und legt die willkürlichen Parameter durch die Randbedingungen fest. Die gefundene Lösung des Problems wendet Verf. auf den Fall eines Keiles mit Öffnungswinkel $< \pi/2$ an. Schließlich wird auf die Möglichkeit hingewiesen, die Aufgabe auch für einen speziellen Fall einer nicht konstanten Belastung $P(x, y)$ zu lösen. *Erwin Hardtwig.*

Winslow, A. M.: Differentiation of Fourier series in stress solutions for rectangular plates. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 4, 449—460 (1951).

Die Lösung von Spannungsproblemen mit Hilfe eines Lösungsansatzes in Form einer Fourierschen Reihe setzt voraus, daß eine Airysche Spannungsfunktion und ihre partiellen Ableitungen sich als Fourierreihe darstellen lassen. An zwei Beispielen wird gezeigt, daß zwar die vorgeschriebenen Randspannungen zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten ausreichen, daß aber rein mathematische Zusatzbedingungen hinzukommen müssen, um die gliedweise Differentiation zu rechtfertigen. *Viktor Garten.*

Sibert, H. W.: Shear flow in a thin-skin tapered beam. *J. aeronaut. Sci.* 18, 703—704 (1951).

Für einen konisch zulaufenden dünnwandigen Träger besteht die Schwierigkeit, die einfachen Formeln der Biegelehre prismatischer Stäbe anzuwenden. Verf. empfiehlt eine Näherungsformel für den Schubfluß, welche mit geringem Rechenaufwand verbunden ist und genügend genaue Ergebnisse liefert, sofern im jeweiligen Falle die für die exakte Begründung besonders erforderlichen Bedingungen nicht allzusehr verletzt sind. *H. Neuber.*

Inan, İhsan: Expression générale des moments aux appuis dans les poutres continues à travées égales et moment d'inertie uniforme. *Bull. techn. Univ. Istanbul* 3, 67—70 und türkische Zusammenfassg. 67 (1951).

Verf. leitet die allgemeine Formel zur Berechnung der Stützmomente bei durchlaufenden Trägern mit gleicher Stützweite und konstantem Trägheitsmoment unter gleichmäßig verteilter Last von einer bestimmten Form ab. Auf Grund dieser Formel werden dann einige Sonderfälle betrachtet. *Bekir Dizioğlu.*

Handelman, G. H.: Shear center for thin-walled open sections beyond the elastic limit. *J. aeronaut. Sci.* 18, 749—754 (1951).

Die Aufgabe, den Scherungsmittelpunkt eines dünnwandigen, offenen Schnittes zu bestimmen, kann als vollkommen gelöst gelten in dem Falle, daß die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird. Durch ein Verfahren ähnlich jenem, das im elastischen Fall angewandt wird, sucht Verf. die Aufgabe im Gebiet jenseits der Elastizitätsgrenze zu lösen. Er betrachtet das Problem mehr als ein solches der „technischen Plastizität“ denn als eines der exakten Theorie der Beanspruchung über die Elastizitätsgrenzen hinaus. Es geht dabei — um eine allzu große Kompliziertheit der Ausdrücke zu vermeiden — nicht ohne vereinfachende Annahmen ab, doch halten sich diese im Rahmen des in der Elastizitätstheorie Üblichen. Im Falle symmetrischer Schnitte reduziert sich das Problem auf die Bestimmung einer einzigen Konstanten, die aus der Größe der beanspruchenden Kraft gefunden werden kann. Die Auffindung des Scherungsmittelpunktes ist dann möglich. Auch für den nicht-symmetrischen Fall werden Formeln aufgestellt. Bemerkenswert ist, daß im nicht-elastischen Fall die Lage des Scherungsmittelpunktes nicht nur vom Querschnitt abhängt, sondern auch von der Stärke der beanspruchenden Kraft und dem Spannungs-Verschiebungsgesetz. *Erwin Hardtwig.*

Pestel, E.: Tragwerksauslenkung unter bewegter Last. Ingenieur-Arch. 19, 378—383 (1951).

Die Tragwerksauslenkung unter bewegter Last macht die Berücksichtigung der aus Tragwerks- und Lastmasse hervorgehenden Trägheitskräfte, sowie der elastischen Rückstellkräfte und der zusätzlichen äußeren Kräfte erforderlich. Die allgemeine Lösung des Problems würde mit sehr großen Schwierigkeiten verbunden sein, deshalb macht Verf. verschiedene vereinfachende Annahmen, welche zum Teil von den bisher üblichen abweichen. Außer der Darstellung der Durchbiegung als Produkt einer Zeit- und einer Ortsfunktion (Formfunktion) wird für die Letztere vorausgesetzt, daß sie mit der Eigenschwingungsform des unbelasteten Trägers bzw. des Trägers mit wanderndem Massenpunkt näherungsweise zusammenfällt. Für die Ausrechnung wird ein schrittweises Näherungsverfahren vorgeschlagen, wobei der zeitliche Ablauf in einzelne Intervalle zerlegt wird.

H. Neuber.

Aržanyč, I. S.: Integralgleichungen für die Transformation des Verschiebungsvektors, der Volumenvergrößerung und der Rotation eines elastischen Körpers. Priklad. Mat. Mech. 15, 387—391 (1951) [Russisch].

Sei $u(q, t)$ der Verschiebungsvektor am Ort q eines elastischen Körpers Q im Zeitpunkt t , der dem Laméschen Gleichungssystem genügen soll. Seien ferner

$$\psi(q, \eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} u(q, t) dt, \quad \vartheta(q, \eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} \operatorname{div}_q u dt, \quad \omega(q, \eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} \operatorname{rot}_q u dt$$

die transformierten Vektoren der Verschiebung, der Dilatation und der Rotation. Sind nun an der Oberfläche S des Körpers Q die Verschiebungen gegeben und kennt man noch die Greensche Funktion Γ von $\Delta\Gamma = 0$ für das Problem von Dirichlet ($\Gamma = 0$ auf S), so lassen sich, wie Verf. nachweist, zwei Systeme von Integralgleichungen bilden, die paarweise ψ und ϑ bzw. ψ und ω verbinden. Sind die Oberflächenspannungen gegeben und ist neben Γ auch die Greensche Funktion N des Neumannproblems bekannt ($\partial N / \partial n = -4\pi/S$ auf S , wenn Q innerhalb S , $\partial N / \partial n = 0$ auf S , wenn Q außerhalb S , n = Normale zu S), so besteht jedesmal ein System von drei Integralgleichungen zwischen ψ , ϑ und ω .

S. Woinowsky-Krieger.

Söchting, Fritz: Zur Berechnung von Eigenschwingungszahlen. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anz. 1951, 132—135 (1951).

Bekanntlich ist zur brauchbar genauen Berechnung der Eigenfrequenzen der Schwingungen mit Hilfe des Energiesatzes der entsprechende sehr genaue Verlauf der zugehörigen Eigenschwingungsform nötig. Verf. zeigt nun, ausgehend von der Differentialgleichung der stehenden Schwingungen für einen zweidimensionalen Körper, mit Hilfe des von der Differentialgleichung direkt abgeleiteten Energieausdruckes, daß die Größe der Größtabweichung der wirklichen Schwingungsform von der genäherten ein Gütemaß für den Näherungswert der Eigenfrequenz ist.

Bekir Dizioğlu.

Schulte, A. M.: A slight improvement of Southwell's method for the approximative computation of the lowest frequency of a homogeneous membrane. Appl. sci. Research A 2, 93—96 (1951).

Hidaka, Koji: Vibration of a square plate clamped at four edges. Math. Japonicae 2, 97—101 (1951).

Haringx, J. A.: Elastic stability of flat spiral springs. Appl. sci. Research A 2, 9—30 (1951).

Pinney, Edmund: A theorem of use in wave theory. J. Math. Physics 30, 1—10 (1951).

In der Arbeit wird ein Lehrsatz bewiesen, der nach Meinung des Verf. von beträchtlichem Nutzen ist, um die Lösungen einiger Probleme in der Theorie der elastischen Wellen auf eine für die numerische Berechnung möglichst geeignete Form zu bringen. Der Lehrsatz kann auf Bereiche mit mehreren Wellengeschwindigkeiten

angewendet werden und kann auch u. U. in der optischen Theorie der Kristalle benutzt werden. Das Theorem betrifft die Reduktion von Doppelintegralen etwa der Form

$$\int_0^\infty \int_C J_0(\omega r s) e^{-\omega a \lambda_m(s)} \frac{\lambda_1(s) \cdot \cos \omega t}{(s^2 - \frac{1}{2})^2 - s^2 \lambda_k(s) \lambda_1(s)} ds d\omega$$

auf einfache Integrale. Hierin ist $\lambda_m(s) = \sqrt{(s^2 - k_m^2)}$ und C ein Weg, der im Nullpunkt der s -Ebene beginnt, den Teil $0 \dots s_1 \dots s_m > 0$ der reellen s -Achse und die Pole des Integranden umschlingt und zum Punkte 0 zurückläuft.

Herbert Buchholz.

Gassmann, Fritz: Über Dämpfung durch Abstrahlung elastischer Wellen und über gedämpfte Schwingungen von Stäben. *Z. angew. Math. Phys.* 2, 336—356 (1951).

Das Problem der Berechnung der Beanspruchung von schwingenden festen Körpern setzt im Falle der Resonanz der Erregerfrequenz mit einer Eigenfrequenz die genaue Kenntnis der Dämpfungserscheinungen voraus. Ursachen der Dämpfung sind: Die sogenannte innere Dämpfung (Umwandlung elastischer Energie in Wärme), die äußere Dämpfung (Bewegungswiderstand an der Oberfläche, z. B. beim Eintauchen in Flüssigkeit oder Gase), sowie die Abstrahlungsdämpfung (Deformation an der eingespannten Seite des schwingenden Körpers, durch welche ein Energie-transport an die Umgebung eintritt). Verf. behandelt insbesondere die dritte Dämpfungsart, kennzeichnet den schwingenden Körper kurz als „Schwinger“, den Anschlußkörper als „Träger“ und setzt für die rechnerische Behandlung der Abstrahlungsdämpfung voraus, daß die Kontaktfläche zwischen Schwinger und Träger sich nicht deformiert. Nach Einführung charakteristischer dynamischer Federungsgrößen, welche für einfache Beispiele berechnet werden, werden Längs-, Biege- und Torsionsschwingungen schlanker Stäbe behandelt.

H. Neuber.

Gassmann, F.: Über die Elastizität poröser Medien. *Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich* 96, 1—23 (1951) (Mit engl. Zusammenfassg.)

Poröse Stoffe erfahren bei Belastung im allgemeinen nicht umkehrbare Verformungen. Führt jedoch der Spannungszustand um einen bestimmten Mittelwert kleine Schwankungen aus, so sind die zugehörigen Verformungsschwankungen auch beim porösen Stoff nahezu den Spannungsschwankungen proportional und umkehrbar. Dies gilt insbesondere für den Vorgang der Fortpflanzung elastischer Wellen (Schallausbreitung). Verf. gibt für die Berechnung der zugehörigen Elastizitätskonstanten auf Grund der Vorstellung eines mehrphasigen Systems, das aus einem festen Gerüst mit Flüssigkeits- oder Gasfüllung besteht, ausführliche Hinweise an und liefert damit Grundlagen für die Beurteilung der dynamischen Beanspruchung einiger Baumaterialien, sowie für die Bodenmechanik, Akustik und Seismik. Die Berechnungsmethode wird am Beispiel eines Sandsteins durchgeführt. *H. Neuber.*

Hydrodynamik:

Ghosh, N. L.: Equilibrium of rotating fluids under the quadratic law of stratifications and the existence of equatorial accel. *Proc. nat. Inst. Sci. India* 17, 391—401 (1951).

Bei den bisher in der Literatur untersuchten rotationsellipsoidischen Flüssigkeitsmassen, die stationäre Drehbewegungen um die Symmetrieachse ausführen können, war die Winkelgeschwindigkeit auf der Oberfläche entweder konstant oder nahm vom Äquator zum Pol zu. Die Beobachtung an der Sonne und anderen Sternen, daß dort der Wert der Winkelgeschwindigkeit im Gegenteil zum Pol hin abnimmt, veranlaßt den Verf., ein entsprechendes, wieder nur der Eigengravitation und der Zentrifugalkraft unterworfenen Modell zu konstruieren. Er wählt als Be-

grenzung des Rotationsellipsoid

$$1 - \alpha r^2 - \beta z^2 = 0 \quad (r^2 = x^2 + y^2)$$

mit der Dichteverteilung

$$(1) \quad \rho = \rho_0 (1 - \lambda \alpha r^2 - \mu \beta z^2), \quad (\rho_0, \lambda, \mu, \alpha, \beta \text{ konstant}).$$

In dem Spezialfall $\lambda = 0$, $0 \leq \mu \leq 1$, der ausführlich behandelt wird, wird die Verteilung der Winkelgeschwindigkeit ω in dem Modell bestimmt; es zeigt sich, daß eine entsprechende stationäre Drehbewegung wirklich existieren kann und daß ω auf der Oberfläche das gewünschte Verhalten hat. Im allgemeinen Falle (1) ergibt sich als notwendige Bedingung für ein solches Verhalten $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$; eine vollständige Diskussion wird hier nicht durchgeführt.

Karl Maruhn.

Delval, J.: Sur la dynamique des fluides parfaits et le principe d'Hamilton. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 986—990 (1951).

Ableitung der Bewegungsgleichungen einer idealen, inkompressibeln Flüssigkeit aus dem Hamiltonschen Prinzip. Der Kern des Beweises stammt von Lagrange, der die Statik aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten gewann, und da das Hamiltonsche Prinzip aus diesem und aus dem d'Alembertschen Prinzip folgt, ist das Ergebnis selbstverständlich. (Bem. des Ref.)

Georg Hamel.

Lakshama Rao, S. K.: Fixed configurations of four rectilinear vortex filaments. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 34, 250—262 (1951).

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß vier parallele geradlinige Wirbelfäden in einer sonst wirbelfreien idealen Flüssigkeit dauernd eine unveränderliche Konfiguration miteinander bilden. Als Beispiele werden eine Reihe spezieller Vierecke betrachtet.

Karl Maruhn.

Nagamatsu, H. T.: Circular cylinder and flat plate airfoil in a flow field with parabolic velocity distribution. J. Math. Physics 30, 131—139 (1951).

Die Arbeit behandelt die ebene, dichtebeständige Strömung mit einer wirbelbehafteten, parabolischen Geschwindigkeitsverteilung im Anströmgebiet. Zu diesem Zweck wird die Stromfunktion in 2 Summanden aufgespalten, deren einer der ungestörten Anströmung entspricht, und deren anderer näherungsweise die Laplacegleichung erfüllt. Auch die reine Scherströmung vor einer Platte wird behandelt. Die Begründung der interessanten Rechnungen durch die Strömung hinter Stößen ist allerdings nicht stichhaltig, da hinter Stößen die Kompressibilität sicher viel wichtiger ist als die Wirbel.

Klaus Oswatitsch.

Tomotika, S., Z. Hasimoto and K. Urano: The forces acting on an aerofoil of approximate Joukowski type in a stream bounded by a plane wall. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 289—307 (1951).

Von W. Müller (dies. Zbl. 2, 79) stammt eine konforme Abbildung, durch die zwei spiegelbildlich zur x -Achse gelegene Kreise auf zwei ebensolche Profile abgebildet werden, die bei geeigneter Wahl der Abbildungsparameter angenähert vom Joukowski-Typ sind. Übertragung der bekannten Potentialströmung um die Kreise (mit Anblasrichtung parallel zur x -Achse) liefert eine ebensolche Strömung um das Joukowskiprofil mit der x -Achse als fester Wand. Nach Aufstellung der Formeln für Abbildung und Strömungspotential geben Verf. eine numerische Methode zur Berechnung des Auftriebs sowie die Ergebnisse dreier durchgerechneter Beispiele an. Es zeigt sich, daß auch beim dicken Profil genau wie beim früher behandelten Streckenprofil die Bodennähe eine Zunahme des Auftriebs bewirkt, die aber mit wachsender Profildicke kleiner wird. Desgleichen wird mit wachsender Wölbung bei dicken und dünnen Profilen der durch Bodennähe hervorgerufene Auftriebszuwachs kleiner.

Johannes Weissinger.

Vignier, Gabriel: Circulation d'un fluide visqueux incompressible. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 397—405 (1951).

Die für den Fall beträchtlicher Geschwindigkeitsgradienten unter Zugrunde-

legung eines nichtlinearen Zusammenhangs zwischen den Spannungskomponenten und den Deformationsgeschwindigkeiten bereits an anderer Stelle abgeleiteten hydrodynamischen Gleichungen werden benutzt, um die zeitliche Änderung der Zirkulation längs einer flüssigen Linie zu bestimmen. Der im allgemeinsten Fall sehr komplizierte Ausdruck führt bei zwei speziellen Klassen von Flüssigkeitsbewegungen zu dem einfachen Resultat, daß die Zirkulation zeitlich konstant ist. Bei der einen Klasse hängt jede Geschwindigkeitskomponente jeweils nur von der ihr entsprechenden Koordinate in einem rechtwinkligen Bezugssystem ab, bei der anderen verschwindet der Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten, der dem gewöhnlichen linearen Ansatz entspricht. Einige einfache Beispiele solcher Flüssigkeitsbewegungen werden behandelt.

K. Krienes.

Vogelpohl, G.: Die Temperaturverteilung in Schmierschichten zwischen parallelen wärmedurchlässigen Wänden. Z. angew. Math. Mech. **31**, 349—356 (1951).

Zuerst sei bemerkt, daß im Titel „wärmedurchlässig“ statt „wärmedurchlässig“ stehen muß. — Verf. gibt die Lösung der folgenden Energiegleichung für die Strömung einer zähen Flüssigkeit an:

$$\gamma c u(y) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Hierin bedeutet γ das spezifische Gewicht, c die spezifische Wärme, η die als unveränderlich angenommene Zähigkeit, λ die Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit. Es wird eine Couette-Strömung mit der linearen Geschwindigkeitsverteilung $u(y) = U(1 - y/h)$ betrachtet, wobei U die Geschwindigkeit der bewegten Wand und h die Weite des Schmierspalt bedeutet. Die Randbedingungen sind $\partial \theta / \partial y = 0$ für $y = 0$ und $y = h$ und die Anfangsbedingung $\theta = 0$ für $x = 0$. — Nach Einführung der entsprechenden dimensionslosen Größen wird dann das Partikularintegral der obigen Differentialgleichung und die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung bestimmt. Es werden die ersten fünf Glieder der Lösungsreihe angegeben und ausgewählte Beispiele numerisch ausgewertet. Die Ergebnisse sind graphisch und perspektivisch wiedergegeben. Das bemerkenswerte Ergebnis ist nun, daß das von der bewegten Fläche mitgenommene kalte Öl bis ins Unendliche hinein eine niedrigere Temperatur an der bewegten Wand mit konstanter Differenz gegenüber der festen Wand verursacht. — Zum Schluß gibt Verf. den Beweis, daß für die Couette-Strömung einer Flüssigkeit mit konstanter Zähigkeit bei der Berechnung der Mittelwerte der Temperatur im Nusseltschen Sinne die Strömungsgeschwindigkeiten nur zur Schicht gemittelt werden dürfen, ebenso darf dazu die Wärmeleitung quer zur Schicht vernachlässigt werden. Dieses überraschende Ergebnis ist für die Lager mit sehr großer Umlaufgeschwindigkeit von Wichtigkeit. — [Anm. d. Ref.: Daß die obige Aussage über die mittleren Temperaturen auch für eine allgemeine Hagen-Poiseullesche Strömung gültig bleibt, wurde von Ref. in Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A **17**, 61 (1952) bewiesen.] Bekir Diziöğlu.

Corrsin, Stanley: An integral relation from the turbulent energy equation. J. aeronaut. Sci. **18**, 773—774 (1951).

Chandrasekhar, S.: The fluctuations of density in isotropic turbulence. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **210**, 18—25 (1951).

Die Berücksichtigung der Kompressibilität bringt in der statistischen Theorie der Turbulenz eine solche Erschwerung, daß eine einfache Übertragung der bei inkompressiblen Medien angewandten Betrachtungsweise bisher nicht sehr erfolgreich war. Einen gewissen Einblick in die Vorgänge, die bei turbulenter kompressibler Strömung auftreten, kann man jedoch dadurch gewinnen, daß man die Dichteschwankungen betrachtet. Es gelingt dabei schon aus der Kontinuitätsgleichung eine Invariante analog zur Loitsianskischen Invariante bei inkompressiblen Medien abzuleiten. Wenn $\tilde{w}(r, t) = \delta \rho / \bar{\rho}$ die Korrelation zwischen den Abweichungen der Dichte

vom Mittelwert an zwei Punkten im Abstand r bedeutet, so ist $\int_0^\infty r^2 \tilde{w}(r, t) = \text{const.}$ Dies bedeutet, daß die größten Schwankungselemente durch die Anfangsbedingungen des Problems bestimmt sind und unveränderliche Merkmale des Systems darstellen. Man kann eine Bewegungsgleichung für \tilde{w} herleiten, welche die Dichteschwankungen mit den Geschwindigkeitsschwankungen in Beziehung setzt. Wenn man in dieser Bewegungsgleichung näherungsweise den für inkompressible Medien gültigen Korrelationstensor $u_i u_j$ einsetzt, erhält man eine einfache Beziehung zwischen \tilde{w} und der definierenden Skalarfunktion, Q , von $u_i u_j$. Wenn die turbulenten Geschwindigkeiten klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit sind, erhält die Bewegungsgleichung für \tilde{w} schließlich eine Form, die der sphärischen Wellengleichung entspricht. $\tilde{w}(r, t)$ kann dann als eine Überlagerung sphärischer Wellen aufgefaßt werden, die sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2}c$ fortpflanzen (c Schallgeschwindigkeit). Auch wenn der Term $u^2/3 + 2Q$

gegenüber c^2 noch beibehalten wird, ergeben sich für \tilde{w} periodische Lösungen in der Form sphärischer Wellen, wobei die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v für große r durch die Beziehung $v^2 = 2(c^2 + u^2/3)$ gegeben ist.

Walter Wuest.

● **Foundations of high speed aerodynamics. Facsimiles of nineteen fundamental studies as they were originally reported in the scientific journals. With a bibliography compiled by George F. Carrier.** New York: Dover Publications, Inc. 1951. 286 p. \$ 1,75.

Facsimile-Nachdruck von 19 grundlegenden Originalarbeiten aus der Gasdynamik. Die Auswahl ist so getroffen, daß für die einzelnen Teilgebiete der Gasdynamik, wie z. B. linearisierte Theorie, Charakteristikenverfahren, Stoßwellentheorie, Tragflügeltheorie bei kompressiblen Medien, jeweils die ältesten und grundlegenden Arbeiten zusammengestellt wurden. Aus der älteren Periode der Gasdynamik findet man u. a. die Originalarbeiten von W. Rankine (1870), P. Molenbroek (1890), T. Meyer (1908), H. Glauert (1928), L. Prandtl und A. Busemann (1929). Allerdings war es aus Platzmangel nicht möglich, alle wesentlichen Arbeiten zu berücksichtigen. So fehlen beispielsweise die wichtigen Arbeiten von Riemann, Hugoniot und Tschaplin. Zu erwähnen sind ferner noch die Arbeiten zur Tragflügeltheorie und zum schwingenden Flügel von J. Ackeret (1925), A. Busemann (1935), L. Prandtl (1936) und C. Possio (1938). Der zweite Teil des Buches enthält eine nach einzelnen Sachgebieten geordnete Bibliographie der Gasdynamik, die nahezu 400 Titel umfaßt und fast alle wesentlichen Arbeiten auf diesem Gebiet berücksichtigt, einschließlich einer Auswahl aus den Forschungsberichten der Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der deutschen Luftfahrtforschung.

Walter Wuest.

Sauvenier-Goffin, E.: Note sur les pulsations non-radiales d'une sphère homogène compressible. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 20—38 (1951).

Gegeben ist eine mit homogener kompressibler Flüssigkeit erfüllte Kugel (Radius R , Dichte ρ_0), und es seien r, ϑ, φ die Polarkoordinaten, ferner q', U', P', \vec{v}' die der Pulsation $\vec{\delta r}$ entsprechenden Variationen (sie enthalten noch den Zeitfaktor $e^{i\sigma t}$) der Dichte, des Gravitationspotentials, des Druckes und der Geschwindigkeit.

Dann kann man sich $q', U', P', \delta r$ und auch $X = \text{div } \vec{v}' = -i\sigma q'/\rho_0$ als unendliche Reihen nach Kugelflächenfunktionen angesetzt denken: wie bereits bekannt, hat

insbesondere der n -te Koeffizient der Entwicklung von X die Gestalt (1) $y_n \sum_{j=0}^{\infty} c_{2j} y^{2j}$

($y = r/R$, c_{2j} bekannte, noch von n und $\beta = \sigma^2 A$ abhängige Konstante; die Konstante A ist durch die Ausgangsfigur festgelegt). Um die Konvergenz von (1) für $y = 1$ zu sichern, wird (1) als Polynom vorausgesetzt, ($c_{2j} = 0$ für $j > k$), was durch geeignete Wahl von β möglich ist; diese β -Werte (je ein positiver und ein negativer) werden für $n = 2, 3, 4$ und $k = 0, 1, 2$ numerisch angegeben. Ferner wird für den n -ten Koeffizienten in der Entwicklung von $i\sigma \frac{\delta r}{R} = \frac{m}{R}$ ein expliziter Ausdruck hergeleitet und dieser für die obigen Zahlwerte in Abhängigkeit von y graphisch dargestellt. — Verf. behandelt weiter die gleiche Aufgabe unter der Annahme $U' \equiv 0$ und bestimmt die zahlenmäßigen Abweichungen der entsprechenden Werte von β und w/R .

Karl Maruhn.

Holt, M.: The flow of two adjacent plane supersonic jets past flat-plate wings. I. II. Quart. J. Mech. appl. Math. 3, 200—216 (1950), 4, 419—431 (1951).

Zwei homogene Überschallparallelstrahlen gleicher Strömungsrichtung, aber verschiedener Dichte und Geschwindigkeit, seien durch eine ebene Diskontinuitätsfläche (Wirbelschicht) voneinander getrennt. Im Inneren jedes der beiden Halbstrahlen werde Reibungs- und Drehungsfreiheit der Strömung vorausgesetzt. Ein von zwei geradlinigen Vorderkanten begrenzter, unendlich dünner ebener Flügel liege so in beiden Strahlen, daß er senkrecht auf der Diskontinuitätsfläche steht und daß seine Spitze in der Diskontinuitätsfläche liegt. Gefragt ist nach der

Druckverteilung auf der tragenden Platte bei kleinem Anstellwinkel. Nur Störglieder erster Ordnung sollen berücksichtigt werden, so daß von einer Verformung der Diskontinuitätsfläche abgesehen werden kann. — Dies Problem wird vom Verf. mittels A. Busemanns linearisierter Theorie der kegeligen Strömungen behandelt (was geht, da es ohne Auszeichnung einer bestimmten Länge formuliert ist). Die Arbeit benützt Tschaplygins Transformation der dreidimensionalen Schwingungsgleichungen für von nullem Grade homogene Lösungen (die Störgeschwindigkeitskomponenten) auf die zweidimensionale Laplacesche Gleichung mit nachfolgender funktionentheoretischer Behandlung des zugehörigen Randwertproblems, und ist methodisch und bezeichnungstechnisch auf die Arbeit von S. Goldstein und G. N. Ward, *Aeronaut. Quart.* 2, 39—84 (1950), aufgebaut. Im Teil I wird der Fall behandelt, daß beide Vorderkanten des Flügels Überschallkanten sind; dabei dürfen diese Kanten auch nach vorne gepfeilt sein. Fünf charakteristische Fälle werden unterschieden und für jeden solchen wird eine typische Druckverteilung errechnet und sowohl tabellarisch als auch bildlich wiedergegeben. — Ingenieurpraktische Anwendung kann diese Theorie finden bei der Ermittlung der Druckverteilung auf der Steuerfläche eines Überschallflugkörpers, wenn ein Teil dieser Fläche im Vortriebsstrahl liegt. Die gegebene Lösung kann aber auch als erste Näherung dienen für die Druckverteilung eines Flügels in nichtgleichförmiger Parallelströmung, indem man eine solche Strömung in eine endliche Anzahl diskreter Strahlen obiger Eigenschaften aufteilt. — Teil II ergänzt die oben genannten (sowohl mathematisch als auch technisch interessanten) Untersuchungen des Verf. auf den Fall, daß eine oder beide Vorderkanten des Flügels Unterschallkanten sind. Die Lösung wird mit ähnlichen Methoden gefunden wie in Teil I. *Hermann Behrbohm.*

Blank, Helga: Applicazione del metodo di Ritz al calcolo della corrente compressibile attorno ad un cilindro circolare. Monograf. sci. Aeronaut. Nr. 11, 11 S. (1951).

Es wird die ebene Potentialströmung einer kompressiblen Flüssigkeit um einen Kreiszylinder nach einem von G. Braun (dies. Zbl. 6, 61) benützten Variationsprinzip berechnet; es wird hier zum ersten Male versucht, diese Methode zur gleichzeitigen Berechnung der Strömung im Unter- und Überschallgebiet auszuwerten und zu erproben. *Wolfgang Gröbner.*

Clers, Bertrand des and Chieh-Chien Chang: On some special problems in linearized axially symmetric flow. *J. aeronaut. Sci.* 18, 127—138 (1951).

Verff. betrachten in erster Näherung die kompressible axialsymmetrische Strömung um einen unendlich langen sinusförmig gewellten Kreiszylinder. Im ersten Teil der Arbeit wird die Unter- und Überschallströmung im freien Luftmeer, im geschlossenen Kanal und im Freistrahle behandelt. Im zweiten Teil werden zur Abschätzung von Grenzschichteffekten noch konzentrische ringförmige Unstetigkeitsflächen hinzugenommen. *Hilmar Wendt.*

Munk, Max M.: The Rankine gas flow in the hodograph plane. *Quart. appl. Math.* 8, 387—392 (1951).

Verf. betrachtet ebene, stationäre, adiabatische, reibungsfreie Gasströmungen in der Hodographenebene. Es werden mittels des Legendreschen Potentials Strömungen angegeben, die für die Machsche Zahl Null in eine Rankine-Strömung (Quelle in Parallelströmung) übergehen. Den Schluß der Arbeit bildet eine Note von A. van Tuyl über die Konvergenz der benutzten Reihen. *Hilmar Wendt.*

Laitone, E. V.: Use of the local Mach number in the Prandtl-Glauert method. *J. aeronaut. Sci.* 18, 842—843 (1951).

Die Prandtl-Glauertsche Analogie wird mittels einleuchtender Annahmen durch Glieder höherer Ordnung ergänzt. Die Endformeln sind gleichbedeutend mit einer Verwendung der lokalen Machzahl in der Prandtl-Glauert-Analogie, womit ein früherer Vorschlag des Verf. (dies. Zbl. 42, 200) untermauert wird. *Klaus Oswatitsch.*

Teofilato, Pietro: Applicazione del metodo delle caratteristiche alla corrente supersonica vorticiosa. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 124—129 (1951).

Für isoenergetische zweidimensionale wirbelige Überschallströmungen eines idealen Gases wird auf dem üblichen Wege aus der quasilinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung für Crocco's Stromfunktion ein Charakteristiken-

verfahren hergeleitet. Im Schlußabschnitt wird A. Ferri's Charakteristikenverfahren [NACA. techn. Note Nr. 1135 (1946)] für drehsymmetrische Wirbelströmungen an Hand einer Fehlerabschätzung einer Kritik unterzogen.

Hermann Behrbohm.

Lees, Lester: Note on the hypersonic similarity law for an unyawed cone. J. aeronaut. Sci. 18, 700—703 (1951).

Ableitung und Bestimmung der Gültigkeitsgrenzen für die Ähnlichkeitsgesetze der Hyperschallströmungen (vgl. dies. Zbl. 42, 439) um den nichtangestellten Kegel aus den von Taylor und Maccoll angegebenen Differentialgleichungen.

Hilmar Wendt.

Bechert, Karl und Helmut Marx: Ebene Wellen endlicher Amplituden in idealen Gasen. Z. Naturforsch. 6a, 767—775 (1951).

Ebene Störungen endlicher Amplitude in idealen Gasen können durch physikalische Größen beschrieben werden, die für fortschreitende Wellen kennzeichnend sind. Führt man die Größen $v = \alpha c + u$ und $w = \alpha c - u$ ein (u Strömungsgeschwindigkeit, c Schallgeschwindigkeit, α Zahl der Freiheitsgrade des Gases, für Luft etwas über 5), so wandert ein fester Wert von v mit der Geschwindigkeit $u + c$, ein fester Wert von w mit der Geschwindigkeit $u - c$. Häufig ist es bequemer, statt v und w die Schallgeschwindigkeiten c_v , c_w oder die Drucke p_v , p_w zu verwenden, welche zu den beiden fortschreitenden Wellen gehören würden, die aus der v - und w -Welle entstünden, wenn diese sich einzeln in ungestörtem Gebiet ausbreiten könnten. Diese Betrachtungsweise, bei der Stoßvorgänge nicht berücksichtigt werden, ist besonders geeignet, das Wellenwandern in Motoren und nicht zu langen Rohren zu beschreiben. Insbesondere können mit diesem Verfahren die Vorgänge im Schmidt-Rohr (Verpuffungs-Strahlrohr) behandelt werden, dessen Theorie von den Verff. in drei noch nicht veröffentlichten Arbeiten (1942/44) gegeben wurde. In der vorliegenden Arbeit wird diese Betrachtungsweise auf Vorgänge der Reflexion und der Rohrströmung angewandt, wobei auch die Reflexion an der Grenze von zwei Gebieten mit verschiedener Adiabatenkonstante behandelt wird, sowie eine qualitative Betrachtung über die Strömung in einem einseitig offenen Rohr angeschlossen wird, bei dem an der geschlossenen Wand Ventilkappen angebracht sind (Schmidtrohr). Wenn die Druckstörungen nicht wesentlich über das Doppelte des ungestörten Druckes p_n hinausgehen, steigen die zugehörigen Mc nicht wesentlich über 0,1 c_n , wobei c_n die ungestörte Schallgeschwindigkeit bedeutet. In diesem Bereich kann man nach Mc/c_n entwickeln, während die akustische Näherung, welche Entwicklung nach $\Delta p/p_n$ bedeutet, hier versagt. Es können auf diese Weise Näherungsformeln abgeleitet werden, mit denen man den in der Praxis wichtigen Bereich mäßig großer endlicher Amplituden mit einfachen Formeln beherrscht.

Walter Wuest.

Sauer, Robert: Elementare Lösungen der Wellengleichung isentropischer Gasströmungen. Z. angew. Math. Mech. 31, 339—343 (1951).

Die Wellengleichung für die instationäre eindimensionale adiabatische Strömung des idealen Gases läßt bekanntlich für gewisse γ -Werte eine explizite Lösung zu. Verf. zeigt nun, daß auch für andere, nichtideale Gase explizite Lösungen angegeben werden können, und leitet die allgemeinste Druck-Dichtebeziehung ab, für welche solche Lösungen gewonnen werden können. Die Adiabatangleichung des idealen Gases ist in dieser Druck-Dichtebeziehung als Spezialfall enthalten, doch enthält diese Beziehung auch noch Gase mit vollkommen hypothetischen Eigenschaften. Da jedoch diese allgemeine Adiabate drei freie Parameter enthält, kann man mit ihrer Hilfe verschiedene reale Druck-Dichtebeziehungen sehr gut approximieren. Darin liegt der große praktische Wert der Sauer'schen Arbeit. — Ähnliches gilt auch für die zweidimensionale stationäre Strömung — nur mit dem Unterschied, daß in diesem Fall die ideale Adiabate in der allgemeinsten Druck-Dichte-Beziehung, die zu expliziten Lösungen ähnlicher Art führt, nicht enthalten ist. Verf. diskutiert ausführlich zwei praktisch wichtige Spezialfälle und führt schließlich noch die von ihm stammende Methode der geradlinigen Charakteristiken als weiteres Mittel zur Gewinnung solcher expliziter Lösungen an.

F. Cap.

Gilbarg, David: The existence and limit behavior of the one-dimensional shock layer. Amer. J. Math. 73, 256—274 (1951).

Die Arbeit erledigt einige grundsätzliche, aber bislang offene Probleme aus der Theorie der stationären, eindimensionalen Strömungen eines zähen, wärmeleitenden Gases. Haben diese Strömungen bei $x = \infty$ und bei $x = -\infty$ endliche Grenzwerte, die nur die notwendige Bedingung erfüllen müssen, ein Paar von möglichen Zuständen vor und hinter einer Stoßfront in einer idealen Flüssigkeit zu sein, so heißen sie nach H. Weyl (dies. Zbl. 35, 420) Stoßschichten. Eine solche Stoßschicht hat für kleine Werte der Zähigkeit μ und des Wärmeleitvermögens λ die Eigenschaft, daß sie sich von ihren asymptotischen Endwerten nur in einer schmalen Übergangszone wesentlich unterscheidet und somit das Urbild aller Stoßvorgänge darstellt. — Für die allgemeine Klasse Weylscher Flüssigkeiten (welche die polytropen Gase als Spezialfall ent-

hält) werden mit λ , μ als willkürlichen (positiven) Zustandsfunktionen — dies ist [neben der Methodik, u. a. das für den Überblick über die Topologie der Phasenebene günstige Zustandsvariablenpaar τ (spez. Volumen) und θ (Temperatur) zu wählen] das wesentlich Neue dieser Arbeit — folgende Tatsachen bewiesen: 1. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung (früher wohl nur für Prandtl'sche Zahl $c_p \mu/\lambda = 0,75$ streng bewiesen); 2. jede Stoßfront in einer idealen Flüssigkeit ist Grenzwert der entsprechenden Stoßschichten, und — umgekehrt — alle Stoßschichten mit denselben Endzuständen konvergieren gegen eine Stoßfront, wenn λ und μ in beliebiger Weise gegen Null streben (dies rechtfertigt in gewissem Sinne die klassische Stoßfronttheorie als Grenzfall der entsprechenden Theorie für reale Gase); 3. an Hand des Grenzverhaltens der Lösungen wird eine verschiedene Art der Abhängigkeit der strömenden Medien von der Zähigkeit bzw. von dem Wärmeleitvermögen aufgedeckt: bei festem μ streben mit $\lambda \rightarrow 0$ die Stoßschichten gegen eine stetige, nichtwärmeleitende Stoßschicht; bei festem λ dagegen streben mit $\mu \rightarrow 0$ die Stoßschichten gegen eine im allgemeinen unstetige, reibungsfreie Stoßschicht. — Es möchte scheinen, als ob für das schon öfters behandelte Problem einer Abschätzung der Dicke der Stoßzone („Dicke“ in näher zu definierendem Sinne) aus dieser wertvollen Arbeit Nutzen zu ziehen ist. — Schließlich sei auf eine ganz kürzlich erschienene Arbeit von G. S. S. Ludford [Quart. appl. Math. 10, 1–16 (1952)] mit verwandtem Thema (the boundary layer nature of shock transition in a real fluid) aber anderem methodischen Wege der Behandlung hingewiesen.

Hermann Behrbohm.

Ludford, Geoffrey S. S.: The classification of one-dimensional flows and the general shock problem of a compressible, viscous, heat-conducting fluid. J. aeronaut. Sci. 18, 830–834 (1951).

Verallgemeinerung der Berechnung der Stoßstruktur mit Rücksicht auf Wärmeleitung und innere Reibung, wie sie ursprünglich von R. Becker durchgeführt wurde. In Anbetracht, daß es sich aber dabei bekanntlich nicht mehr um ein Problem der Kontinuitätsphysik handelt, sind solche Rechnungen kaum von praktischer Bedeutung.

Klaus Oswatitsch.

Graham, E. W.: A limitation on shock position. J. aeronaut. Sci. 18, 702–703 (1951).

Anwendung der Kontinuitätsgleichung liefert Grenzlagen für Stoßwellen.

Hilmar Wendt.

Jones, Doris M., P. Moira E. Martin and C. K. Thornhill: A note on the pseudo-stationary flow behind a strong shock diffracted or reflected at a corner. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 209, 238–248 (1951).

Unter pseudo-stationary flow wird eine instationäre kompressible Strömung in der x - y -Ebene verstanden, die nur von x/t und y/t (t Zeit) abhängt. Es wird gezeigt, daß sich die Differentialgleichungen einer solchen Strömung leicht in die einer ebenen stationären Strömung umrechnen lassen, auf die äußere Kräfte wirken und in der Senken angebracht sind (Wecken: Problèmes pseudostationnaires, Report du Laboratoire d'études ballistiques de St. Louis 1947). Die Verff. diskutieren qualitativ die instationäre Strömung eines Verdichtungsstoßes in ruhender Luft um eine Ecke. Die Stoßfront steht zu Beginn senkrecht auf einem Schenkel der Ecke.

Hilmar Wendt.

Kofink, W.: Über die zwei Strömungsfelder hinter einem Gabelstoß. Ann. der Physik, VI. F. 9, 401–405 (1951).

In Ergänzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 42, 439) leitet Verf. Ungleichungen ab für Dichten und Strömungsgeschwindigkeiten in den beiden Abstromfeldern hinter einer stationären Gabel. Beide Ungleichungen wirken in dem Sinne, daß die Abströmung hinter den Nebenstoßen einen geringeren Querschnitt besitzt als diejenige hinter dem Hauptstoß (bei gleichem Massendurchsatz). Nur in ausgearteten Grenzfällen gilt Gleichheit.

Franz Wecken.

Ross, Frederick W.: The propagation in a compressible fluid of finite oblique disturbances with energy exchange and change of state. J. appl. Phys. 22, 1414–1421 (1951).

Zur formal-mathematischen Behandlung von Kondensationsstößen in stationärer Überschallströmung stellt Verf. im Anschluß an Oswatitsch [Z. angew. Math.

Mech. 22, 1 (1942)] Übergangsbedingungen auf für schief zur Strömung liegende Unstetigkeitsflächen mit Energietönung, teilweiser Kondensation und Änderung der spezifischen Wärmen. Entsprechend modifizierte Stoßbeziehungen werden formelmäßig und für einige Zahlenwerte graphisch (z. B. als Stoßpolaren) angegeben und die Abweichungen gegenüber gewöhnlichen Verdichtungsstößen diskutiert. Neben dem Kondensationsstoß lassen sich auch Verbrennung und Detonation idealer Gase und als trivialer Grenzfall der Verdichtungsstoß erfassen. Volumen und spezifische Wärme des kondensierten Anteils sind vernachlässigt, Änderung des (mittleren) Molekulargewichts ist nicht berücksichtigt. *Franz Wecken.*

Legras, Jean: Application de la méthode de Lighthill à un écoulement plan supersonique. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1005—1008 (1951).

Näherungsweise Berechnung von ebenen Überschallströmungen und Stoßfronten durch Übertragung der von Lighthill (dies. Zbl. 37, 119) und Whitham (dies. Zbl. 37, 119) entwickelten Methode auf 2 Dimensionen. *Hilmar Wendt.*

Ghosh, R. N.: Application of perturbation method to acoustical problems. Bull. Allahabad Univ. Math. Assoc. 15, 17—23 (1951).

Die durch Aufbringen schallschluckender Stoffe (Quellen) verursachte Druckverteilungsänderung auf den Wänden eines Raumes mit rechteckigem Aufriß wird nach der Störungsmethode der Potentialtheorie dargestellt. *Joachim Pretsch.*

Miles, John W.: On virtual mass and transient motion in subsonic compressible flow. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 388—400 (1951).

Verf. behandelt in akustischer Näherung die stoßartige Bewegung von Körpern in kompressibler, zweidimensionaler Unterschallströmung in Polarkoordinaten. Die Wellengleichung

$\Delta\varphi = \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi}$, wo $\varphi(r, \vartheta, t)$ das Potential ist, wird in $\xi^2 (\psi_{\xi\xi} - \psi_{\tau\tau}) + \xi \psi_{\xi} - \psi = 0$ transformiert,

welche Gleichung für einen Zylinder integriert wird. Es zeigt sich, daß bei ruckweiser Beschleunigung des Zylinders ein gewisser Prozentsatz der geleisteten Arbeit als Strahlung verloren geht — der Startwirkungsgrad (Verhältnis von Bewegungsenergie zu geleisteter Arbeit) ist um so größer, je länger die beschleunigende Kraft wirkt und je kleiner die charakteristische Länge des Körpers ist (im Spezialfall: Zylinderradius). Eine Abschätzung ergibt, daß für Flugzeuge oder für eine Violine die Wirkungsgrad praktisch 1 ist, während für einen Freiballon oder eine Trommel kleinere Werte erhalten werden. Im einzelnen werden der Fall einer gewissen Zeit wirkenden konstanten Kraft und ferner die Lösung des Problems bei einer bestimmten vorgeschriebenen Geschwindigkeitsänderung behandelt. In den Rechnungen wird ausgedehnter Gebrauch von der Laplace-Transformation gemacht. Interessant ist, daß sich bei der Berechnung des zeitlichen Kraftverlaufes bei vorgegebener Startgeschwindigkeit auch negative Kraftwerte ergeben. Die startende Kraft erzeugt also auch einen Bewegungswiderstand — der Vorgang ist irreversibel und damit fällt die Möglichkeit weg, die Bewegung durch eine virtuelle Masse zu beschreiben, wie dies bei dem inkompressiblen Problem möglich ist. *F. Cap.*

Dorrestein, R.: General linearized theory of the effect of surface films on water ripples. II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B 54, 350—356 (1951).

Die theoretischen Ableitungen einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 43, 195) über den Einfluß von Ölfilmen auf die Wellenbewegung werden in bezug auf die Wirkung der Turbulenz der Wasserbewegung und der Energieübertragung vom Wind auf die Wellen erörtert und sollen in einer späteren Arbeit mit bekannten Beziehungen zwischen Oberflächenspannung und Oberflächeninhalt verglichen werden. *Joachim Pretsch.*

Wärmelehre:

Foulkes, P.: On a general thermodynamic theory of the equation of state. Physica 17, 943—952 (1951).

Für die thermodynamischen Eigenschaften eines homogenen Systems wird die Bedingung $(\partial p / \partial S)_E = \mu T (\partial p / \partial E)_S$ postuliert (μ = Konstante, S = Entropie, E = innere Energie). Daraus werden Folgerungen für die Zustandsgleichung gezogen. *Josef Meixner.*

Himpan, Joseph: Eine neue thermische Zustandsgleichung. I. Z. Phys. 131, 17—27 (1951).

Es wird eine thermische Zustandsgleichung für reale Gase der Form

$$\left(p + \frac{a}{T^{\frac{1}{n}} V(V-b)}\right)(V-c) = RT$$

vorgeschlagen, wobei die drei Konstanten a , b und c aus der Forderung zu bestimmen sind, daß die Isothermen im pV -Diagramm, wie bei der van der Waals-Gleichung im kritischen Punkt eine horizontale Wendetangente besitzen und daß sich darüber hinaus auch noch für den kritischen Faktor $s = RT_k/p_k V_k$ der richtige Wert ergibt. Bei nicht assoziierenden Substanzen bewährt sich diese neue Zustandsgleichung recht gut hinsichtlich der Größe der Boyle-Temperatur und führt auch zu weniger starken Abweichungen von den Meßkurven für die Druckabhängigkeit der spezifischen Wärmen als etwa die Zustandsgleichung von Berthelot. Doch versagt sie, da sie ausschließlich an die Verhältnisse am kritischen Punkt angepaßt ist, bei assoziierenden Substanzen, bei denen naturgemäß gerade in der Umgebung dieses Punktes besonders starke Abweichungen gegenüber dem Verhalten normaler Gase auftreten.

Fritz Sauter.

Himpan, Joseph: Eine neue thermische Zustandsgleichung. II. Z. Phys. 131, 130—135 (1951).

Um nach demselben Prinzip wie im vorstehend referierten I. Teil seiner Untersuchung auch für assoziierende Gase zu einer gut brauchbaren thermischen Zustandsgleichung zu kommen, macht Verf. einen vierparametrischen Ansatz

$$\left(p + \frac{a}{T^n V(V-b)}\right)(V-c) = RT$$

und bestimmt die Parameter wie im I. Teil aus dem Verhalten am kritischen Punkt einschließlich der richtigen Wiedergabe des kritischen Faktors $s = RT_k/p_k V_k$. fordert aber darüber hinaus, daß die Zustandsgleichung auch noch den Boyle-Punkt richtig liefert. Für den Temperaturexponenten n ergeben sich dadurch bei Ne, A, N₂ und O₂ Werte in unmittelbarer Nähe von 1; für He findet Verf. $n = 0.200$, für H₂ $n = 0,380$, für assoziierende Substanzen n -Werte, die wesentlich über 1 liegen.

Fritz Sauter.

Haase, Rolf: Zur Thermodynamik der irreversiblen Prozesse. I. Z. Naturforsch. 6a, 420—437 (1951).

Die Grundgesetze der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse werden in möglichst allgemeiner Form aufgestellt, für beliebig viele chemische Reaktionen in offenen chemischen Systemen, Kopplung von Materie- und Wärmeübergang zwischen zwei Phasen eines polythermen Systems, beliebige irreversible Prozesse, die aus isotropen Medien bestehen, in jedem Falle mit der Voraussetzung einer beliebigen Anzahl von Stoffen. Eine wichtige Vereinfachung des formalen Apparates ergibt sich durch die konsequente Anwendung des sogenannten reduzierten Wärmestromes, der in besonders anschaulicher Weise mit dem Entropiestrom zusammenhängt.

Josef Meixner.

Haase, Rolf: Zur Thermodynamik der irreversiblen Prozesse. II. Z. Naturforsch. 6a, 522—540 (1951).

Teil I, siehe vorsteh. Referat. Allgemeine Zusammenhänge zwischen den stationären Zuständen und den Zuständen minimaler Entropieerzeugung in Systemen, die sich nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befinden, werden aufgefunden. Sie folgen aus den Gesetzen der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse unter besonderer Berücksichtigung der Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen. Die Abgrenzung der gefundenen Zusammenhänge gegen die Onsagerschen Extremalprinzipien wird diskutiert. Verallgemeinerungsmöglichkeiten werden vermutet, u. a. weil sich die Chapman-Jouguetsche Bedingung für die Geschwindigkeit der stabilen

Detonationswelle aus dem Satz herleiten läßt, daß der stabile stationäre Endzustand durch das Minimum der Entropie-Erzeugung längs der Hugoniot-Kurve charakterisiert ist.

Josef Meixner.

Brillouin, L.: Maxwell's demon cannot operate: Information and entropy. I. J. appl. Phys. **22**, 334—337 (1951).

„Wissen ist Macht“, lautet ein bekanntes Schlagwort. Verf. zeigt, daß „Wissen negative Entropie“ ist. Selbst der Maxwellsche Dämon kann nicht arbeiten, ohne irgendwoher zur Unterscheidung der schnelleren von den langsameren Molekülen negative Entropie heranzuziehen. Denn, da in einem mit Molekülen erfüllten Raum bei einer bestimmten Temperatur auch immer die dieser Temperatur entsprechende schwarze Strahlung herrscht, kann der Maxwellsche Dämon die Moleküle nicht sehen. Verf. schränkt also die Allwissenheit des Dämons durch die Forderung ein, daß er die Moleküle sehen muß. Er braucht wie der menschliche Experimentator eine Lichtquelle höherer Temperatur, die mindestens ein Lichtquant in einem weitaus vom Maximum der schwarzen Strahlung liegenden Spektralbereich aussendet, um die Moleküle zu sehen und den schnelleren die Klappe zu öffnen, um sie herauszufangen. Der Dämon braucht also eine Extralichtquelle, d. h. in diesem Falle eine Quelle negativer Entropie, um zu seinem Wissen zu kommen. Die negative Entropie, die er benützt, stammt aus dem thermodynamischen System der Lichtquelle, deren Entropie sich erhöht. Mit dem gewonnenen „Wissen“ über die schnelleren und langsameren Moleküle kann er zwar die Entropie des Gases verkleinern, aber in der Gesamtbilanz wächst die Entropie. Der Dämon kann den 2. Hauptsatz nicht außer Kraft setzen.

Walter Kofink.

Brillouin, L.: Physical entropy and information. II. J. appl. Phys. **22**, 338 343 (1951).

Verf. zeigt, daß der Begriff des „Wissens“ (information) auf ein Problem der Fermi-Dirac-Statistik oder einer verallgemeinerten Fermistatistik zurückgeführt werden kann. Er definiert damit die Entropie einer wissensvermittelnden Nachricht und verknüpft das in der Nachricht enthaltene Wissen mathematisch mit der Abnahme der Entropie des Systems. Seine Definition führt zu dem von Shannon vorgeschlagenen Meßwert des Wissens. Shannons „entropy of information“ entspricht einem gleichen Betrag negativer Entropie des Systems.

Walter Kofink.

Mund, W.: Remarques sur la constante d'entropie et le troisième principe de la thermodynamique. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **37**, 207—212 (1951).

Dutta, M.: Thermodynamic behaviour of a gaseous assembly of point-molecules assuming association. Indian J. Phys. **25**, 317—328 (1951).

Für assoziierende Gase, wie Schwefel- oder Wasserdampf, wird unter Verwendung des Darwin-Fowlerschen Formalismus die Zustandssumme berechnet, indem angenommen wird, daß ein assoziierter Komplex aus r einzelnen Molekülen die r -fache Masse und eine Energie $rb + \chi_r$ besitzt, wobei b die innere Energie des Einzelmoleküls und χ_r die Assoziationsenergie bedeutet. Die Rechnung, die weitgehende Ähnlichkeit mit der Kondensationstheorie von Gasen besitzt, wird ganz allgemein durchgeführt, wobei Formeln für die thermische Zustandsgleichung, die isotherme Kompressibilität, den isobaren Ausdehnungskoeffizienten und die spezifischen Wärmen abgeleitet werden. Eine Anwendung auf praktisch vorliegende Fälle bzw. ein Vergleich mit experimentellen Ergebnissen wird nicht vorgenommen.

Fritz Sauter.

Fierz, M.: Zur Theorie der Kondensation. Helvet. phys. Acta **24**, 357—366 (1951).

Die Existenz der Kondensation im Rahmen der statistischen Mechanik wird für ein einfaches Modell streng bewiesen. Dazu wird ein Wechselwirkungspotential der Moleküle $\Phi(r) = 0$ für $r > r_1$, $= -u = \text{const}$ für $r_0 < r < r_1$ und $= \infty$ für $r < r_0$ zugrunde gelegt und es wird der Grenzfall kleiner Dichten und tiefer Temperaturen behandelt. Der Kondensationspunkt ergibt sich als eine Singularität der Zustandsgleichung mit wohldefiniertem Druck aber unbestimmter Dichte. Für die Bildung zweier Phasen ist die Oberflächenspannung entscheidend; damit ist auch geklärt, warum ein „eindimensionales“ Gas, das keine Oberflächenspannung besitzt, nicht kondensiert.

Josef Meixner.

Koppe, H.: Fermi-Statistik für Systeme mit Wechselwirkung. Z. Naturforsch. 6a, 517—519 (1951).

Verf. betrachtet Fermi-Ensembles mit Wechselwirkung, deren Gesamtenergie durch
$$E = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon + \int_0^\infty \int_0^\infty R(\varepsilon, \varepsilon') f(\varepsilon) f(\varepsilon') D(\varepsilon) D(\varepsilon') d\varepsilon d\varepsilon', \quad R(\varepsilon, \varepsilon') = R(\varepsilon', \varepsilon)$$
 gegeben ist. Für $f = f(\varepsilon, T)$ wird eine Integralgleichung aufgestellt und die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen aus $C_v/T = \partial S/\partial T$ bestimmt. Es ergeben sich Ausdrücke, die formal denen des wechselwirkungsfreien Falles entsprechen. *Wolfram Urich.*

Melan, Ernst: Temperaturverteilungen ohne Wärmespannungen. Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 1—3 (1951).

Elektrodynamik. Optik:

Durand, Émile: Solutions générales des équations de l'électrostatique et de la magnétostatique. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1008—1010 (1951).

J. A. Stratton [Electromagnetic Theory, New York 1941, p. 253, equation (14)], has given an integral theorem expressing a vector-function in terms of surface and volume integrals. The present author proves a modified version of this formula which he considers more convenient for applications. Electrostatic and magnetostatic versions are given. Finally [author's formula (9)] he deduces Stratton's formula. *Frederick V. Atkinson.*

Alsina, Fidel: Bewegliche Punktladung in der Nähe eines Leiters. An. Soc. ci. Argentina 152, 159—166 (1951) [Spanisch].

Flügge, S.: Bemerkungen zum Potential eines homogenen geladenen Rotationsellipsoids. Z. Phys. 130, 159—163 (1951).

The author first finds the potential of a uniform spheroidal volume-distribution of electric charge. His method, based on confocal elliptic coordinates, appears to be simpler than the usual method for the equivalent problem for Newtonian attractions. As applications, expressions are then found for the quadrupole moment and for the electrostatic energy, acknowledgements being made to K. Woeste in the latter connection. The problem is stated to arise out of classical atomic theory. *Frederick V. Atkinson.*

Dixon, W. R.: Note on electromagnetic moment of inertia. Amer. J. Phys. 19, 536—537 (1951).

Berechnet man für den Fall einer ausgedehnten, starr rotierenden Ladungsverteilung den elektromagnetischen Drehimpuls \mathfrak{S} (aus der Impulsströmung $[\mathfrak{E} \mathfrak{H}]/4\pi c$) und die elektromagnetische Feldenergie T , so findet man dafür genau die gleichen Zusammenhänge mit dem Drehvektor ω wie in der klassischen Mechanik, nämlich $\mathfrak{S} = \theta \cdot \omega$, $T = \omega \cdot \theta \cdot \omega/2$. Der dabei auftretende Tensor θ des „elektromagnetischen Trägheitsmomentes“ ist ähnlich gebaut wie das entsprechende mechanische Trägheitsmoment; nur steht an Stelle der mechanischen Massendichte die elektrische. Nimmt man nun an, daß die gesamte Masse des rotierenden Teilchens elektromagnetischen Ursprungs ist, und berechnet für dieses Teilchen das Verhältnis des magnetischen Momentes zum elektromagnetischen Drehimpuls, so findet man für dieses Verhältnis im Fall einer reinen Oberflächenladung auf einem kugelförmigen Teilchen genau den Wert e/mc , während alle anderen Ladungsverteilungen zu größeren Werten dieses Verhältnisses führen. *Fritz Sauter.*

Gordon, A. N.: Electromagnetic induction in uniform semi-infinite conductor. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 116—128 (1951).

Es wird das quasistationäre Feld eines schwingenden Dipols berechnet, der in einem endlichen Abstand oberhalb der Grenzebene eines metallisch leitenden unendlichen Halbraums in der Weise angeordnet ist, daß seine Achse senkrecht zu dieser

Grenzebene steht. Für die lösenden Integrale werden Reihenentwicklungen aufgestellt, um auch die numerische Berechnung bewerkstelligen zu können. Die für Messungen besonders geeignete Komponente des magnetischen Feldes senkrecht zur Grenzebene wird im letzten Teil der Arbeit auch noch für den Fall berechnet, daß das induzierende Feld von einer kreisförmigen Leiterschleife gebildet wird.

Herbert Buchholz.

Gans, Richard: Zum Problem der Maxwell'schen Spannungen. Ann. der Physik, VI. F. 9, 337—340 (1951).

Es wird darauf hingewiesen, daß die von Sommerfeld und Bopp [Ann. der Physik, VI. F. 8, 41—45 (1950)] angegebenen Kräfte auf permanente Magnete, welche sich in einem magnetisierbaren Medium befinden, in Widerspruch stehen zu den Folgerungen aus dem Energiesatz der Maxwell'schen Theorie.

Fritz Sauter.

Döring, W.: Über die Kraft und das Drehmoment auf magnetisierte Körper im Magnetfeld. Ann. der Physik, VI. F. 9, 363—372 (1951).

Zur Klärung der in letzter Zeit mehrfach diskutierten Frage, welche Kraft und welches Drehmoment ein in eine homogene permeable Flüssigkeit eingetauchter magnetischer Körper in einem äußeren Felde erfährt, werden diese Größen ohne Bezugnahme auf den Maxwell'schen Spannungstensor in unmittelbar einleuchtender Weise berechnet. Und zwar werden beide Größen unter der Annahme, daß sie sich (wie im Fall der Maxwell'schen Spannungen) als Oberflächenintegral über eine den Körper umschließende, ganz in der Flüssigkeit gelegene Fläche darstellen lassen, aus der Feldwirkung auf ein Ersatz-Stromsystem berechnet, welches man an Stelle des magnetisierten Körpers in die dann durchwegs homogene Flüssigkeit einbringen muß, um überall genau das gleiche Magnetfeld zu erzeugen. Es ergeben sich (im internationalen Maßsystem) für die Kraft \mathfrak{K} und für das Drehmoment \mathfrak{D} eindeutig die Ausdrücke

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{\mu \mu_0} \int [\text{rot } \mathfrak{B}, \mathfrak{B}] dV, \quad \mathfrak{D} = \frac{1}{\mu \mu_0} \int [\mathfrak{r} [\text{rot } \mathfrak{B}, \mathfrak{B}]] dV,$$

in denen μ die Permeabilität der umgebenden Flüssigkeit bedeutet. Aus diesen Formeln wird in einfacher Weise ein Ausdruck für das Drehmoment eines magnetisierten Ellipsoides in einem homogenen Magnetfeld abgeleitet. *Fritz Sauter.*

Diesselhorst, H.: Magnetfeld und Drehmoment bei einem magnetischen Ellipsoid in permeablem Medium und Fremdfeld. Ann. der Physik, VI. F. 9, 319—324 (1951).

Für ein homogen magnetisiertes dreiaxsiges Ellipsoid, welches sich in einer homogenen Flüssigkeit mit $\mu \neq 1$ befindet und auf das ein äußeres Magnetfeld einwirkt, werden der gesamte Feldverlauf, sowie das wirksame Drehmoment berechnet. Für letzteres wird der gleiche Wert wie von Döring (vgl. das vorstehende Referat) gefunden. *Fritz Sauter.*

Brown jr., William Fuller: Electric and magnetic forces: A direct calculation. II. Amer. J. Phys. 19, 333—350 (1951).

In Fortsetzung einer früheren ausführlichen Untersuchung des Verf. (dies. Zbl. 42, 445) über die Berechnung der elektrischen und magnetischen Kräfte polarisierbarer oder magnetisierbarer Medien in äußeren Kraftfeldern werden im vorliegenden II. Teil zunächst die Kraftverhältnisse für eine Kugel von beliebigen Materialeigenschaften untersucht, welche von einer normal polarisierbaren Flüssigkeit umgeben ist und sich in einem äußeren axialsymmetrischen Kraftfeld befindet. Dabei kommt Verf. genau auf die gleichen Aussagen wie bei der Verwendung der Maxwell'schen Spannungen. Schließlich werden noch einige energetische Betrachtungen angestellt hinsichtlich des Zusammenhanges mit gewissen thermodynamischen Problemen, sowie mit magnetoelastischen und piezoelektrischen Effekten. *Fritz Sauter.*

Krishna, K. V.: Harmonic distortion in frequency modulation reception. I. Indian J. Phys. **25**, 504—510 (1951).

Zeuli, Tino: Vibrazioni elettromagnetiche in una cavità cilindrica circolare retta riempita di dielettrico eterogeneo, con un involucro perfettamente conduttore. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **10**, 285—304 (1951).

L'A. presenta alcune considerazioni analitiche intorno alla determinazione degli autovalori delle note equazioni del problema della propagazione di onde elettromagnetiche lungo un dielettrico cilindrico circolare il cui contorno sia un perfetto conduttore, quando la costante dielettrica dipende da una delle coordinate cilindriche lineari. — Il problema ha interesse nella moderna tecnica delle alte frequenze; il caso del dielettrico omogeneo è stato oggetto di numerose importanti ricerche il cui interesse fisico è stato posto in rilievo specialmente nelle opere di L. de Broglie, *Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques*, Paris 1941 (questo Zbl. **25**, 124); S. A. Schelkounoff, *Electromagnetic waves*, New York 1943; A. Sommerfeld, *Elektrodynamik*, Wiesbaden 1948 (questo Zbl. **35**, 124).

Giovanni Lampariello.

Marcuvitz, N. and J. Schwinger: On the representation of the electric and magnetic fields produced by currents and discontinuities in wave guides. I. J. appl. Phys. **22**, 806—819 (1951).

Aufgaben über die Streuung elektromagnetischer Wellen in zylindrischen Wellenleitern laufen im allgemeinen hinaus auf die Berechnung elektromagnetischer Felder, die bei gleichzeitigem Vorhandensein geometrischer Unstetigkeiten im Raum des Wellenleiters durch willkürliche Ströme erzeugt werden. Die geometrischen Unstetigkeiten bestehen einmal in wirklichen Hindernissen, die im Zuge des Wellenleiters liegen etwa wie die Irisblenden, oder in Öffnungen in der Wandung des Wellenleiters an solchen Stellen, wo Abzweigungen angeschlossen werden. In beiden Fällen läßt sich der Einfluß dieser Unstetigkeiten durch fiktive, flächenhafte, elektrische oder magnetische Ströme beschreiben, und es kann danach der Wellenleiter so betrachtet werden, als seien diese Unstetigkeiten nicht vorhanden. Die totale Berechnung des elektromagnetischen Feldes ist damit auf die folgenden beiden Probleme zurückgeführt: 1. Berechnung der Felder, die von den vorgeschriebenen und induzierten Strömen in dem von Unstetigkeiten freien Wellenleiter erzeugt werden, 2. Bestimmung der induzierten Ströme aus der Forderung, daß die so erzeugten Felder den Grenzbedingungen an den früheren Unstetigkeitsflächen genügen. — Die erste Aufgabe wird in der vorliegenden Arbeit so angepackt, daß die Felder durch das vollständige System der Eigenwellen dargestellt werden. Dieses Eigenwertproblem, das im wesentlichen in der Auffindung der Eigenfunktionen und der Eigenwerte besteht, wird für den Fall eines gleichförmigen Wellenleiters mit vollkommen leitenden Wänden erörtert. Der zweite Teil der Aufgabe wird unter Heranziehung der Theorie der Übertragungsleitungen bewältigt. Auf den Zusammenhang dieses Lösungsverfahrens mit der Darstellung durch eine dyadische Greensche Funktion, auf die in einem zweiten Teil der Arbeit eingegangen werden soll, wird kurz hingewiesen.

Herbert Buchholz.

Svešnikov, A. G.: Das Prinzip des Absorptions-Limes in einem Wellenleiter. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **80**, 345—347 (1951) [Russisch].

Verf. zeigt, daß die Lösung der Wellengleichung für einen zylindrischen Wellenleiter, welche der Sommerfeldschen-Ausstrahlungsbedingung genügt, aus dem „Prinzip des Absorptionslimes“ (s. Verf., dies. Zbl. **40**, 419) gewonnen werden kann.

Walter Franz.

Attwood, Stephen S.: Surface-wave propagation over a coated plane conductor. J. appl. Phys. **22**, 504—509 (1951).

Um die Resultate, zu denen Goubeau gelangt ist, bequemer und übersichtlicher diskutieren zu können, wird in dieser Arbeit die Ausbreitung einer *TM*-Welle längs der Oberfläche eines vollkommen leitenden unendlichen Halbraums unter der für den Gedankengang Goubeaus charakteristischen Annahme untersucht, daß unmittelbar an der Grenzfläche eine dünne dielektrische Schicht sitzt. Goubeau selbst hat bekanntlich den Fall untersucht, wo der vollkommene Leiter einen kreisförmigen Querschnitt hat. Die bei der weitergehenden Idealisierung des Verfassers sehr einfache Lösung zeigt auch im vorliegenden Falle die für diese Anordnung typische starke Energiekonzentration der Welle in der Oberflächenschicht. Selbst-

verständlich wird die Lösung auch im vorliegenden Falle nur für die einfarbige Welle im eingeschwungenen Zustand hergestellt. Auf Grund der Ergebnisse liegt das Optimum des Effektes bei einem höheren Wert der Dielektrizitätskonstanten und einem niedrigeren Wert der Leitfähigkeit, als bei den bisherigen Versuchen zugrunde gelegt worden sind.

Herbert Buchholz.

King, Ronold: Theory of V-antennas. J. appl. Phys. 22, 1111—1121 (1951).

Es wird für die Stromverteilung längs der beiden Leiter einer symmetrischen, V-förmigen Antenne, die aus geraden Stäben von kreisförmigem Querschnitt bestehen, eine Integralgleichung aufgestellt. Ist der Winkel zwischen den beiden Stäben gleich π , so daß sie also die Verlängerung voneinander bilden, so entsteht die bekannte Integralgleichung für die vollkommen leitende, zylindrische Antenne. Für einen Fall von Null und π verschiedener Winkel tritt in dieser Integralgleichung noch ein außerhalb des Integrals stehendes, zusätzliches Glied auf, und auch der Kern der Integralgleichung, die im übrigen vom Fredholmschen Typus ist, ändert ein wenig seine Gestalt. — Die Integralgleichung wird nach der Methode der aufeinanderfolgenden Näherungen aufgelöst, und für die Stromverteilung und die Antennenimpedanz werden allgemeine Formeln aufgestellt. Für die Änderung der Impedanz mit der Länge der Stäbe und dem Winkel zwischen den Stäben werden Kurvendarstellungen gebracht.

Herbert Buchholz.

Meixner, J. und W. Kloepper: Theorie der ebenen Ringspalt-Antenne. Z. angew. Physik 3, 171—178 (1951).

Es wird ein Antennengebilde betrachtet, das aus einem vollkommen leitenden, ebenen Schirm besteht und bei dem die Abstrahlung durch einen kreisringförmigen Spalt in der Oberfläche dieses Schirms erfolgt. Die elektromagnetische Energie wird diesem Spalt etwa durch einen von zwei Kegeln von nahezu gleichem Öffnungswinkel begrenzten, schmalen Hohlraum von einer besonderen Hochfrequenzquelle zugeführt. Solche Spaltantennen sind theoretisch schon häufiger untersucht worden, jedoch ist mit wenigen Ausnahmen dabei immer aus Gründen einer möglichst einfachen rechnerischen Behandlung die Spaltbreite als verschwindend klein angenommen worden. Dabei gelangt man aber für den Blindleitwert in der Regel zu sehr ungenauen Ergebnissen. — Die vorliegende Arbeit berücksichtigt die endliche Breite des Spalts, die natürlich nach wie vor als klein gegenüber dem mittleren Radius des kreisringförmigen Spaltes angesehen wird. Die Lösung der Aufgabe wird dann unter der Voraussetzung vorgenommen, daß im Ringspalt die in der Schirmebene liegenden Komponenten der erregenden elektrischen Feldstärke als gegeben angesehen werden. In der Schirmfläche selbst verschwinden diese Komponenten von \mathcal{E} . Im übrigen darf das errechnete elektromagnetische Feld allenfalls an den Kanten des Ringspalts unendlich werden, in großer Entfernung vom Schirm hat es der Ausstrahlungsbedingung zu genügen. Es werden unter diesen Annahmen die Strahlungsdiagramme der magnetischen Feldstärke H_φ berechnet sowie der Wirk- und Blindleitwert der Antenne. Zum Schluß werden noch einige Angaben über Ringspaltantennen gemacht, die in einer leitenden Scheibe von endlicher Ausdehnung liegen.

Herbert Buchholz.

Levine, Harold and Charles H. Papas: Theory of the circular diffraction antenna. J. appl. Phys. 22, 29—43 (1951).

Die kreisförmige Beugungsantenne, deren Theorie die vorliegende Arbeit behandelt, besteht aus einem koaxialen Kabel, dessen Querschnitt in der Ebene $z = 0$ in den freien Raum einmündet. An den Außenleiter ist ein unendlich ausgedehnter, vollkommen leitender, ebener Schirm angesetzt zu denken. Die Anregung der Antenne erfolgt in dem in der Arbeit untersuchten Fall durch die Hauptwelle des koaxialen Kabels, die bei einem vollkommen leitenden Kabel eine TEM-Welle mit den Komponenten H_φ und E_z ist. Wegen der Symmetrie der Anregung weist auch das äußere Strahlungsfeld nur die Komponente H_φ des magnetischen Feldes auf. Sie wird demgemäß als die grundlegende skalare Funktion benutzt, aus der sich alle übrigen Feldkomponenten durch Differentiation ergeben. Für die Verteilung von H_φ über den Teil der Ebene $z = 0$, der von dem Öffnungsquerschnitt des koaxialen Kabels gebildet wird, wird ein Paar von Integralgleichungen aufgestellt. Diese zweifache Möglichkeit ergibt sich dadurch, daß einmal H_φ in der Ebene des Schirms durch ein Integral beschrieben werden kann, das die z -Ableitung von H_φ im Bereich der Öffnung des koaxialen Kabels enthält. Zum anderen kann H_φ durch ein Integral ausgedrückt werden, das die Werte von H_φ in der Öffnung des Schirms unter dem Integralzeichen enthält. Die Gleichungen selbst kommen durch die Berücksichtigung der Grenzbedingungen zustande. — Mittels der Variationsrechnung gelingt es schließlich, die auf den Endquerschnitt bezogene Admittanz in befriedigender Übereinstimmung mit dem Experiment numerisch zu berechnen.

Herbert Buchholz.

Storer, James E.: The impedance of an antenna over a large circular screen. *J. appl. Phys.* 22, 1058—1066 (1951).

Die Impedanz einer (Modell-)Antenne wird nicht unwesentlich beeinflusst von der Größe des kreisförmigen, leitenden Schirms, in dessen Zentrum sie angeordnet ist, so daß oftmals erhebliche Fehler durch die Annahme entstehen, daß ein derartiger endlicher Schirm sich wie ein unendlich ausgedehnter Schirm verhält. — Um die Größe der Änderung der Antennenimpedanz in den genannten beiden Fällen zu ermitteln, wird die Aufgabe theoretisch behandelt. Es wird dabei angenommen, daß die Antenne senkrecht über dem Mittelpunkt des kreisförmigen Schirms steht, der im übrigen als vollkommen leitend angesehen wird. Es läßt sich dann eine Integralgleichung für das elektrische Feld in der Ebene des Schirms, aber außerhalb der Fläche des Schirms aufstellen. Diese Gleichung wird nach den Methoden der Variationsrechnung angenähert aufgelöst und auf diese Weise für die Antennenimpedanz eine Formel gefunden, in der sie als Funktion des Schirmdurchmessers erscheint.

Herbert Buchholz.

Tai, C. T.: The effect of a grounded slab on the radiation from a line source. *J. appl. Phys.* 22, 405—414 (1951).

Es wird das elektromagnetische Feld einer einfarbig schwingenden Linienquelle berechnet, die parallel zu einer vollkommen leitenden Ebene mit einer darüberliegenden dielektrischen Schicht in Gestalt einer planparallelen Platte von der Höhe h verläuft. Hat die Linienquelle die Richtung der y -Achse und fällt die leitende Ebene mit der y, z -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems zusammen, so hat das elektromagnetische Feld die drei Komponenten E_y, H_y und H_z . Die Lösung der Aufgabe wird für die Komponente E_y angegeben und auf zwei verschiedenen Wegen gewonnen. Der erste Lösungsweg entspricht der üblichen Methode, die für die Herstellung der Lösung ihren Ausgang nimmt von einer geeigneten Integraldarstellung für die durch E_y ausgedrückte Erregung des Feldes durch die Linienquelle. Bei der zweiten Lösungsmethode werden zwei Funktionen gleichzeitig benutzt, von denen die eine für den von der planparallelen Schicht besetzten Raumteil, die andere für den darüberliegenden unendlichen Halbraum gültig ist. Die erste wird so bestimmt, daß sie in der Ebene $x = 0$ selbst und mit ihrer Normalableitung in der Ebene $x = a$ verschwindet, während die andere in der Ebene $x = a$ mit ihrer Normalableitung verschwindet und für $x \rightarrow \infty$ der Ausstrahlungsbedingung genügt. Beide Methoden führen natürlich im wesentlichen zu derselben Lösung. — Die Diskussion der Lösung erstreckt sich u. a. auch auf die Frage, welche Bedingungen bestehen müssen, damit einzelne Eigenwellen auftreten. Sie machen sich als Oberflächenwellen in der Nähe der Trennebene bemerkbar, die mit zunehmender Entfernung von dieser Ebene eine rasch anwachsende Dämpfung erfahren. Das Strahlungsfeld der Leitung in großer seitlicher Entfernung kann aus dem Zusammenwirken eines direkten und eines reflektierten Strahls im Sinne der geometrischen Optik entstanden gedacht werden.

Herbert Buchholz.

Horton, C. W. and F. C. Karal jr.: On the diffraction of a plane electromagnetic wave by a paraboloid of revolution. *J. appl. Phys.* 22, 575—581 (1951).

Es wird die Bewegung einer ebenen elektromagnetischen Welle an der gewölbten Oberfläche eines Rotationsparaboloids untersucht. Es werden die Ausdrücke für die Komponenten der einfallenden Welle, der zurückgeworfenen und der eindringenden Welle aufgestellt und auf eine solche Form gebracht, daß die Grenzbedingungen an der äußeren Oberfläche des Drehparaboloids befriedigt werden können. Die Lösungen werden in Form doppelt unendlicher Reihen angegeben. Das Bildungsgesetz der Koeffizienten dieser Reihen ist sehr verwickelt. Wie sich die Rechnungen gestalten würden, wenn innerhalb und außerhalb des Drehparaboloids verschiedene Wellenzahlen vorliegen, wird im einzelnen nicht ausgeführt. — Die weiteren mit numerischen Angaben vermischten Rechnungen werden auf den Fall beschränkt, daß das Drehparabol vollkommen leitet und auf seine Oberfläche eine Welle auftrifft, deren Wellenfront zur Achse des Drehparabols senkrecht steht. Die Rechnungen werden dann wesentlich einfacher, weil die komplizierende Abhängigkeit von q dabei herausfällt. Für drei verschiedene Drehparabole wird bei dieser Annahme die Amplitude der zurückgeworfenen Welle als Funktion der Entfernung längs der Achse des Drehparabols aufgezeichnet.

Herbert Buchholz.

Price, A. T.: Electromagnetic induction in a semi-infinite conductor with a plane boundary. *Quart J. Mech. appl. Math.* 3, 385—410 (1950).

Unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen werden allgemeine Gesetzmäßigkeiten für die Induktion elektrischer Ströme und ihr zeitliches Abklingen aufgestellt, wenn der leitende Körper als ein unendlicher Halbraum mit einer ebenen Begrenzung aufgefaßt werden kann. Das Problem wird quasistationär angepackt, d. h. es wird sowohl im Dielektrikum $z > 0$ als auch in dem leitenden Halbraum $z < 0$ von dem Einfluß der Verschiebungsströme gänzlich abgesehen und nur die Rückwirkung der Leitungsströme berücksichtigt. Das erregende Magnetfeld liegt allein im Bereich $z > h > 0$. — Für die Lösung der Feldgleichungen wird z. B. bei der elektrischen Feldstärke von dem Ansatz $f(x, y, z; t) = Z(z, t) \cdot F(x, y)$ ausgegangen und danach zwischen zwei Arten von Lösungen unterschieden. — Die Lösungen der ersten Art sind für $z \geq 0$ charakterisiert durch die Annahme $F(x, y) = \text{rot} [\mathfrak{f} \cdot P(x, y)]$, worin \mathfrak{f} den Einheitsvektor in Richtung der z -Achse bedeutet. Die induzierten Ströme fließen also bei diesem Lösungstypus überall parallel zur Leiteroberfläche. Gehen die induzierenden Wirkungen von einem äußeren magnetischen Feld aus, so brauchen nur Lösungen dieses Typus berücksichtigt zu werden. — Bei dem zweiten Lösungstypus ist z. B. für $z < 0$ das elektrische Feld allgemein von der Form

$$(E_x, E_y, E_z) = C_0 \cdot e^{-(\gamma t + \alpha z)} \cdot \left(\frac{\alpha}{\lambda} \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\partial P}{\partial y}, P \right)$$

und es ist für diese Lösung charakteristisch, daß das zur zeitlich veränderlichen Strömung gehörende magnetische Feld überall außerhalb des Leiters verschwindet. — Es werden dann noch die besonderen Lösungsformen bei periodisch veränderlichen Feldern besprochen, z. B. im Fall eines wechselstromdurchflossenen Einzeleleiters parallel zur Leiteroberfläche. Zum Schluß kommen die aperiodisch induzierenden Felder zur Sprache und ihre Lösung nach den Methoden der Operatorenrechnung.

Herbert Buchholz.

Gordon, A. N.: The field induced by an oscillating magnetic dipole outside a semi-infinite conductor. *Quart J. Mech. appl. Math.* 4, 106—115 (1951).

Das Thema der Arbeit von A. T. Price (s. vorsteh. Referat) wird hier in anderer Weise behandelt. Dabei stellt sich heraus, daß die beiden Lösungstypen, die in der Arbeit von Price ausführlich erwähnt werden, sozusagen die Entartungsformen der beiden Lösungen darstellen, die man bei Berücksichtigung des Verschiebungsstroms als den elektrischen und magnetischen Fall unterscheidet. Die weitere formale Behandlung der Lösung kann in vollständiger Analogie zu einer Aufgabe der Wärmeleitung erfolgen.

Herbert Buchholz.

Mirimanov, R. G.: Strahlungswiderstand eines Dipols in der Nähe eines gut leitenden Rotationsellipsoids. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 80, 189—192 (1951) [Russisch].

After a resumé of the theory of spheroidal wave functions, the author sets up some of the equations necessary for the solution of the problem of a radiating dipole situated on the axis of symmetry of an ellipsoid of revolution. He then expresses the radiation resistance as an integral in terms of a Hertzian potential.

Frederick V. Atkinson.

Kober, C. L.: Störung und Störfreiung von Rückstrahlung in Wellenfeldern. Österreich. Ingenieur-Arch. 5, 1—11 (1951).

Es wird zunächst eine Theorie der statistischen Eigenschaften des Rückstrahlungsspektrums gegeben, wobei eine neue thermodynamische Betrachtungsweise von Beugungserscheinungen zur Berechnung des Rückstrahls beliebig geformter Reflektionskörper benutzt wird. Als Anwendung ergibt sich eine Störungstheorie von Funkmeßgeräten mittels Störkörpern oder Rauschsendern. Eine Auswertung der Schwingungseigenschaften des Spektrums zeigt die verschiedenen, brauchbaren Möglichkeiten einer Entstörung. Weitere Anwendungen führen zu Berechnungsgrundlagen des elektrischen Fernsehens mittels der Radar-Technik. Es folgt noch eine kritische Betrachtung über den Wert und die Grenzen von sehr großen Antennenengebilden zur Ausblendung von Störern.

Herbert Buchholz.

Taylor, Thomas T. and John R. Whinnery: Applications of potential theory to the design of linear arrays. *J. appl. Phys.* 22, 19—29 (1951).

Der Energiebetrag, den eine Gruppe von N äquidistanten, linearen Antennen in den Punkten

$x_0, x_0 + d, x_0 + 2d, \dots$ auf der x -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems in einer Richtung α gegen die x -Achse abstrahlt, wird im wesentlichen durch den Absolutwert des Raumfaktors $S = e^{i(\lambda_0/d)\varphi} = \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{i n \varphi}$ bestimmt, worin $\varphi = k d \cos \alpha$ und $k = 2\pi/\lambda$ ist und

die A_n komplexe Konstanten bedeuten, die dem Strom in entsprechenden Punkten der einzelnen Elemente der Gruppe proportional sind. — Wird dem Raumfaktor S das Polynom $S = z^{x_0/d}$

$\cdot \sum_{n=0}^{N-1} A_n z^n$ gegenübergestellt, so lassen sich eine Reihe von Sätzen aussprechen, die gewisse

Zusammenhänge zwischen der Lage der Nullstellen des obigen Polynoms und der Größe und Phase des Raumfaktors S aufdecken. Eine der wichtigsten Konsequenzen dieser Untersuchungen ist die Feststellung, daß von gegebenen Daten aus für die Anordnung der Antenne keine eindeutige Angabe gemacht werden kann. Ebenso wenig läßt sich z. B. aus der experimentell ermittelten Größe des Raumfaktors in eindeutiger Weise auf die Größe der Erregungskoeffizienten A_n schließen. Es wird ferner ein elektrisches Gerät beschrieben, das den Logarithmus des Betrages des in Rede stehenden Polynoms in Abhängigkeit von den gewählten Nullstellen angibt.

Herbert Buchholz.

Goubeau, Georg: Über die Zennecksche Bodenwelle. *Z. angew. Phys.* 3, 103—107 (1951).

Es wird zunächst die Beziehung für die reine Bodenwelle angegeben, die sich unter Bezugnahme auf ein Zylinderkoordinatensystem (ρ, φ, z) hinsichtlich ρ als eine nach außen fortwandernde Zylinderwelle verhält. Danach wird die Frage erörtert, welche Erregung für die Bodenwelle gewählt werden muß, damit sie ganz allein entsteht. Sodann wird in der Arbeit näher auf den Zusammenhang zwischen Bodenwelle und Raumwelle eingegangen und unter bestimmten Voraussetzungen eine Orthogonalität zwischen beiden Wellen nachgewiesen. *Herbert Buchholz.*

Ott, H.: Die Bodenwelle eines Senders. *Z. angew. Phys.* 3, 123—134 (1951).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der physikalischen Frage nach den Ursachen der Bodenwelle als Bestandteil des Fernfeldes, das ein vertikaler, elektrischer Dipol, der unmittelbar auf der ebenen Erdoberfläche aufgestellt ist, aussendet. Die mathematische Lösung dieser Aufgabe wird als bekannt angesehen und aus älteren Arbeiten übernommen, auf eine geeignete Form gebracht und nun gehörig auf ihre physikalische Aussage hin diskutiert. Dabei wird nicht nur auf den Hertzschen Vektor selbst eingegangen, sondern auch auf die Ausdrücke für die Feldkomponenten, da die Beschränkung auf den Hertzschen Vektor selbst oft zu Irrtümern führt. Die Diskussion berührt die beiden Fälle eines reellen und eines komplexen Brechungsindex. Der rein reelle Brechungsindex entspricht einem dielektrischen, verlustfreien Boden. Außerdem wird unterschieden nach dem Feld am Boden und dem Feld in Bodennähe. Bemerkenswert ist der Hinweis, daß die Bodenwelle im wesentlichen durch die Schmidtsche Kopfwelle verursacht wird und nicht durch Bodenabsorption.

Herbert Buchholz.

Friedman, Bernard: Propagation in a non-homogeneous atmosphere. *Commun. pure appl. Math.* 4, 317—350 (S 317—S 350) (1951).

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen von einem magnetischen oder elektrischen Dipol aus, der über der kugelförmigen Erde steht, wird hier gegenüber den bekannten Arbeiten von Watson, van der Pol-Bremmer und anderen in verallgemeinerter Form vorgetragen. Diese Verallgemeinerung bezieht sich vornehmlich auf die Annahme, daß die Wellenzahl k infolge einer in Kugelschichten veränderlichen Struktur des die Erde umgebenden Mediums vom Kugelradius r der zugehörigen Kugelschale abhängt. — Ohne daß sogleich eine besondere Annahme über die analytische Natur der Funktion $k(r)$ gemacht wird, zeigt Verf., nachdem wie bei Watson das Hertzsche Potential als ein Konturintegral ausgedrückt und in eine Residuensumme verwandelt worden ist, daß das Problem der Wellenausbreitung auf die Lösung einer Eigenwertaufgabe für eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückgeführt werden kann. Die besondere Form dieser Differentialgleichung wird natürlich wesentlich von der Natur der Funktion $k(r)$ bestimmt. Für ein $k(r) = \text{const.}$ ist die Differentialgleichung bekanntlich sehr nahe mit der Besselschen Differentialgleichung verwandt. Diese Feststellung legt besonders im allgemeinen Falle für die weitere Behandlung der Aufgabe, die in der angenäherten Bestimmung der Eigenfunktionen und Eigenwerte besteht, die Verwendung der WKB-Methode im Verein

mit dem bekannten Langerschen Verfahren nahe. Am Schluß der Arbeit wird noch als Beispiel der Fall der nichtgleichförmigen Atmosphäre für ein $r \cdot k(r)$ mit und ohne stationären Punkt betrachtet.

Herbert Buchholz.

● **Jacob, L.:** *An introduction to electron optics.* (Methuen's Monographs on Physical Subjects.) London: Methuen and Co., Ltd., New York: John Wiley and Sons, Inc., 1951, X, 150 p. 8 s. 6d. net.

Das Büchlein gibt auf 150 Seiten eine anregende Einführung in die Elektronenoptik. Wenn auch in dem engen Rahmen eine ausführlichere Darstellung nicht möglich ist, so werden doch die wesentlichsten Probleme gestreift und für ein tieferes Eindringen im Anschluß an die mehr referierenden Teile stets die entsprechende Spezialliteratur angeführt. Die Darstellung bringt das Notwendigste über das Fermatsche Prinzip und den Brechungsexponenten der Elektronenoptik, über rotationssymmetrische elektrische Felder und deren Ausmessung sowie über die numerischen, graphischen und mechanischen Methoden der Bahnbestimmung. Sie behandelt ferner die Grundtatsachen über elektrische und magnetische Linsen und ihrer Bildfehler. Ferner werden Strahlablenkung, Entstehung der engsten Strahleinschnürung und Raumladungseinfluß erwähnt. Das flott geschriebene, mit klaren Abbildungen ausgestattete Büchlein eignet sich gut zu einer ersten Einführung, da es durch seine Darstellungsart instande ist, beim Leser das tiefere Interesse am Gegenstand und damit an einer ausführlicheren Darstellung zu wecken.

Walter Glaser.

● **Sturrock, P. A.:** *Perturbation characteristic functions and their application to electron optics.* Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **210**, 269—289 (1951).

Es werden bekannte, auf der Anwendung der Hamiltonschen Hauptgleichung beruhende Methoden der Störungsrechnung und ihrer Beziehung zur Elektronenoptik dargestellt. Insbesondere setzt sich Verf. zum Ziel, die vom Ref. gelegentlich der Behandlung der Ablenkung von Elektronenbündeln in elektrisch-magnetischen Ablenkfeldern angegebene Störungsmethode (dies. Zbl. **32**, 371) auch auf Störungen höherer Ordnung zu verallgemeinern, da nach seiner Ansicht die vom Ref. entwickelte Methode nur auf Störungen erster Ordnung anwendbar sei und der vom Ref. gemachte Vorschlag, wie man sie auf die Störungen höherer Ordnung auszuweiten hat, ungültig sei. Die Lagrangesche Funktion und die Koordinaten werden nach dem Störungsparameter entwickelt und mit Hilfe der Hamiltonschen Fundamentalgleichung in bekannter Weise die Störungen allgemein berechnet. (Anm. d. Ref. Da die Störung der nächst höheren Ordnung als eine solche erster Ordnung des gestörten Systems der nächst niederen Ordnung angesehen werden kann, ist der Vorschlag des Ref. korrekt und identisch mit dem üblichen Vorgehen. Die vom Verf. vertretene Ansicht beruht daher auf einem Irrtum.) *Walter Glaser.*

● **Couteur, K. J. Le:** *The regenerative deflector for synchro-cyclotrons.* Proc. phys. Soc., Sect. B **64**, 1073—1084 (1951).

J. L. Tuck und L. C. Teng haben vorgeschlagen, den Strahl aus einem Synchro-Cyclotron dadurch auszuschleusen, daß durch eine Modifikation des normalen Magnetfeldes die radialen Oszillationen zu starken Amplituden erregt werden und die Protonen auf diese Weise den Magneten verlassen. Ausgehend von den Kerst-Serbergschen Bewegungsgleichungen untersucht Verf. die hier vorliegenden Verhältnisse analytisch und entwickelt Formeln, mittels denen die induzierten Oszillationen aus den Störungen des Magnetfeldes bestimmt werden können. Die numerischen Auswertungen werden in Diagrammen wiedergegeben. Es zeigt sich Übereinstimmung für den Spezialfall, der von Tuck und Teng behandelt worden ist. *Walter Glaser.*

Relativitätstheorie:

● **Weyl, H.:** *Space, time, matter.* 4th ed., rep. New York: Dover Publications 1951. XVI, 330 p. \$ 3,95.

● **Lampariello, G.:** *Intorno alle idee generali della fisica Einsteiniana. II. Matematiche* **6**, 3—41 (1951).

(Teil I s. dies. Zbl. **38**, 404.) Eine ziemlich elementare Einführung in die spezielle und eine mehr skizzenhafte in die allgemeine Relativitätstheorie mit dem Stand

von 1920, ausgenommen die von Sommerfeld (Vorlesungen, III: Elektrodynamik, Wiesbaden 1948; dies. Zbl. 35, 134) wiedergegebene Ableitung der Schwarzschild'schen Metrik durch W. Lenz (1944).
Otto Heckmann.

Papapetrou, A.: Spinning test-particles in general relativity. I. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 209, 248—258 (1951).

Unter einem spinnenden Probekörper (einem Pol-Dipol-Teilchen) versteht Verf. einen u. a. rotierenden Körper (dessen Momente der Tensordichte $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ also nicht verschwinden), dessen Masse (und Ausdehnung) so klein ist, daß das vorgegebene Gravitationsfeld nicht gestört wird. Der Begriff eines solchen Probekörpers wird mathematisch exakt definiert und dann wird, im Anschluß an eine Arbeit von Fock (dies. Zbl. 23, 83) unter Verwendung der dynamischen Gleichung (Bewegungsgleichung) $\mathfrak{T}^{\mu\nu}_{; \nu} = 0$ zunächst die Bewegungsgleichung für ein nicht rotierendes Polteilchen abgeleitet. Es zeigt sich — wie zu erwarten —, daß die Bahnkurven der Polteilchen die geodätischen Linien sind. Es folgen einige Bemerkungen über das Verhalten des Teilchens in seinem Inneren. Nun wird die am Polteilchen exemplifizierte Methode der Ableitung der Bewegungsgleichung für das Pol-Dipolteilchen verwendet. Man erhält so die Bewegungsgleichung — im Fall des spinnenden Teilchens nicht identisch mit den Differentialgleichungen der geodätischen Linien — und außerdem eine Gleichung für die „Spinbewegung“. Diese sagt über die Momente der Tensordichte etwas aus. Es zeigt sich, daß die Zahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen für die Zahl der gesuchten Unbekannten nicht ausreicht und daß man willkürlich eine gewisse Größe Null setzen kann. Es wird dann die Gewinnung eines Vorintegrals — des Satzes von der Erhaltung des Impulses und des Drehimpulses — möglich. Physikalisch bedeutet diese Freiheit, daß das klassische Pol-Dipolteilchen eine willkürlich wählbare innere Bewegung hat, die man — wie frühere Arbeiten des Verf. und von H. Hönl gezeigt haben — quantentheoretisch als die Zitterbewegung bez. deren Drehimpuls als Spin deuten kann. Schließlich wird noch bewiesen, daß sich die gewonnenen Gleichungen in invarianter Form anschreiben lassen.
F. Cap.

Corinaldesi, E. and A. Papapetrou: Spinning test-particles in general relativity. II. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 209, 259—268 (1951).

Die Verf. wenden in dieser Arbeit die in der vorst. ref. Arbeit gewonnenen Bewegungsgleichungen für ein spinnendes Probekörperchen (l. c.) an auf das Schwarzschild'sche Problem. Eine innere Spinbewegung wird vernachlässigt — der Spin rührt allein von makroskopischer Rotation her. Die sich hieraus ergebenden Vereinfachungen für den Spintensor S^{ik} werden im Ruhssystem des Zentralkörpers angeschrieben. Im Laufe der Rechnung taucht eine skalare Größe auf, die zusammen mit der gewöhnlichen Masse als „effektive Masse“ interpretiert werden kann und die physikalisch eine Art Spin-Bahnkopplung darstellt. Es wird gezeigt, daß im allgemeinen spinnende Probekörper nicht ebene Bewegungen vollführen, daß aber ebene Bewegungen (Bahnen der Planeten z. B.) möglich sind — insbesondere dann in guter Näherung, wenn der Planetendrall viel kleiner ist als das Drehmoment der Bahnbewegung, was bei Planeten immer erfüllt ist.. Der Einfluß des Eigendralls erweist sich in seiner Auswirkung auf die Bahn als weitaus kleiner als derjenige Term der allgemeinen Relativitätstheorie, der für die Periheldrehung der Planetenbahnen maßgeblich ist. Die Spin-Bahnkopplung führt zu einer Präzession des Spins um den Bahndrall — für die Erde ergibt sich eine Periode von $5 \cdot 10^7$ Jahren. Auf lange Zeiträume gesehen ist zu erwarten, daß der Eigendrall sich parallel zum Bahndrall einstellen wird — ein für den Astronomen interessantes Ergebnis. (Bei vielen Planeten — jedoch nicht bei allen — Uranus! — erfüllt.) Für hyperbolische Bewegungen — wie etwa von Photonen beschrieben — ergibt sich ein vernachlässigbarer Einfluß des Spins auf die Ablenkung des Lichtes im Schwarzschildfeld — für ein Photon exakt Null, da dessen Spin parallel ist zur Fortpflanzungsrichtung.
F. Cap.

Goto, K.: Wave equations in the Sitter space. Progress theor. Phys. 6, 1013—1014 (1951).

Taub, A. H.: Empty space-times admitting a three parameter group of motions. Ann. of Math., II. S. 53, 472—490 (1951).

In der allgemeinen Relativitätstheorie erscheint der Ricci-Tensor an den Impuls-Energie-Tensor gebunden und verschwindet, wenn keine Materie vorhanden ist. Der Krümmungsaffinor braucht aber dann noch nicht zu verschwinden. In dieser Arbeit werden solche V_4 betrachtet, die eine dreiparametrische Bewegungsgruppe gestatten, deren infinitesimale Transformationen alle raumartig sind und die ein System von invarianten V_3 zulassen. Solche V_4 werden „räumlich homogen“ genannt. Es wird bewiesen, daß solche V_4 , wenn sie die dreiparametrische Gruppe der euklidischen Translationen gestatten und außerdem einen Krümmungsaffinor haben, der nicht

singulär ist längs der Zeitachse, die Eigenschaft besitzen, daß der Krümmungsaffinor verschwindet, sobald der Ricci-Tensor Null wird. Das Auftreten von Singularitäten in dem Felde des Fundamentaltensors wird eingehend berücksichtigt und es wird eine Anzahl von Spezialfällen durchgerechnet. In einem Anhang werden die zu den verschiedenen dreiparametrischen Gruppen reziproken Gruppen aufgezählt.

Jan Arnoldus Schouten.

Udeschini, Paolo: Le equazioni di seconda approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 121—123 (1951).

In einer ersten Note hatte Verf. gezeigt, daß die von ihm in erster Näherung erhaltenen Lösungen, die mit den Lösungen von Einstein und Strauß übereinstimmen, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld getrennt lassen. Es wird hier gezeigt, daß dies in zweiter Näherung nicht mehr der Fall ist, und es wird insbesondere der Einfluß eines elektromagnetischen Feldes auf die Lichtgeschwindigkeit untersucht.

Jan Arnoldus Schouten.

Udeschini, Paolo: Sulle mutue azioni fra campo gravitazionale e campo elettromagnetico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 390—394 (1951).

In dieser dritten Arbeit (vgl. dies. Zbl. 40, 129; vorsteh. Ref.) wird die gegenseitige Beeinflussung des elektromagnetischen Feldes und des Gravitationsfeldes in erster und zweiter Näherung eingehender untersucht, und es wird auch die Lösung von Schrödinger berücksichtigt. Insbesondere ergibt sich, daß ein elektromagnetisches Feld erster Ordnung ein Gravitationsfeld zweiter Ordnung beeinflussen kann, während eine Beeinflussung eines elektromagnetischen Feldes zweiter Ordnung durch ein Gravitationsfeld erster Ordnung unmöglich ist.

Jan Arnoldus Schouten.

Hittmar, O. and E. Schrödinger: Studies in the generalized theory of gravitation. II. The velocity of light. Commun. Dublin Inst. advanced Studies, Ser. A, Nr. 8, 15 S. (1951).

In der verallgemeinerten Theorie der Gravitation (s. dies. Zbl. 43, 418) erfolgt die Lichtausbreitung nicht gemäß $ds^2 = 0$, da das elektromagnetische Feld g_{ik} durch die Feldgleichungen mit dem Schwere-Feld g_{ik} verknüpft ist. Zerlegt man das g_{ik} -Feld in ein schwaches schnell oszillierendes (Licht-) Feld und ein langsam veränderliches Restfeld, so wird auch in einem lokal-galileischen System ($g_{ii} = -1$, $g_{44} = +1$) die Lichtausbreitung anisotrop, sofern das Restfeld nicht verschwindet. Das Eikonal ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt sich, abhängig von der Stärke des Restfeldes, in Richtung des Poynting-Vektors verschiebt. Für extrem hohe Stärken des Restfeldes gibt es Richtungen, in denen keine Wellenfront fortschreiten kann. — Verf. macht Gebrauch von der Tatsache, daß im betrachteten System die Dichte g^{ik} mit dem $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ -, g_{ik} mit dem $(\mathfrak{H}, \mathfrak{D})$ -Tensor der Bornschen Elektrodynamik identifiziert werden kann.

Wolfram Urich.

Bandyopadhyay, G.: Particular solutions of Einstein's recent unified theories. Indian J. Phys. 25, 257—261 (1951).

Die Feldgleichungen, die von Einstein und Strauß 1946 angegeben wurden, sowie die von Einstein 1950 angegebenen, werden für einen speziellen Fall gelöst, und es werden einige Schlüsse gezogen, die sich auf die Existenz massenloser Ladungen beziehen.

Jan Arnoldus Schouten.

Gamba, Augusto: Una strana conseguenza delle equazioni della nuova teoria unitaria di Einstein. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 472—474 (1951).

Durch Identifikation des elektromagnetischen Tensors mit dem konjugierten antisymmetrischen Anteil $*g_{ik}$ des metrischen (komplexen und nichtsymmetrischen)

Fundamentaltensors g_{ik} und den Ansatz

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} -e^{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & \varepsilon \sin \theta & 0 \\ 0 & -\varepsilon \sin \theta & -r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\nu} \end{pmatrix},$$

wo λ und ν Funktionen von r allein sind und ε eine Konstante ist, folgert Verf. aus der 2. Hälfte der Feldgleichungen der neuen Einsteinschen Theorie, daß die einzige zunächst nicht verschwindende Komponente des elektromagnetischen Tensors in 1. Näherung sich auf ε/r^2 reduziert, daß also ε mit der elektrischen Ladung identifiziert werden muß. Sodann aber verlangt die 1. Hälfte der Feldgleichungen das nicht identische Verschwinden der Komponenten R_{11} ; R_{22} ; R_{44} ; R_{23} . Dies ist nur erfüllbar mit $\varepsilon = 0$. — Es scheint daher, als bezöge sich die analoge Betrachtung von G. Bandyopadhyay (vorsteh. Ref.) auf einen mit magnetischer Ladung behafteten Massenpunkt.

Otto Heckmann.

Bonnor, W. B.: Static spherically symmetric solutions in Einstein's unified field theory. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 209, 353—368 (1951).

Einstein (The Meaning of Relativity, fifth edition, London 1951) verschärfte die Feldgleichungen der Einstein-Strausschen einheitlichen Feldtheorie und Verf. untersucht die statischen, kugelsymmetrischen Lösungen dieser Gleichungen. Im rein magnetischen Fall erhält er einen masselosen Magnetpol. Im rein elektrischen Fall erhält man, wenn man das Verschwinden des elektrischen Feldes im Unendlichen fordert, Lösungen, die das klassische Feld einer Punktladung für genügend großes r annähern und die mit dem Gravitationsfeld eines Massepunktes verknüpft sein können. Von besonderem Interesse sind jedoch die Lösungen des elektrischen Falles, die das klassische Punktladungsfeld am besten approximieren: sie sind stets mit dem Gravitationsfeld eines Massepunktes verknüpft und haben für genügend großes r keine Singularitäten. Die Schranke, außerhalb der keine Singularität liegt, ist dabei durch die mit dem elektrischen Feld verknüpfte Masse bestimmt. Die Ladungsdichte hat im ganzen Raum gleiches Vorzeichen.

Rudolf Kippenhahn.

Vaidya, P. C.: Nonstatic solutions of Einstein's field equations for spheres of fluids radiating energy. Phys. Review, II. Ser. 83, 10—17 (1951).

Der Energietensor für ein Gemisch von Materie und ausströmender Strahlung wird abgeleitet. Einige explizite Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen für nichtstatische, strahlende, kugelsymmetrische Verteilungen werden erhalten. Diese stellen dar: Materie und ausströmende Strahlung für $r \leq a(t)$, eine stets expandierende Zone reiner Strahlung für $a(t) < r \leq b(t)$, leeren Raum für $b(t) < r < \infty$. Sie sind stetig an den Übergangsstellen. Da $\dot{b}(t)$ nahezu gleich 1 ist und $\dot{a}(t) < 0$, stellen die Lösungen sich kontrahierende Verteilungen dar. Doch ist die Kontraktion kein Schwerkereffekt, weil m/r konstant ist auf der Grenze $r = a$ (m = Masse innerhalb a); sie ist vielmehr ein rein relativistischer Effekt, weil die entsprechende Newtonsche Verteilung statisch ist. Verf. hofft, daß die entwickelten Vorstellungen einen Beitrag liefern zum Verständnis der Anfangs- und Endstadien der Sternentwicklung. Er stellt Untersuchungen über eine neue Klasse von Lösungen für nicht-isolierte kugelsymmetrische Verteilungen in Aussicht, die Energie aus dem Kosmos absorbieren.

Otto Heckmann.

Zatzkis, Henry: Conservation laws in the general theory of relativity with electromagnetic field. Phys. Review. II. Ser. 81, 1023—1026 (1951).

Fink, K.: Metrisches Feld und skalares Materiefeld. Commentarii math. Helvet. 25, 26—42 (1951).

Im Anschluß an Arbeiten von W. Scherrer (s. dies. Zbl. 34, 275) betrachtet Verf. Feldgleichungen, die sich aus folgendem Variationsprinzip ergeben

$$\delta \int \left\{ R + 2 \omega g^{\sigma\sigma} \frac{\partial S}{\partial x_\sigma} \frac{\partial S}{\partial x_\sigma} \right\} \sqrt{-g} dx = 0,$$

wobei S eine skalare die Materie beschreibende Funktion sein soll. Das statisch zentralsymmetrische Feld wird diskutiert, wobei sich zeigt, daß singuläre Lösungen mit endlicher Gesamtenergie möglich sind.

Günther Ludwig.

Jonsson, C. V.: Studies on five-dimensional relativity theory. Ark. Fys. 3, Nr. 8, 87—129 (1951).

Die Arbeit studiert die fünfdimensionale Relativitätstheorie in der von O. Klein begründeten Formulierungsweise. Dabei wird der Formalismus in derjenigen Allgemeinheit entwickelt, welche physikalisch bedeutet, daß an Stelle der Gravitationskonstanten eine Variable (skalare Feldgröße) zugelassen wird. Eine Reihe allgemeiner Formeln für diese erweiterte Theorie wird entwickelt, in Übereinstimmung mit der schon vorhandenen (dem Verf. größtenteils unbekannten) Literatur über diesen Gegenstand. Im zweiten Teil der Arbeit werden die durch Linearisierung der Feldgleichungen entstehenden approximativen Gleichungen besprochen und auch quantentheoretisch untersucht. Dabei wird auch der Anschluß hergestellt an das Ergebnis von Fierz, wonach das „Graviton“ den Spin 2 besitzt. Pascual Jordan.

Neugebauer, Th.: Über einen Zusammenhang zwischen Gravitation und Magnetismus. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 1, 151—165 (1951).

Bei stark kondensierter Materie erzeugt die Gravitationskraft eine Verschiebung zwischen positivem Kern und Elektronenhülle des Atoms. Diese elektrische Polarisierung führt wegen der Rotation der Himmelskörper zu einem magnetischen Moment, das für die Erde um viele Zehnerpotenzen zu klein ist. — Bei kleinen schnell rotierenden Körpern könnte die Zentrifugalkraft einen ähnlichen Effekt erzeugen.

G. Thiessen.

Quantentheorie:

Hove, Léon van: Sur le problème des relations entre les transformations unitaires de la mécanique quantique et les transformations canoniques de la mécanique classique. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 610—620 (1951).

Die Observablen der Quantenmechanik lassen sich eineindeutig den infinitesimalen Transformationen der unitären Gruppe \mathfrak{U} zuordnen, unter der die kanonischen Vertauschungsrelationen der (irreduziblen) Operatoren P_i, Q_k invariant bleiben. Das klassische Analogon zu \mathfrak{U} ist eine Gruppe Γ , deren Faktorgruppe Γ/C (C das Zentrum von Γ) mit der Gruppe der kanonischen Transformationen isomorph ist. Verf. diskutiert ein Paar isomorpher Untergruppen von \mathfrak{U} und Γ , macht es aber wahrscheinlich, daß \mathfrak{U} und Γ selbst nicht isomorph sind. Aus dieser Vermutung erwachsen Mehrdeutigkeiten für die Quantelung klassischer Systeme, wie sie nach Meinung des Verf. ähnlich auch in der Feldtheorie auftreten dürften.

Wolfram Urich.

Landsberg, P. T.: On matrices whose eigenvalues are in arithmetic progression. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 585—590 (1951).

Die Eigenwerte des Energieoperators eines harmonischen Oszillators ebenso wie die Eigenwerte der Drehimpulskomponenten ergeben eine arithmetische Reihe. Diese beiden Fälle lassen sich zusammenfassen unter einem allgemeineren Gesichtspunkt: Es wird gezeigt, daß eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß W eine arithmetische Reihe von Eigenwerten besitzt, darin besteht, daß es eine Matrix A gibt, für die

$$[W, [W, A]] = c A,$$

wobei c eine von 0 verschiedene reelle oder komplexe Zahl darstellt, und daß die Matrix

$$E = A^2 - c^{-1} [W, A]^2 + (-c)^{\frac{1}{2}} [A, [W, A]]$$

den Eigenwert 0 besitzt.

Günther Ludwig.

Cade, R.: Curvilinear moments in quantum mechanics. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 451—453 (1951).

Verf. zeigt, daß bei Einführung krummliniger Koordinaten $q_v(x_1 \dots x_n)$ in der Quantenmechanik die zugehörigen Impulse p_v in der x -Darstellung (durch geeignete Wahl des Phasenfaktors) in der Form (1) $p_v = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \left\{ x_{s/v} \frac{\partial}{\partial x_s} + \frac{\partial}{\partial x_s} x_{s/v} \right\}$ geschrieben werden können. Diese p_v erfüllen mit den q_v dieselben Vertauschungsrelationen wie die $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_v}$ mit den x_v . Die Eigenwerte der p_v sind durch die q_v und Gleichung (1) bestimmt.

Hermann Kümmel.

Matsubara, T.: The quantum mechanics of assemblies of interacting particles. Progress theor. Phys. 6, 899—901 (1951).

Gross, E. P.: Note on the interaction of an electron and a lattice oscillator. Phys. Review, II. Ser. 84, 818—823 (1951).

Verf. diskutiert die exakte Lösung des genannten Problems bei einer beliebig starken Wechselwirkung, die linear in Koordinate und Impuls des Oszillators ist.

Gerhard Höhler.

Novobatzky, K. F.: Das klassische Modell der Quantentheorie. Ann. der Physik, VI. F. 9, 406—412 (1951).

The paper shows how, by generalising the Hamilton-Jacobi equation of classical mechanics, one can obtain the Schrödinger equation and the Klein-Gordon equation of wave mechanics. This generalisation has not been brought about directly, but by considering the Lagrangian which, when made the integrand in a variational principle, will lead to the Hamilton-Jacobi equation. The author makes the need for a new non-classical term in the Lagrangian plausible, but he does not determine it uniquely. For this reason he does not appear to make any really new contribution to the subject. In fact the mathematical relationships and considerations he puts forward are well known (See, for instance, L. de Broglie, An introduction to the study of wave mechanics, London 1930). There are no references to previous work.

Peter T. Landsberg.

Bassali, W. A.: Some remarks concerning energy levels in the old and new quantum mechanics. Proc. math. phys. Soc. Egypt. 4, Nr. 3, 1—6 (1951).

Katayama, Yasuhisa: On the positron theory of vacuum. Progress theor. Phys. 6, 309—321 (1951).

Nishijima, K.: Generalized Furry's theorem for closed loops. II. Progress theor. Phys. 6, 1027—1028 (1951).

Demeur, M.: Solutions singulières des équations de Klein-Gordon et de Dirac, tenant compte d'un champ électrique extérieur. Physica 17, 933—937 (1951).

Unter Verwendung der strengen Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung und der Diracgleichung für den Fall eines Teilchens in einem homogenen elektrischen Feld werden strenggültige Ausdrücke für die in der Quantenelektrodynamik auftretenden singulären Funktionen Δ , Δ_F , S und S_F abgeleitet.

Fritz Sauter.

Sakuma, Kiyoshi, Naomi Shôno and Tadashi Ouchi: Relativistic two-body problem in quantum theory. Progress theor. Phys. 6, 748—761 (1951).

Verff. geben eine relativistisch invariante Formulierung des Zweikörperproblems mit Hilfe des mehrzeitigen Formalismus von Dirac, Fock und Podolsky. Der Breitsche Wechselwirkungsansatz wird auf diese Weise abgeleitet. Die zuerst von Nambu deduzierte sogenannte Bethe-Salpeter-Gleichung für das relativistische Zweikörperproblem wird nicht deduziert.

Thirring.

Brown, G. E. and D. G. Ravenhall: On the interaction of two electrons. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 208, 552—559 (1951).

Für eine etwas modifizierte Breitsche Gleichung, die eine Berechnung von Energiewerten ohne Zusatzvorschriften ermöglichen soll, wird eine feldtheoretische Ableitung vorgelegt. Die im Operator der quantenelektrodynamischen Wechselwirkungsenergie nach Ausführung der Schwingerschen Berührungstransformation

niedrigster Näherung stehenden Operatoren des Diracfeldes werden dabei (wenn die Interpretation des Ref. zutrifft) als Operatoren der „angezogenen“ Teilchen gedeutet, entsprechend ihr Anteil negativer Frequenz als Erzeugungsoperator dieser Teilchen (auch für gebundene Zustände!). Aus dem 2-Teilchen-Anteil des transformierten Wechselwirkungsoperators wird die der Breitschen Gleichung ähnliche Gleichung gewonnen, wobei die darin auftretende Wellenfunktion allein aus freien Zuständen positiver Energie gebildet ist. Die sich aus der modifizierten Gleichung ergebenden Energiewerte sollen bis auf Abweichungen, die klein sind gegen $\alpha^2 Ry$, mit denjenigen übereinstimmen, die sich aus der ursprünglichen Breitschen Gleichung unter Beachtung geeigneter Zusatzvorschriften ergeben. *Gerhart Lüders.*

Gell-Mann, Murray and Francis Low: Bound states in quantum field theory. Phys. Review, II. Ser. 84, 350—354 (1951).

Aus dem durch die Feldtheorie nahegelegten, jedoch nicht näher begründeten Ansatz $K(x_1, x_2; x'_1, x'_2) = (-1)^P \langle P[\psi_N(x_1) \psi_P(x_2) \bar{\psi}_N(x'_1) \bar{\psi}_P(x'_2)] \rangle$ für den Feynmanschen Zweipartikelkern ($\langle \rangle =$ Vakuum, $P =$ Dysonsche Permutation) wird die Bethe-Salpetersche Integralgleichung für K [Salpeter und Bethe, Phys. Review, II, Ser. 84, 1232—1242 (1951)] hergeleitet und daraus (mit Hilfe eines besonderen Grenzüberganges $t \rightarrow -\infty$) die homogene Bethe-Salpeter-Gleichung für die mehrzeitige Wellenfunktion $\chi_n(x_1, x_2)$ eines gebundenen Zweifermionenzustandes.

Georg Süßmann.

Petiau, Gérard: Sur la théorie du bremsstrahlung électromagnétique. C. r. Acad. Sci., Paris 232, 153—155 (1951).

Takeda, Gyo. Yasutaka Tanikawa, Tosiya Taniuti and Keiiti Saeki: Note on the Bloch-Nordsieck's method. Progress theor. Phys. 6, 994—999 (1951).

Feynman, Richard P.: An operator calculus having applications in quantum electrodynamics. Phys. Review, II. Ser. 84, 108—128 (1951).

Statt die Reihenfolge, in der nichtkommutierende Größen angewendet werden sollen, durch ihre Stellung anzugeben, versieht sie der Verf. mit einem Index und schreibt vor, daß z. B. $A_s B_{s'}$ gleich AB ist, wenn $s > s'$, und gleich BA , wenn $s < s'$. Das Verfahren ist besonders nützlich in Umformung von Ausdrücken der Form $\exp(\alpha \pm \beta)$, wobei α und β nicht kommutieren. Verschiedene quantenmechanische Anwendungen werden gegeben, insbesondere ein Vergleich der verschiedenen gegenwärtigen Formulierungen der Quantenelektrodynamik. Durch Exponentialdarstellungen lassen sich auch reziproke Operatoren ausdrücken nach

der Formel
$$i x = \int_0^\infty \exp(i W x) dW$$
 bei geeigneter Behandlung der oberen

Grenze. Verf. wendet das in seiner Theorie des positiven Elektrons an und versucht, den Parameter W im Sinne einer fünften Koordinate zu deuten. Ein Anhang faßt sich mit einer entsprechenden Parametrisierung nach Fock und verschiedenen Verallgemeinerungen des Kalküls. Am Schlusse des Textes sind einige nicht damit zusammenhängende Ergänzungen zu einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 38, 133) untergebracht, betreffend numerische Faktoren in der Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten.

Walter H. Wessel.

Murai, Yasuhisa: On the path integral and its application. Progress theor. Phys. 6, 762—771 (1951).

Der Focksche Eigenzeitformalismus wird mit Hilfe von Feynmanschen Rechenkniffen erreicht. Die Arbeit geht insofern über die diesbezügliche Literatur hinaus, als auf diese Art auch die Wechselwirkung mit dem quantisierten elektrischen Feld betrachtet wird.

Thirring.

Belinfante, Frederik J.: A phenomenological theory of the Lamb shift and of anomalous magnetic moments. Phys. Review, II. Ser. 84, 949—956 (1951).

Um die unbefriedigenden Züge der heutigen Quantenelektrodynamik (Diver-

genzen, welche durch Renormalisation von Masse und Ladung „weggedeutet“ werden müssen) zu umgehen, schlägt Verf. eine eich- und lorentzinvariante Theorie vor, in welcher alle Selbstrückwirkungen als nichtreal angesehen und demzufolge ignoriert werden. Dies bringt allerdings gleichzeitig die feinen strahlungstheoretischen Korrekturen [wie die Abweichung des g -Faktors des Elektrons von seinem Diracschen Wert 2 und die Verschiebung des $2s$ -Niveaus des Wasserstoffs („Lamb-shift“)], deren experimentelle Verifikation den Triumph der Renormalisationstechnik bildeten, zum Verschwinden. Um diese Effekte dennoch erklären zu können, werden Zusatzglieder in die Wechselwirkung zwischen Elektronen und elektromagnetischem Feld aufgenommen; die zugehörigen Kopplungskonstanten werden dem Experiment angepaßt. Da die Abhängigkeit der Lamb-shift von den Quantenzahlen etwas anders ist als in der üblichen Theorie, könnte eine sehr genaue Messung der Niveaushift für höhere Hauptquantenzahlen als *experimentum crucis* für diese Theorie dienen.

M. R. Schafroth.

Belinfante, F. J.: „Integro-Kausalität“ in der konvergenten Quantentheorie der Felder. *Progress theor. Phys.* 6, 202—206 (1951) [Esperanto].

Bogoljubov, N. N.: Zur Frage der Grundgleichungen der relativistischen Quantentheorie der Felder. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 81, 757—760 (1951) [Russisch].

Die Gleichungen für die Änderung des Zustandsvektors in quantisierten Feldtheorien werden für beliebige raumartige Hyperebenen statt für allgemeinere Hyperflächen formuliert und die Bedingungen der Kovarianz diskutiert. Es scheint das Bestreben des Verf. zu sein, nicht diese Gleichungen selbst, sondern den (nach der üblichen Auffassung erst aus diesen zu errechnenden) Ausdruck für die Transformationsmatrix, die den Zustand bei $t = -\infty$ in den Zustand auf einer Hyperebene verwandelt, an die Spitze zu stellen; hieraus können die Gleichungen für die Änderung des Zustandsvektors dann gewonnen werden. — (Einfaches Beispiel aus der gewöhnlichen Quantentheorie: Aus $i\dot{S} = HS$ und $SS^+ = 1$ folgt umgekehrt $H = i\dot{S}S^+$. Ref.)

Gerhart Lüders.

Bogoljubov, N. N.: Über eine Klasse von Grundgleichungen der relativistischen Quantentheorie der Felder. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 81, 1015—1018 (1951) [Russisch].

(Vgl. vorsteh. Referat.) Für die Transformationsmatrix werden formale Ausdrücke angegeben, die den in der üblichen Theorie auftretenden sehr ähnlich sind, jedoch noch „glättende“ Funktionen (im Sinne von Dyson und Stueckelberg) enthalten, wodurch Divergenzen der üblichen Feldtheorie vermieden werden sollen. — Anm. d. Ref.: In den vorliegenden Arbeiten ist ein Programm formuliert worden. Für eine Beurteilung der Ansätze, insbesondere auch ihrer physikalischen Interpretation, wird man spätere Veröffentlichungen abwarten müssen.

Gerhart Lüders.

Bunge, Mario: Bemerkung über den Massendefekt des Wasserstoffatoms. *Acta phys. Austr.* 5, 77—79 (1951).

Verf. zeigt im engen Anschluß an eine Arbeit von W. Thirring (dies. Zbl. 38, 410) daß die relativistische Wellengleichung eines Systems in einem beliebig bewegten Lorentzschen Bezugssystem allein nicht ausreicht, um das System zu beschreiben. Es wird gezeigt, daß jedoch eine konsequente Beschreibung unter Mitberücksichtigung der elektromagnetischen Spannungen möglich ist. Nach dieser Einleitung wird der Beitrag der Bindungsenergie zur Gesamtmasse des Wasserstoffatoms (Massendefekt) berechnet. Man gewinnt so schließlich den allgemeinen Energieausdruck in einem beliebigen Lorentzsystem.

F. Cap.

Matthews, P. T. and Abdus Salam: The renormalization of meson theories. *Reviews modern Phys.* 23, 311—314 (1951).

Rzewuski, Jan: Statistical interpretation of the Klein-Gordon equation. Acta phys. Polon. 11, 1—8 (1951).

Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation (statistische Deutung) quantentheoretischer Feldgleichungen läßt sich bekanntlich nur bei Differentialgleichungen durchführen, deren höchste zeitliche Ableitung von erster Ordnung ist (Schrödingergleichung, Diracgleichung). Feldgleichungen, die nicht zu diesem Typ gehören, können nur im Rahmen der Methode der zweiten Quantisierung statistisch gedeutet werden. Verf. versucht nun, eine direkte quantentheoretische Interpretation auch für solche Feldgleichungen (z. B. Meson) zu geben, ohne die Methode der Feldquantisierung anzuwenden und erhält so gewisse Ergebnisse der quantentheoretischen Methodik wie etwa Streuwirkungsquerschnitte. Verf. schließt sich hierbei an Feynman (dies. Zbl. 37, 12; 38, 133) an und verwendet zur Lösung der Feldgleichungen die Methode der Greenschen Funktion. Am Beispiel des geladenen skalaren Mesons wird diese neue Anwendung der Greenschen Funktion erläutert. Anschließend wird versucht, die Lösung ψ und ψ^* der Feldgleichung (Klein-Gordon-Gleichung bei Vorhandensein eines äußeren skalaren Potentials φ) statistisch in dem Sinn zu interpretieren, daß nach der Wahrscheinlichkeitsamplitude gefragt wird, nach welcher die einfallende Welle ψ_1 im Potentialfeld φ in eine gestreute Welle ψ_2 verwandelt wird. Dies ist deshalb möglich, da die vom Verf. gewonnene spezielle Lösung von den ersten Ableitungen der Lösungsfunktion am Rande nicht abhängt — die ersten Ableitungen und die Funktion selbst können nämlich bei dieser Lösungsmethode nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden. Im gegebenen Spezialfall kann daher eine Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Streuprozess definiert werden, wobei jedoch noch ein Operator Y unbestimmt bleibt, der späterhin gewonnen wird. Es wird so möglich, eine normalisierte Wahrscheinlichkeitsamplitude aus den speziellen Lösungen der Feldgleichung des skalaren Mesons aufzubauen. Analog definiert Verf. durch $\psi^* Y \psi$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Methode dürfte sich — nach Meinung des Verf., der jedoch Ref. nur vorbehaltlich beistimmen kann — auch auf andere Gleichungen mit zeitlichen Ableitungen höher als der ersten Ordnung anwenden lassen — natürlich nur insoweit, als die Verwendung der Methode der Greenschen Funktion möglich ist und nur gewisse spezielle Lösungen (anscheinend ebene Wellen) verwendet werden. *F. Cap.*

Yosida, Kôzaku: A theorem of Liouville's type for meson equation. Proc. Japan Acad. 27, 214—215 (1951).

The author gives a simple proof of an analogue for the radiation condition for the equation $\Delta h(x) = m(x) h(x)$, where x is a point of an n -dimensional region R , and $m(x)$ has a positive lower bound m . If $\partial h / \partial n = 0$ on the boundary (assumed finite) of R , and if at large distances $|x|$ there holds the order result $h(x) = O(\exp(\alpha |x|))$, where $\alpha < \sqrt{m/2}$, then $h(x)$ vanishes identically. The corresponding result in which R is finite is almost immediate. A consequence concerning Brownian motion is stated. *Frederick V. Atkinson.*

Heller, Jack: Covariant transformation law for the field equations. Phys. Review. II. Ser. 81, 946—948 (1951).

Itô, D.: „Infra-red catastrophe“-like divergency in meson-decay process. Progress theor. Phys. 6, 1020—1022 (1951).

Itô, D.: On the divergence of the transition probability due to energy conservation in intermediate states. Progress theor. Phys. 6, 1022—1023 (1951).

Kotani, Tsuneyuki, Shigeru Machida, Seitaro Nakamura, Hisao Takebe, Minoru Umezawa and Tets Yoshimura: On the mesonic correction to the β -decay. Progress theor. Phys. 6, 1007—1012 (1951).

Ono, Ken-ichi: On the spin of neutrino. Progress theor. Phys. 6, 238—243 (1951).

Bekanntlich hat es sich als unmöglich erwiesen, die lange Lebensdauer von π -Mesonen gegen β -Zerfall zu verstehen, wenn man den β -Zerfall der Nukleonen durch diejenige Kopplung Nukleon—Elektron erklären will, welche durch die π - und μ -Mesonen vermittelt wird. Verf. bemerkt, daß eine solche Erklärung möglich wäre, wenn man dem Neutrino einen Spin $3/2$ statt $1/2$ zuschreiben würde. Indessen erhält dann das erlaubte β -Spektrum statt der experimentell gut verifizierten Fermischen die Konopinski-Uhlenbecksche Form, so daß der vorgeschlagene Ausweg dennoch nicht brauchbar ist. *M. R. Schafroth.*

Enatsu, Hiroshi and Pong Yul Pac: On the mass difference of nucleons and the cohesive mesons. Progress theor. Phys. 6, 665—672 (1951).

Enatsu, Hiroshi: On the self-energies of nucleons. *Progress theor. Phys.* 6, 643—664 (1951).

Verf. untersucht die bereits oft diskutierte Idee, daß durch Wechselwirkung des Nukleons mit Mesonen verschiedener Masse die Selbstenergie kompensiert werden könnte. Er zeigt, daß dies in zweiter störungstheoretischer Näherung durch Ankopplung von skalaren und pseudoskalaren Mesonen gelingt. Da jedoch höhere Näherungen nicht betrachtet werden, ist die Bedeutung dieses Resultats fraglich.
Thirring.

Yamazaki, Kazuo and Hiroshi Enatsu: On the self-energies of mesons. *Progress theor. Phys.* 6, 731—736 (1951).

Fujimoto, Y. and T. Tamura: A note on the Fermi's theory of meson production. *Progress theor. Phys.* 6, 901—903 (1951).

Watson, Kenneth M. and Keith A. Brueckner: The analysis of π -meson production in nucleon-nucleon collisions. *Phys. Review, II. Ser.* 83, 1—9 (1951).

Verff. zeigen, daß die Wirkungsquerschnitte für π -Meson-Erzeugung durch Nucleon-Nucleon-Stoß schon durch die Forderung der Erhaltung von Drehimpuls und Parität sowie durch die Annahme der Ladungssymmetrie der Kernkräfte weitgehend bestimmt sind; dies unter der plausiblen Voraussetzung, daß Mesonen nur bei solchen Stößen emittiert werden, deren Stoßparameter klein gegen die Reichweite der Kernkräfte ist. Pseudoskalare Mesonen werden, wie sich aus einer Analyse der experimentellen Daten für den (PP, π^+)-Prozeß ergibt, vorwiegend in p -Zustände emittiert; die hieraus zu ziehenden Folgerungen sind in Übereinstimmung mit der Erfahrung.
Wolfram Urich.

Minami, S.: π^0 -meson production by gamma-ray. *Progress theor. Phys.* 6, 895—896 (1951).

Aidzu, Kô, Yoichi Fujimoto and Hiroshi Fukuda: On the production of mesons by X-rays. *Progress theor. Phys.* 6, 193—196 (1951).

Verff. berechnen Wirkungsquerschnitte für die Erzeugung von π^+ - und π^0 -Mesonen durch Photonen in 1. Näherung; die Wechselwirkung mit dem anomalen magnetischen Moment des Nucleons, die sich in einer höheren Näherung zeigen würde, berücksichtigen sie phänomenologisch durch einen Pauli-Term im Hamilton-Operator. Die Überlegungen sind ganz ähnlich den von Kaplon (später) veröffentlichten (siehe dies. Zbl. 43, 425).
Wolfram Urich.

Ivanenko, D. und V. Lebedev: Die mehrfache Erzeugung von Mesonen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 80, 357—360 (1951) [Russisch].

Es wird versucht, das Problem der Mesonen-Vielfacherzeugung bei Nukleonenstoß halbphänomenologisch dadurch zu behandeln, daß als Wechselwirkungsenergie zwischen Nukleonen und Mesonenfeld eine Potenzreihe in der Mesonenfeldstärke angesetzt wird, wobei die Koeffizienten der einzelnen Summanden aus dem Experiment zu entnehmen wären. Die Wechselwirkungsenergie wird in erster störungstheoretischer Näherung berücksichtigt; aus dem Vergleich mit den Daten einiger Mesonenschauer wird für die obengenannten Koeffizienten ein vorläufiger Ansatz entnommen.
Gerhart Lüders.

Nambu, Yoichiro, and Yoshio Yamaguchi: Meson-nucleon scattering. *Progress theor. Phys.* 6, 1000—1006 (1951).

Wessel, Walter: Zur relativistischen Quantenmechanik. II. *Z. Naturforsch.* 6a, 473—477 (1951).

L'examen de la représentation proposée par l'A. (ce Zbl. 36, 143) pour l'opérateur de masse propre généralisée, montre que les valeurs propres de cet opérateur possèdent un point d'accumulation autour de la valeur 0 ce qui semble inacceptable. Pour écarter cette difficulté, l'A. propose d'autres représentations possibles pour l'opérateur de masse propre et en étudie les propriétés.
Gérard Petiau.

Araki, Gentaro and Wataro Watari: Electronic states of C_2 -molecule. II. Effect of 2 s -shells. Progress theor. Phys. 6, 945—960 (1951).

Araki, Gentaro and Wataro Watari: Electronic states of C_2 -molecule. III. Numerical values and reduction formulas of integrals. Progress theor. Phys. 6, 961—979 (1951).

Ishidzu, Takehiko: Effects of nuclear motion on the fine and the hyperfine structure of hydrogen. I. Progress theor. Phys. 6, 48—60 (1951).

Wie bei früheren Arbeiten zu diesem Problem [K. Bechert und J. Meixner, dies. Zbl. 35, 186, G. Breit und R. E. Meyerott, Phys. Review. II. Ser. 75, 1447 (1949) und andere] bildet die relativistische 16-komponentige Wellengleichung den Ausgangspunkt für die Rechnung. Nach einem historischen Überblick wird im 1. Teil der Arbeit die Gleichung für den Fall verschwindenden Gesamtdrehimpulses auf eine zweikomponentige Gleichung reduziert und mittels Störungsrechnung durch eine Potenzreihe in m/M (m Masse des Elektrons, M Protonenmasse) gelöst.

Erwin Kreyßig.

Ishidzu, Takehiko: Effects of nuclear motion on the fine and the hyperfine structure of hydrogen. II. Progress theor. Phys. 6, 154—165 (1951).

Im Anschluß an den ersten Teil der Arbeit (vorsteh. Ref.) wird die 16-komponentige relativistische Wellengleichung für den Fall, daß der Gesamtdrehimpuls F nicht verschwindet, in enger Anlehnung an die Untersuchung von K. Bechert und J. Meixner (dies. Zbl. 35, 186) schrittweise gelöst. Für die beiden äußeren Hyperfeinstrukturkomponenten $F = l + 1$, $j = l + \frac{1}{2}$ und $F = l - 1$, $j = l - \frac{1}{2}$ ergibt sich kein Unterschied gegenüber dem bisher bekannten Korrekturfaktor $(1 + m/M)^{-3}$ (M Protonenmasse, m Masse des Elektrons). Dagegen führt die Berücksichtigung von Gliedern mit $(m/M)^2$ in der Hamiltonschen Funktion im Fall $l \neq 0$ (also außer bei s -Termen) bei den beiden anderen Komponenten $F = l$, $j = l \pm \frac{1}{2}$ zu einem Korrekturfaktor $(1 + m/M)^{-2}$.

Erwin Kreyßig.

Manneback, C.: Computation of the intensities of vibrational spectra of electronic bands in diatomic molecules. Physica 17, 1001—1010 (1951).

Als Maß für die Übergangswahrscheinlichkeit der Schwingungsspektren der Elektronenbanden ergibt sich bei zweiatomigen Molekülen nach dem Franck-Condon-Prinzip das Überlappungsintegral

$$C(n', n'') = \int_0^{\infty} \psi_{n'}(R) \psi_{n''}(R) dR.$$

R ist hierbei der Kernabstand, n' bzw. n'' die Schwingungsquantenzahl des angeregten bzw. des Grundzustandes und ψ die zugehörige Schwingungseigenfunktion. Unter der Annahme harmonischer Bewegungen in beiden Zuständen werden zur Berechnung der $C(n', n'')$ Rekursionsformeln angegeben. Das Verfahren, das H. H. Aiken mit Hilfe des Harvard-Mark-I-Rechenautomaten praktisch erprobte, bietet rechentechnische Vorteile gegenüber der bekannten endlichen Reihenentwicklung für die $C(n', n'')$ nach E. Hutchisson [Phys. Review, II. Ser. 36, 410 (1930) und 37, 45 (1931)].

Erwin Kreyßig.

Kothari, Duleh Singh and Laxman Singh Kothari: A note on mass motion of a gas. Indian J. Phys. 25, 305—308 (1951).

An Hand der stoßkinetischen Ableitung der Geschwindigkeitsverteilung in einem idealen Gas wird gezeigt, daß auch bei Gültigkeit der Fermi- oder der Bose-Statistik unter der im Exponenten des Nenners der Verteilungsfunktion stehenden Energie die Größe $m(v - v_0)^2/2$ zu verstehen ist, in der v die jeweilige Teilchengeschwindigkeit und v_0 die Schwerpunkts-geschwindigkeit des ganzen Gases bedeutet.

Fritz Sauter.

Dutta, M.: On a treatment of imperfect gas after Fermi's model. I. Proc. nat. Inst. Sci. India 13, 247—252 (1947).

In dem vorliegenden I. Teil einer aus vier Aufsätzen bestehenden Untersuchung des Verf. über die statistische Behandlung des nicht-idealen Gases wird zunächst dem endlichen Volumen b der einzelnen Gasteilchen dadurch Rechnung getragen, daß das gesamte Gasvolumen V in V/b Raumzellen unterteilt gedacht wird, die jeweils nur mit einem Gasteilchen besetzt werden können. Dies führt in der „thermodynamischen Wahrscheinlichkeit“ zu einem Gewichtungsfaktor $(V/b)!/N!(V/b - N)!$; und ein ähnliches V -abhängiges Glied tritt dann auch in den thermodynamischen Potentialen auf. Andererseits hat man dann bei der Verteilung im Impulsraum mit einer Zellengröße h^3/b zu rechnen. Damit kommt man zu einer thermischen Zustandsgleichung $p = -(kT/b) \cdot \ln(1 - Nb/V)$, welche die van der Waalssche Volumkorrektur bei nicht zu großem Nb/V in erster Näherung richtig wiedergibt. — Anschließend wird der Einfluß der van der Waalsschen Anziehungskräfte rein formal durch eine effektive Vergrößerung des Gasvolumens von V auf $V + a$ zu erfassen gesucht, entsprechend der Tatsache, daß auf Grund dieser Kräfte die Gasdichte gegen den Rand hin abnimmt. Damit kommt Verf. tatsächlich in erster Näherung zur van der Waalsschen Druckkorrektur, da er plausibel machen kann, daß dieses a proportional der Teilchenzahl N und verkehrt proportional der absoluten Temperatur T ist.

Fritz Sauter.

Dutta, M.: On a treatment of imperfect gas after Fermi's model. II. Proc. nat. Inst. Sci. India 14, 163—168 (1948).

In Fortsetzung seiner im vorstehend referierten I. Teil entwickelten Methode zur statistischen Behandlung nicht-idealer Gase versucht Verf. die Druckkorrektur auf Grund der van der Waalsschen Kräfte dadurch genauer als im I. Teil zu erfassen, daß er das Gesamtvolumen V in das Volumen V_1 des ungestörten Gasinneren und in das Volumen V_2 der Randschicht unterteilt und annimmt, daß die Gasteilchen in V_1 eine andere potentielle Energie besitzen als die in V_2 . Der übliche statistische Weg über das Maximum der thermodynamischen Wahrscheinlichkeit (auch hinsichtlich der Teilchenzahlen N_1 bzw. N_2 in V_1 bzw. V_2) führt wiederum in erster Näherung zur van der Waalsgleichung mit der richtigen Volumkorrektur infolge des Eigenvolumens der Gasteilchen, während sich der Koeffizient α in der Druckkorrektur α/V^2 als eine bestimmte Funktion von N , V und T , sowie des Energieunterschiedes zwischen Gasinneren und Randschicht einerseits, des Verhältnisses V_2/V_1 andererseits ergibt.

Fritz Sauter.

Dutta, M.: On a treatment of imperfect gas after Fermi's model. III. Proc. nat. Inst. Sci. India 17, 27—37 (1951).

Die in den beiden vorstehend referierten Teilen I und II entwickelte Methode wird auf den Fall übertragen, daß im Gasraum ein zusätzliches äußeres Feld besteht. Durch vorübergehende Unterteilung des gesamten Gasraumes in einzelne Teilvolumina V_m mit verschiedenen potentiellen Energien w_m erhält Verf. für die Teilchenzahl N_m in V_m die Beziehung $N_m = (V_m/b)/(e^{v + w_m/kT} + 1)$, in der b das Eigenvolumen der einzelnen Teilchen und v eine aus $\sum N_m = N$ bestimmbare Größe bedeutet. Der Einfluß dieser N_m -Formel von der Gestalt einer Fermi-Verteilung auf die Zustandsgleichung in bestimmten Fällen wird diskutiert.

Fritz Sauter.

Dutta, M.: On a treatment of imperfect gases after Fermi's model. IV. Proc. nat. Inst. Sci. India 17, 445—466 (1951).

Die Methode, welche der Verf. in den drei vorstehend referierten Arbeiten zur Behandlung eines nicht-idealen Gases entwickelt hat, wird nunmehr auf eine Gas-mischung aus zwei Komponenten angewandt, in der keine chemische Reaktionen oder Assoziationen vorkommen. Dazu werden statt der einen Größe b die drei Größen b_1 , b_2 und b_{12} eingeführt, von denen b_1 das Volumen angibt, welches ein Teilchen der Sorte 1 für die übrigen Teilchen der Sorte 1 versperrt, während b_{12}

den Raum angibt, den ein Teilchen der Sorte 1 den Teilchen der Sorte 2 wegnimmt. Mit diesen Größen wird zunächst die Volumkorrektur in der van der Waalsgleichung ermittelt, für die sich der übliche Ausdruck $V - (N_1^2 b_1 + 2 N_1 N_2 b_{12} + N_2^2 b_2)/2N$ ergibt. Ferner wird der Einfluß der Anziehungskräfte nach der im II. Teil entwickelten Methode mit der gesonderten Behandlung der Randschicht untersucht, wobei sich recht umständliche Formeln ergeben. Und schließlich wird entsprechend dem Teil III die Wirkung eines äußeren Feldes betrachtet. *Fritz Sauter.*

Placzek, G.: Correlation of position for the ideal quantum gas. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 581—588 (1951).

Wie Verf. selbst nachträglich bemerkt hat, wurden seine Ergebnisse zum größten Teil schon früher von F. London [J. chem. Physics 11, 203—213 (1943)] und von G. Leibfried [Z. Phys. 128, 133—143 (1950)] abgeleitet. *Gerhard Höhler.*

Twiss, R. Q.: On Bailey's theory of amplified circularly polarized waves in an ionized medium. Phys. Review, II. Ser. 84, 448—457 (1951).

Verf. gibt eine kritische Untersuchung der Berechnungen von Bailey über die Verstärkung zirkular polarisierter elektromagnetischer Wellen in einem Plasma, welches sich mit bestimmter Geschwindigkeit in einem magnetischen Feld bewegt. Unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen wird, ausgehend von den Lorentz-Maxwell'schen Gleichungen, unter Verwendung geeigneter Fourier-Transformationen gezeigt, daß die Wellen exponentiell ansteigender Amplitude, welche Bailey als Verstärkungswellen ansieht, nur durch Reflexion an Unstetigkeitsstellen des Mediums entstehen können. Es zeigt sich, daß diese Theorie, ebenso wie Baileys Untersuchungen, zur Erklärung der starken akustischen Strahlung von Sonnenflecken und Gasentladungen nicht ausreicht. Für bestimmte ideale Bedingungen kann allerdings eine erhebliche Verstärkung auftreten, jedoch ist es außerordentlich unwahrscheinlich, daß diese Verhältnisse in den Sonnenflecken vorliegen.

Günter Ecker.

Kwal, Bernard: Pertes d'énergie des particules chargées dans un milieu très fortement ionisé (plasma ionique). J. Phys. Radium 12, 805—810 (1951).

Nishiyama, T.: On the plasma-like oscillation. Progress theor. Phys. 6, 1025—1026 (1951).

Boer, J. de and R. Byron Bird: Quantum corrections to transport properties at high temperatures. Phys. Review, II. Ser. 83, 1259—1260 (1951).

Bekanntlich kann man die beiden Wirkungsquerschnitte, die in der kinetischen Gastheorie bei der Behandlung der Diffusion und der Wärmeleitung auftreten, quantenmechanisch aus der Streuung zweier Gasteilchen aneinander berechnen. Dabei kommt man auf Summen nach der Drehimpulsquantenzahl l , welche als Summenglieder Winkelfunktionen der durch die Streuung bedingten Phasenverschiebungen enthalten. Um diese Phasenverschiebungen zu berechnen, verwenden die Verfasser im Anschluß an B. Kahn (Dissertation Utrecht 1938) die WKB-Methode. Ersetzt man dann die l -Summe durch ein Integral über den Stoßparameter, so findet man in erster Näherung bei einer Entwicklung nach Potenzen der Planckschen Konstante genau den klassischen Wert für die Wirkungsquerschnitte. Darüber hinaus geben Verff. noch die nächste Näherung dieser Entwicklung an, welche sich als recht verwickelter Integral über das Wechselwirkungspotential darstellt.

Fritz Sauter.

Bates, D. R.: Rate of formation of molecules by radiative association. Monthly Not. Roy. astron. Soc. 111, 303—314 (1951).

In verdünnten Gasen ist die Bildung von Molekülen im Zweierstoß unter Emission eines Lichtquants der vorherrschende Prozeß. Im Anschluß an eine Arbeit von Kramers und ter Haar [Bull. astron. Inst. Netherlands 10, 137 (1946)] wird die Wahrscheinlichkeit für diesen Prozeß berechnet und dabei ein Fehler in

letzterer, betreffend die Festlegung der oberen Grenze für den Stoßparameter in der Integration über diesen, richtiggestellt. Diskussion von Näherungsverfahren und Hilfstafeln zur leichteren Berechnung. Numerische Auswertung für folgende Prozesse: $C + H = CH + h\nu$, $C^+ + H = CH^+ + h\nu$ (beide Prozesse reichen nicht aus, um die beobachtete Konzentration von CH und CH^+ in interstellaren Wolken mit den bisher angenommenen phys. Bedingungen in diesen zu erklären). $N^+ + N = N_2^+ + h\nu$ (auch dieser Prozeß reicht nicht aus, um die Existenz von N_2^+ -Ionen in der oberen Erdatmosphäre zu deuten) und, als am genauesten durchzuführender: $H + H^+ = H_2^+ + h\nu$. Gerd Burkhardt.

Takayanagi, Kazuo: On the theory of chemically reacting gas. Progress theor. Phys. 6, 486—497 (1951).

Das im allgemeinen Fall recht verwickelte Problem, die durch chemische Reaktionen in Gasen bedingte Störung in der Geschwindigkeitsverteilung der einzelnen Gaskomponenten zu ermitteln, läßt sich im Fall von bimolekularen Reaktionen $A + B \rightleftharpoons C + D$ dadurch ganz wesentlich vereinfachen, daß die Masse der A-Teilchen als sehr klein gegenüber den Massen der drei übrigen Komponenten angenommen wird. Dann hat man nur die Störung der Verteilungsfunktion für die A-Teilchen zu untersuchen. Hierbei erweist sich diese Störung im allgemeinen als so klein, daß man meist von ihr überhaupt absehen kann. Fritz Sauter.

Katsura, Shigetoshi and Hisaaki Fujita: Point of condensation and the volume dependency of the cluster integrals. Progress theor. Phys. 6, 498—505 (1951).

In der Mayersehen Kondensationstheorie werden Teilchendichte und Druck durch die Summen $\frac{p}{kT} = \sum_{l=1}^{\infty} b_l(V) \cdot z^l$, $\frac{N}{V} = \sum_{l=1}^{\infty} l b_l(V) \cdot z^l$ gegeben. Dabei bedeutet z einen aus diesen beiden Beziehungen zu eliminierenden Parameter (Fugazität), und die b_l sind bestimmte, im allgemeinen noch vom Volumen abhängige Integrale über die Wechselwirkungskräfte zwischen den l zu einem Komplex zusammentretenden Gasteilchen (Cluster-Integrale). Diese b_l nehmen im Limes $V \rightarrow \infty$ bestimmte endliche Werte an, und diese Grenzwerte wurden bisher stets bei der Auswertung der obigen Formel benutzt. Verff. äußern nun Bedenken gegen diese Auswertung in dem Grenzfall der Kondensation, gegeben durch die Konvergenzgrenze der obigen Summen, und weisen darauf hin, daß Unterschiede in der Lage der Konvergenzgrenze auftreten können, je nachdem ob man erst mit $V \rightarrow \infty$ geht und dann die Summe ausführt oder ob man erst aufsummiert und dann $V \rightarrow \infty$ setzt. Dieser Unterschied wird an Hand einiger willkürlich gewählter $b_l(V)$ -Ansätze demonstriert. Ob bei den wirklichen Cluster-Integralen dieser Unterschied auftritt oder nicht, kann vorerst nicht entschieden werden. Fritz Sauter.

Prigogine, I. et P. Mazur: Sur deux formulations de l'hydrodynamique et le problème de l'hélium liquide II. Physica 17, 661—679 (1951).

Die Gesetze der Dynamik eines fluiden Mediums mit mehreren Komponenten können unter Anwendung der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse auf zwei verschiedene Arten formuliert werden. Die erste und übliche Art entspricht der Voraussetzung einer annähernden Gleichgewichtsverteilung der Geschwindigkeiten aller Komponenten um die mittlere Massengeschwindigkeit, d. h. einem normalen Impulsaustausch zwischen den verschiedenen Komponenten. Die zweite Art ergibt sich unter der Voraussetzung, daß die Impulsübertragung zwischen den verschiedenen Komponenten nur eine kleine Störung oder gar vernachlässigbar ist. In diesem Fall bewegen sich die Komponenten fast ungestört gegeneinander, jede hat annähernd ihre eigene Geschwindigkeitsverteilung um ihre eigene makroskopische Geschwindigkeit. Die Durchführung dieses Gedankens führt auf neue hydrothermodynamische Gleichungen, die bei geeigneter Spezialisierung die Gorterschen Gleichungen für die Bewegung des normalen und des superfluiden Anteils im flüssigen He II ergeben. Josef Meixner.